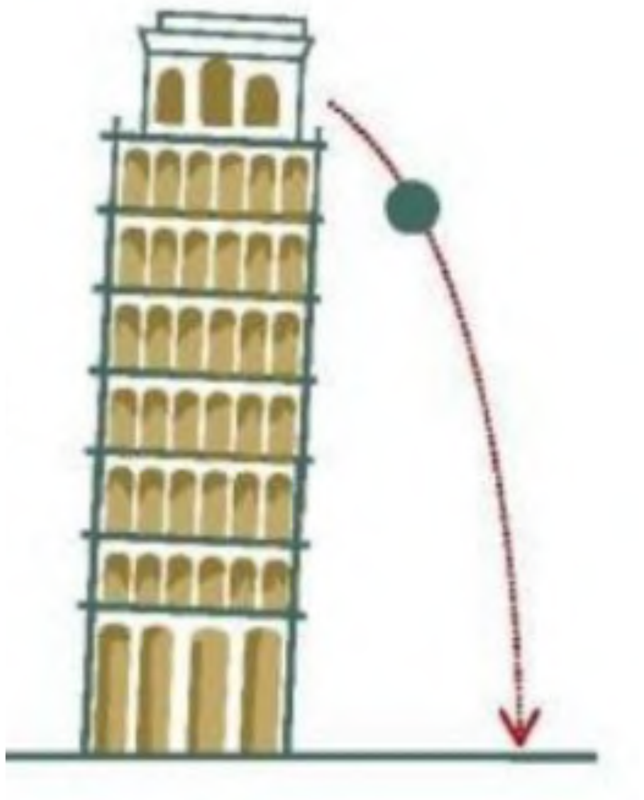
2. Vorlesung

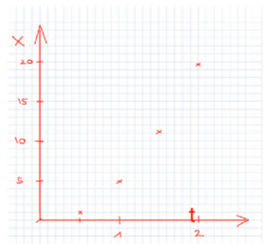
Wdh. 1. Vorlesung: Naturgesetze



Grundidee: Physik

i) Finde Gesetze

x	5 m	10m	20m
t	1s	1.5s	2s



ii) Formuliere diese mathematisch

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2x(t)}{g}}$$

Ableiten

$$v = gt \Leftrightarrow v = \sqrt{2gx}$$

iii) Führe Gesetze auf elementarere Prinzipien zurück

- **Energieerhaltung:** $E_{kin.} = E_{pot.} \Rightarrow v = \sqrt{2gx}$
- **Newtonsche Gesetze:** $F = ma \Rightarrow x = \frac{1}{2}gt^2$ **Integrieren**
- **Numerische Lösung**
- **Prinzip der kleinsten Wirkung**

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

System:= Menge von Objekten, z.B. Teilchen, Felder, Wellen…

Geschlossenes System:= völlig abgeschlossen von der Umwelt, keine Wechselwirkung

Zustand:= Objekte können in verschiedenen Zuständen sein, z.B. Objekt Münze kann in den Zuständen “Kopf” oder “Zahl” sein; Objekt Teilchen kann im Zustand x= 3.45m, v = 12.4 m/s sein

Zustandsraum:= Menge aller möglichen Zustände eine Objektes, z.B. Münze {Kopf, Zahl}; Teilchen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Dynamisches System:= System das sich mit der Zeit ändert, besteht aus Zustandsraum und dem Bewegungsgesetz oder dynamischen Gesetz. Zeit kann **kontinuierlich** ablaufen (Parameter $t \in \mathbb{R}$), oder in **diskreten** Schritten (Parameter $n \in \mathbb{N}$) .

Deterministisches dynamisches System:= ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen **zukünftigen** Zeitpunkt bestimmt werden.

Klassische Mechanik ist deterministisch und reversibel

Reversibles dynamisches System:= ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen vergangenen Zeitpunkt bestimmt werden.

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

Beispiel 2: System mit zwei Zuständen

Z. B. Münze: Kopf K oder Zahl Z zeigt nach oben

$\boxed{K}$ $\boxed{Z}$

Freiheitsgrad: Variable, die das System beschreibt, hier σ:

Kopf: $\sigma = +1$

Zahl: $\sigma = -1$

Dynamische Gesetze

Mathematische Formel: System zur Zeit n: $\sigma(n)$

A) Mache nichts:

$KKKKKKKKKKKKKK.......$

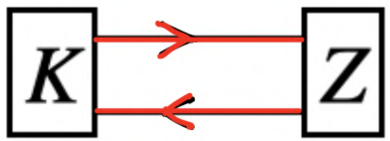
$$\sigma(n+1) = \sigma(n)$$

$ZZZZZZZZZZZZZZZZZZ.....$

B) Ändere immer den Zustand:

$ZKZKZKZKZKZKZKZK...$

$KZKZKZKZKZKZKZKZ...$

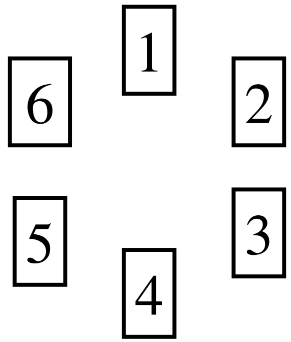


$$\sigma(n+1) = -\sigma(n)$$

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

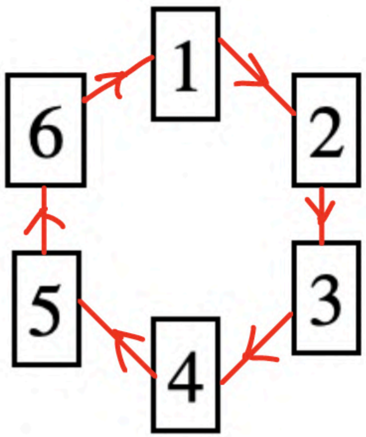
Beispiel 3: System mit sechs Zuständen

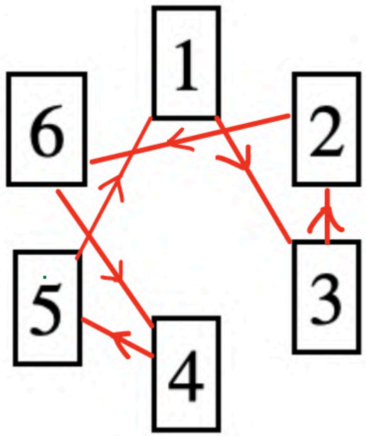
Z. B.Würfel:



Dynamische Gesetze

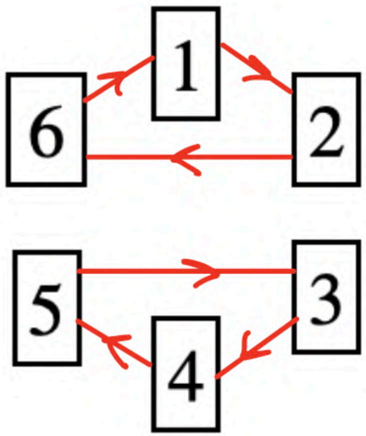
123456123456….
Deterministisch?
Reversibel?

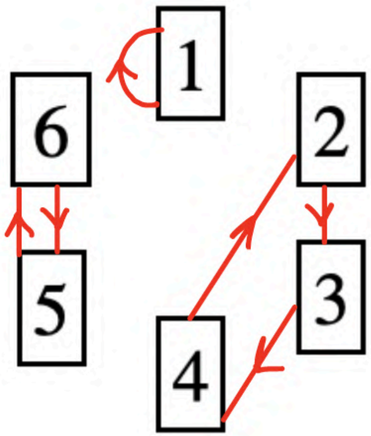




Wenn man die Seiten vom Würfel umenumeriert, dann ist das äquivalent zum 1. Fall

2 Zyklen: 612612…, 534534….
Deterministisch?
Reversibel?

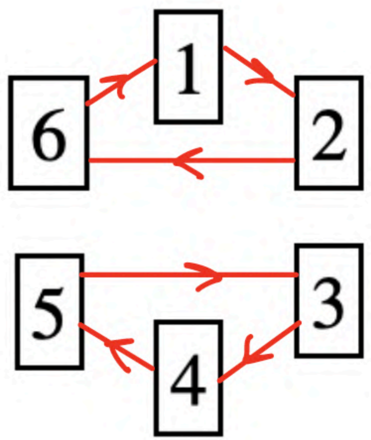




3 Zyklen:
111111…, 565656…, 234234….
Deterministisch? Reversibel?

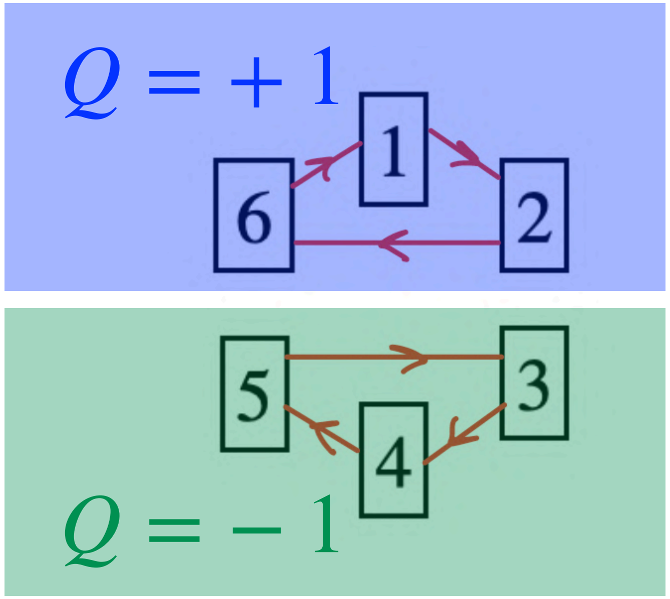
Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

Zyklen und Erhaltungssätze



Ist ein System in einem Zyklus, dann entkommt es diesem nicht mehr
oder
das System erinnert sich in welchem Zyklus es war

Ordnet man einem Zyklus eine Größe Q zu, dann ist diese Größe bei der dynamischen Zeitentwicklung erhalten



Genau das passiert z.B. bei der Energieerhaltung: es sind bei der Bewegung nur die Zustände erlaubt, die dieselbe Energie haben

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

Unendlich viele Zustände

$$\boxed{\ldots}\quad \boxed{-3}\quad \boxed{-2}\quad \boxed{-1}\quad \boxed{0}\quad \boxed{1}\quad \boxed{2}\quad \boxed{3}\quad \boxed{\ldots}$$

Wert des Zustandes wird mit N bezeichnet, $N \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Wert des Zustandes zur Zeit n: $N(n)$

Weitere Gesetze:

$$N(n+1) = N(n) - 1$$

$$N(n+1) = N(n) + 2$$

Deterministisch?
Reversibel?
Gibt es verschiedene Zyklen?

$$N(n+1) = (N(n))^2$$

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

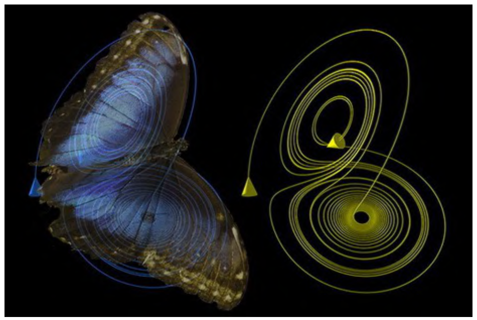
Grenzen der Präzision

Ist das System zum Anfangszeitpunkt exakt bekannt, dann kann auch die Zukunft exakt berechnet werden z.B. Münze

Es kann aber auch unmöglich sein das System zum Anfangszeitpunkt exakt zu kennen: z.B.: Teilchen mit Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit

Geringe Sensibilität, lineare Dynamik

Hohe Sensibilität, nicht-lineare Dynamik



Zukunft kann näherungsweise berechnet werden

Zukunft kann nicht wirklich berechnet werden (Chaos)

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

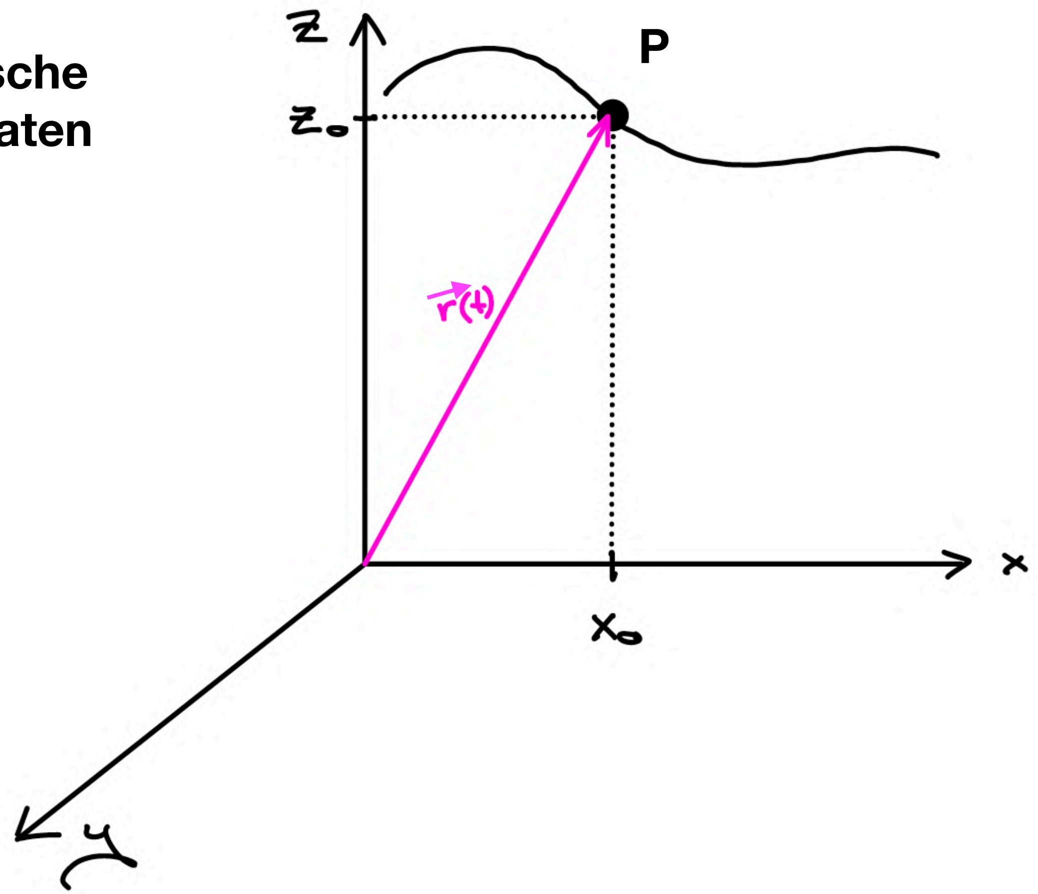
Zur Beschreibung der Position eines Teilchens benutzen wir Koordinaten
Bsp: Breiten- und Längengrad auf der Erde

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Zur Beschreibung der Position eines Teilchens benutzen wir Koordinaten
Bsp: Breiten- und Längengrad auf der Erde

Koordinatensystem: wähle Ursprung, wähle Koordinaten

Kartesische Koordinaten



Der Punkt P hat die Koordinaten

$(x = x_0, y = 0, z = z_0)$

Die Einheit der Koordinaten beträgt z.B. Meter…

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Neben der Position eines Teilchens interessiert uns auch die Zeitentwicklung dieser Position

- **Zeit t wird in Einheiten von z.B. Sekunden gemessen**
- **Die Zeit läuft gleichförmig ab**
- **Die Zeit hängt nicht vom Ort ab**

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Neben der Position eines Teilchens interessiert uns auch die Zeitentwicklung dieser Position

- **Zeit t wird in Einheiten von z.B. Sekunden gemessen**
- **Die Zeit läuft gleichförmig ab**
- **Die Zeit hängt nicht vom Ort ab**

Ein Ereignis hat somit vier Koordinaten

$$(x, y, z, t)$$

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Neben der Position eines Teilchens interessiert uns auch die Zeitentwicklung dieser Position

- **Zeit t wird in Einheiten von z.B. Sekunden gemessen**
- **Die Zeit läuft gleichförmig ab**
- **Die Zeit hängt nicht vom Ort ab**

Ein Ereignis hat somit vier Koordinaten

$$(x, y, z, t)$$

Man kann auch die Zeitabhängigkeiten der 3 Raumkoordinaten angeben

$$(x(t), y(t), z(t))$$

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Neben der Position eines Teilchens interessiert uns auch die Zeitentwicklung dieser Position

- **Zeit t wird in Einheiten von z.B. Sekunden gemessen**
- **Die Zeit läuft gleichförmig ab**
- **Die Zeit hängt nicht vom Ort ab**

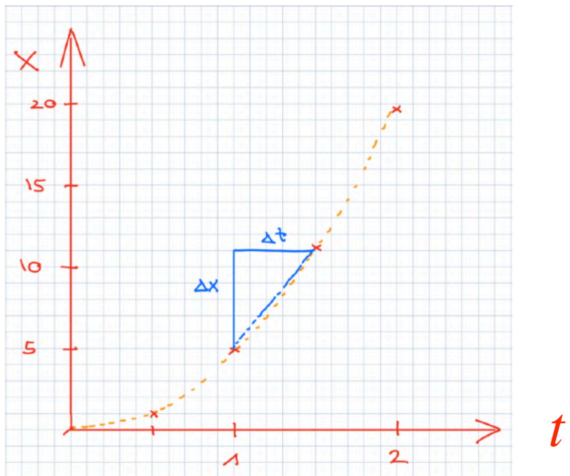
Ein Ereignis hat somit vier Koordinaten

$$(x, y, z, t)$$

Man kann auch die Zeitabhängigkeiten der 3 Raumkoordinaten angeben

$$(x(t), y(t), z(t))$$

Bsp.: $x(t) = \frac{1}{2} g t^2 \approx 5t^2$



Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

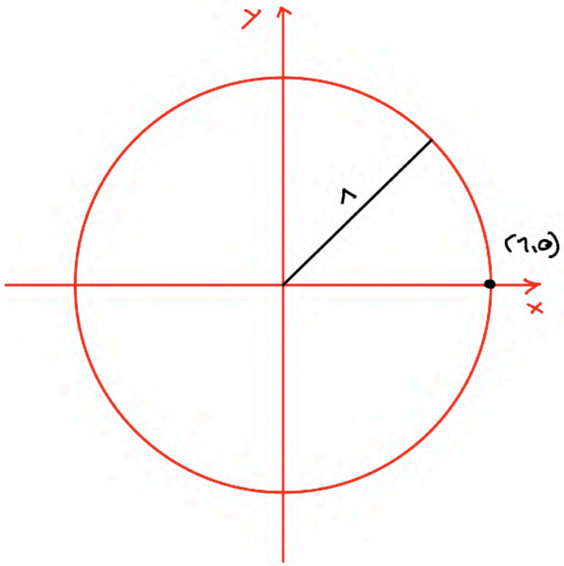
Plotte mit Mathematik-Program:

$$f(t) = 4t^4 + 3t^3 - t^2 + 8t - 6$$
$$g(x) = \sin x - \cos x$$
$$h(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha$$
$$i(x) = \sin^2 x - \cos x$$

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Trigonometrische Funktionen

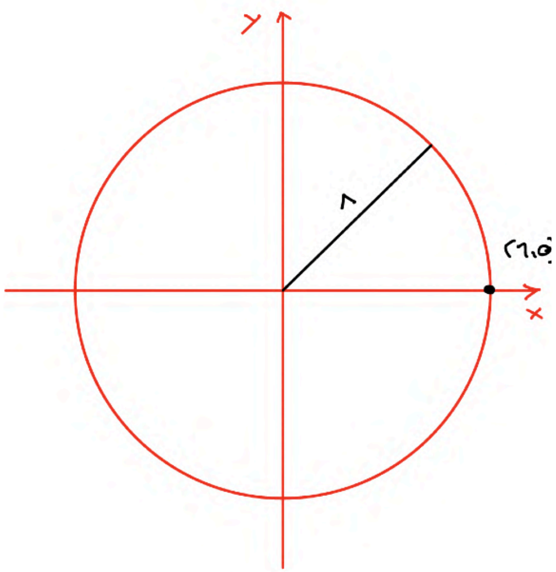
$$\varphi = 0^\circ = 0$$



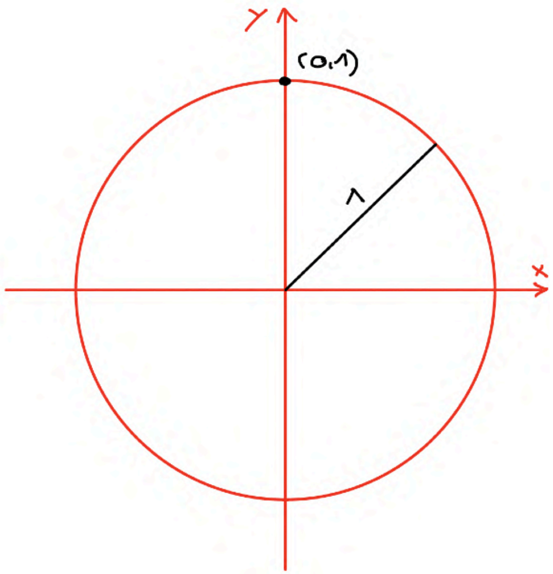
Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Trigonometrische Funktionen

$$\varphi = 0^\circ = 0$$



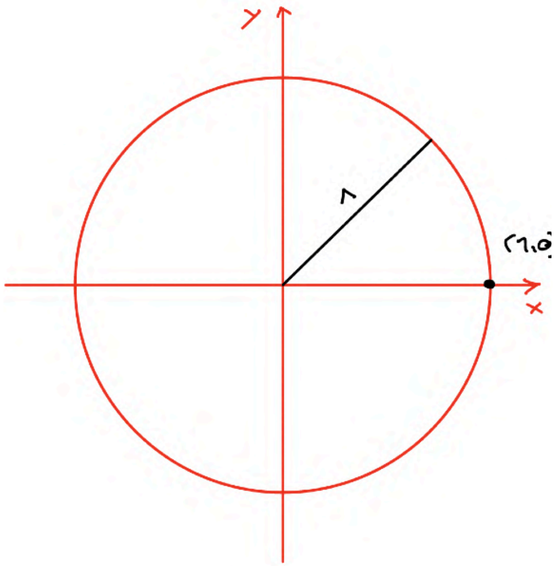
$$\varphi = 90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$$



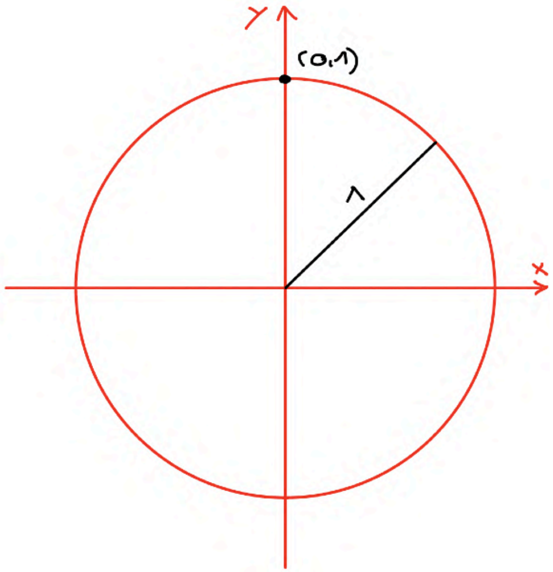
Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Trigonometrische Funktionen

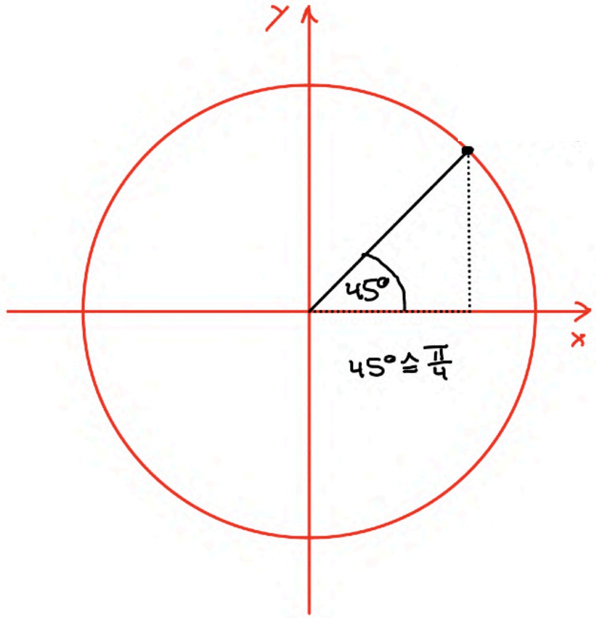
$$\varphi = 0^\circ = 0$$



$$\varphi = 90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$$



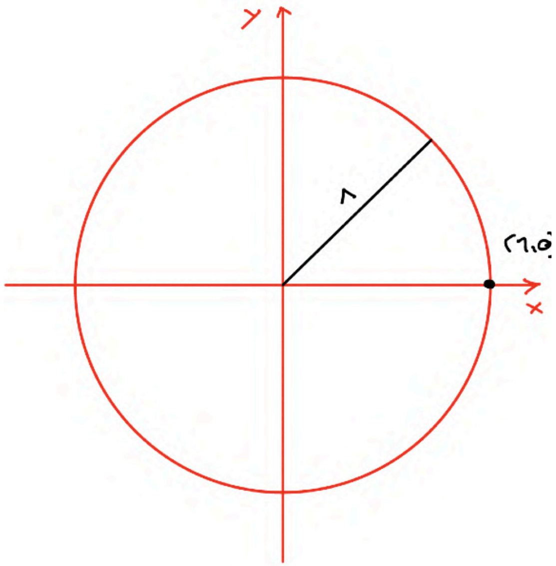
$$\varphi = 45^\circ \equiv \frac{\pi}{4}$$



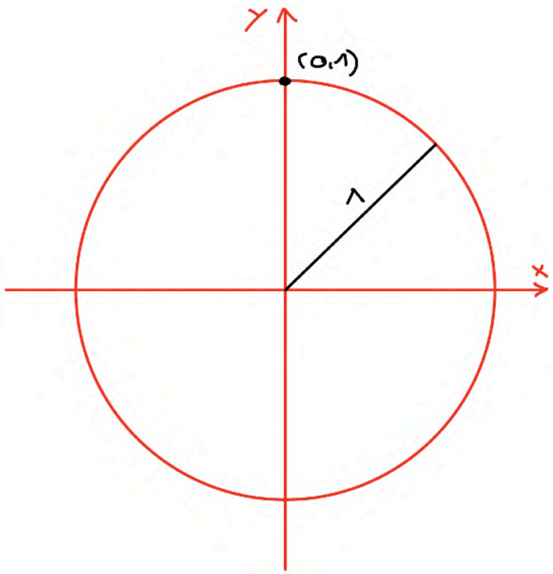
Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Trigonometrische Funktionen

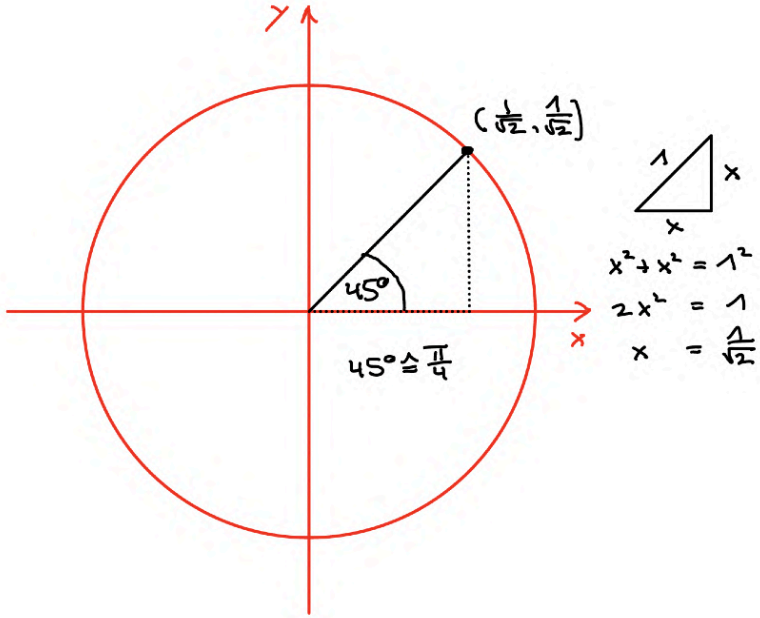
$$\varphi = 0^\circ = 0$$



$$\varphi = 90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$$



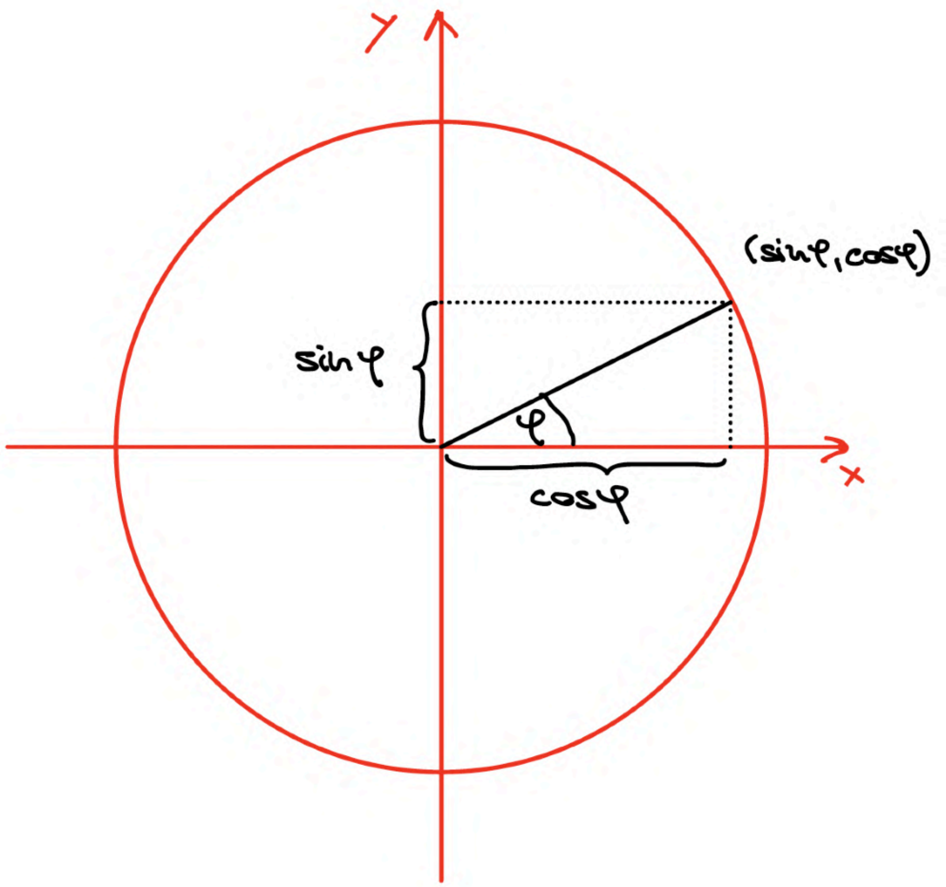
$$\varphi = 45^\circ \equiv \frac{\pi}{4}$$

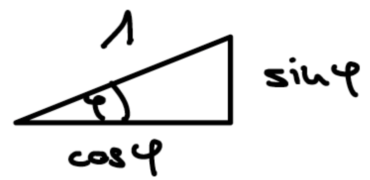


Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Trigonometrische Funktionen

φ **beliebig**

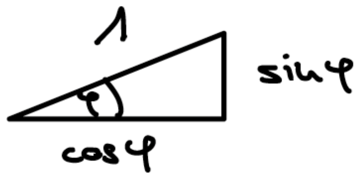




$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

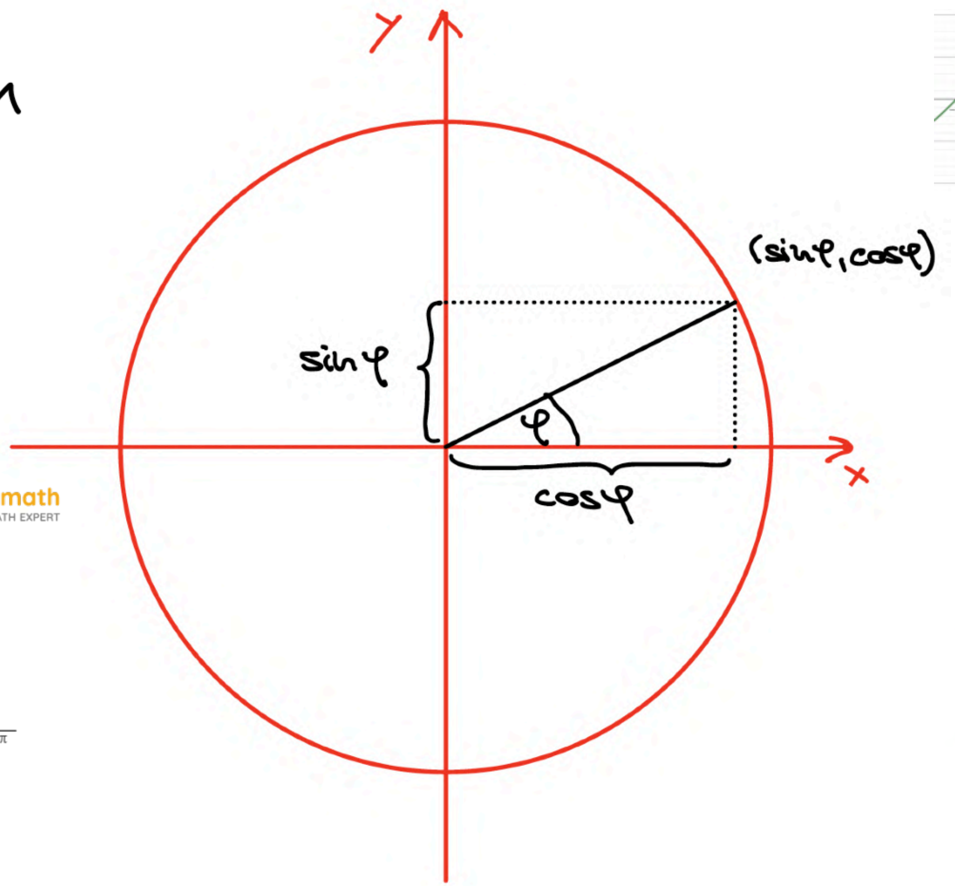
Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

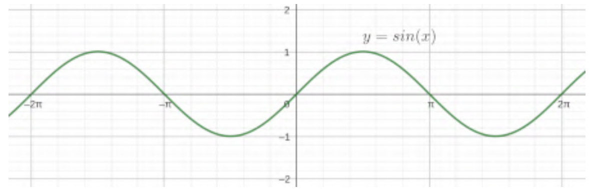
Trigonometrische Funktionen

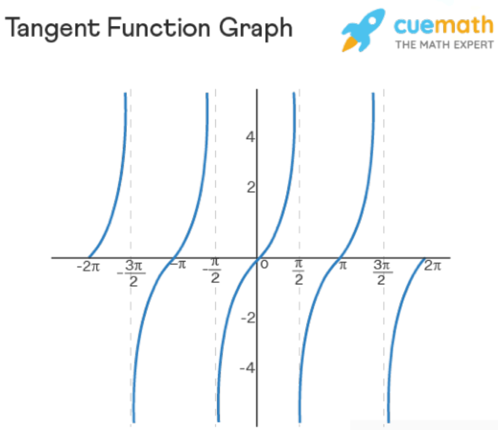


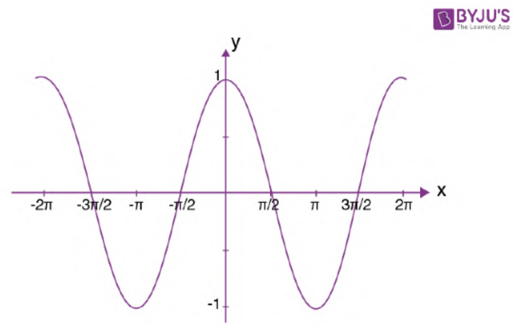
$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

φ beliebig





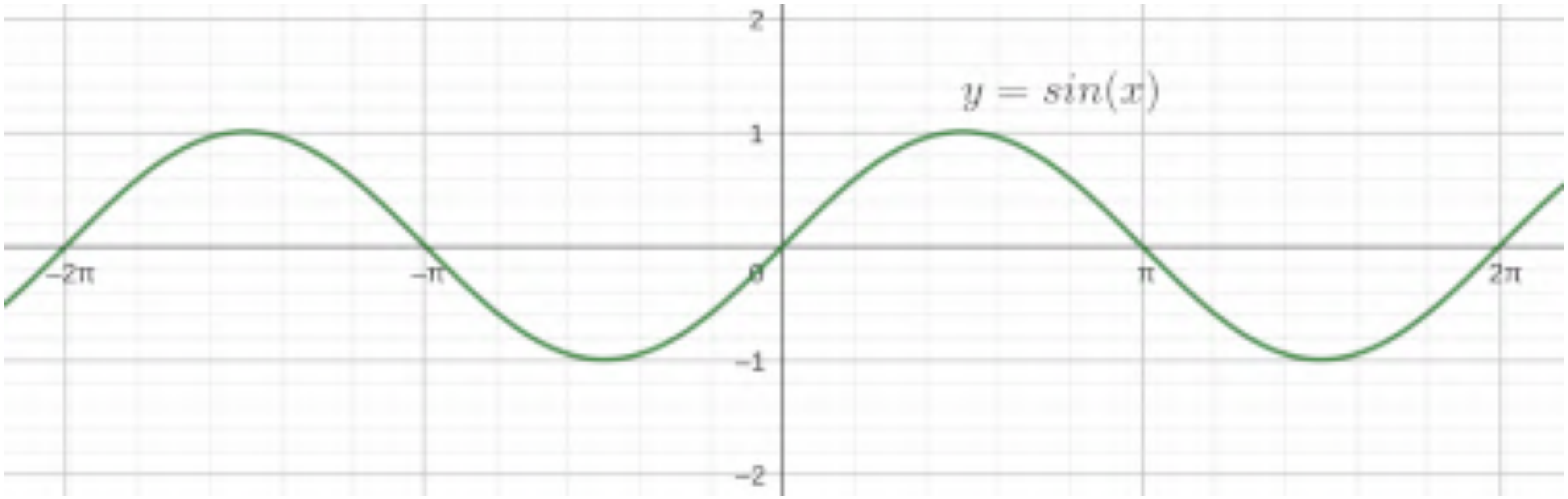




Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Trigonometrische Funktionen

Plotte $\sin x$ in Abhängigkeit von x



Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

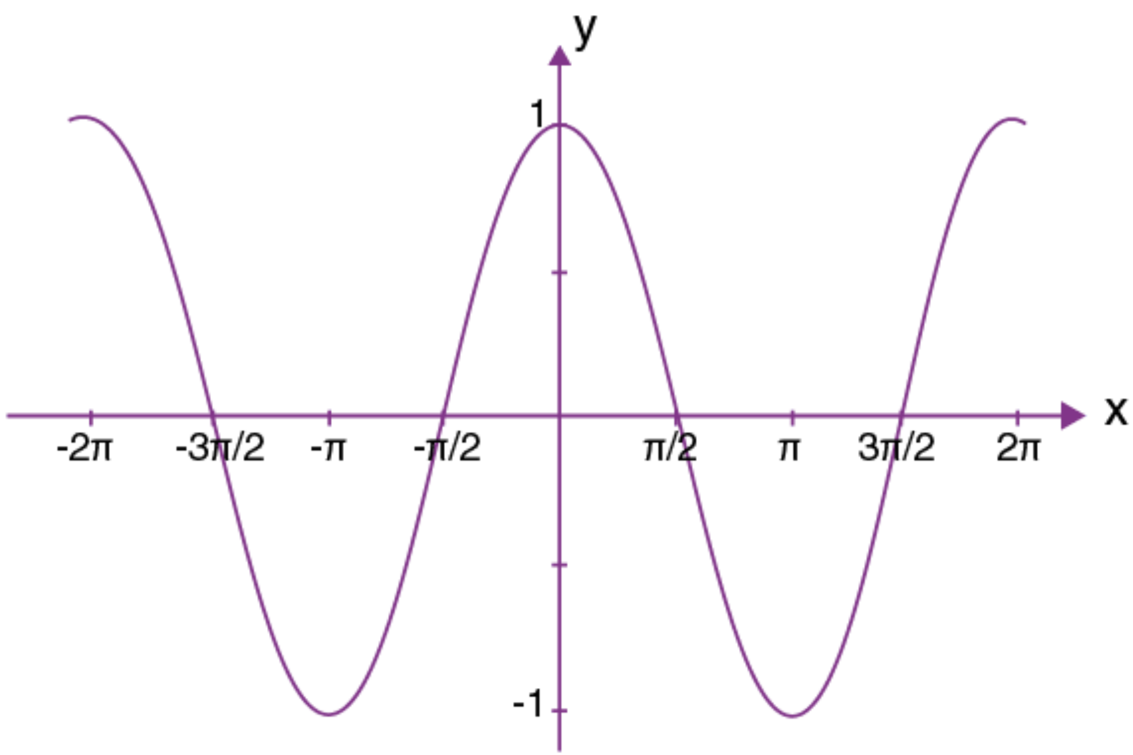
Trigonometrische Funktionen

Plotte $\cos x$ in Abhängigkeit von x

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

Trigonometrische Funktionen

Plotte $\cos x$ in Abhängigkeit von x



Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,…

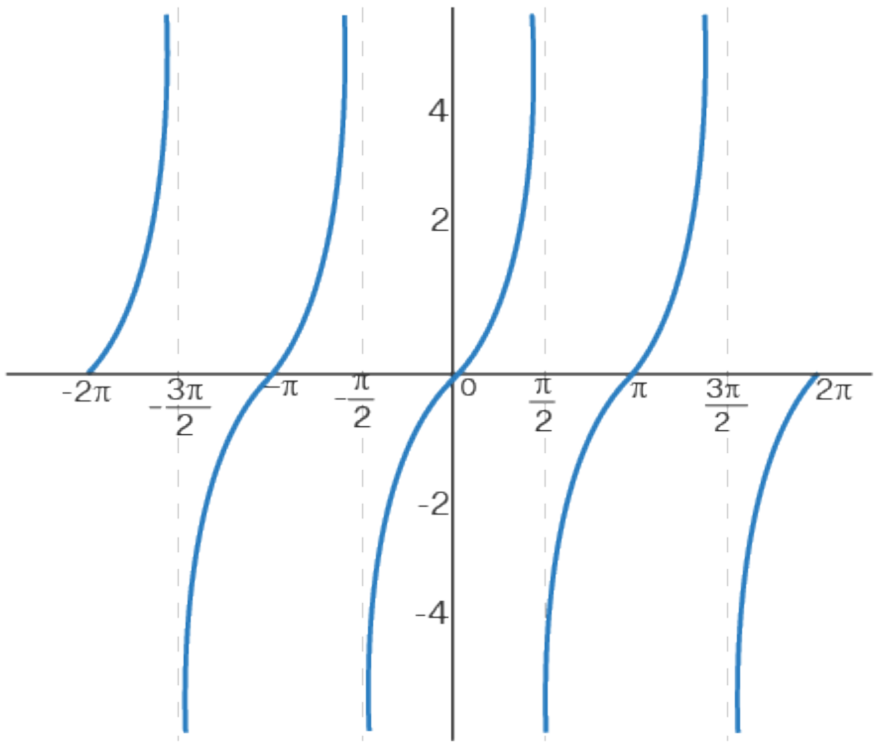
Trigonometrische Funktionen

Plotte $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ **in Abhängigkeit von** x

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Trigonometrische Funktionen

Plotte $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ **in Abhängigkeit von** x



Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

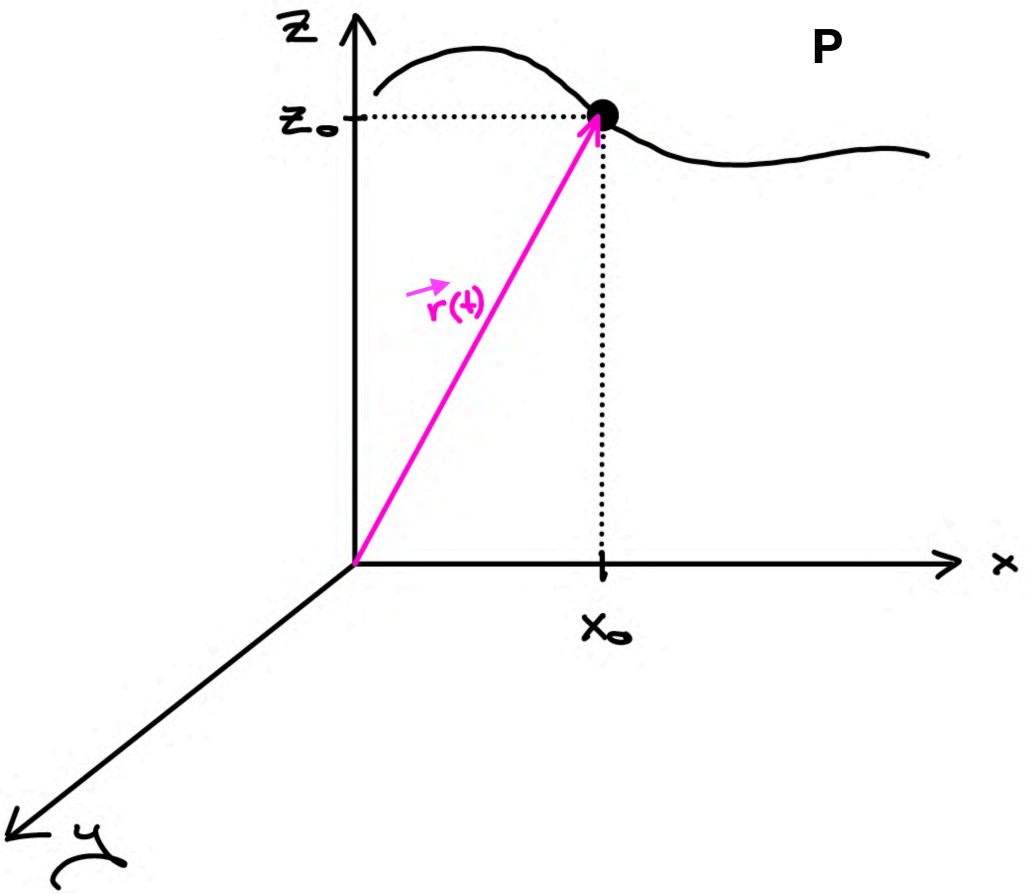
Trigonometrische Funktionen

$$
\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)\,, \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)\,, \\
\sin(2x) &= 2\sin(x) \cdot \cos(x)\,, \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\,, \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)}\,, \\
\sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\,, \\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\,, \\
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\,, \\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Vektoren

Der Punkt P hat die Koordinaten $(x_0, 0, z_0)$ **- die Linie vom Ursprung zum Punkt P nennt man auch den Vektor** $\vec{r}$

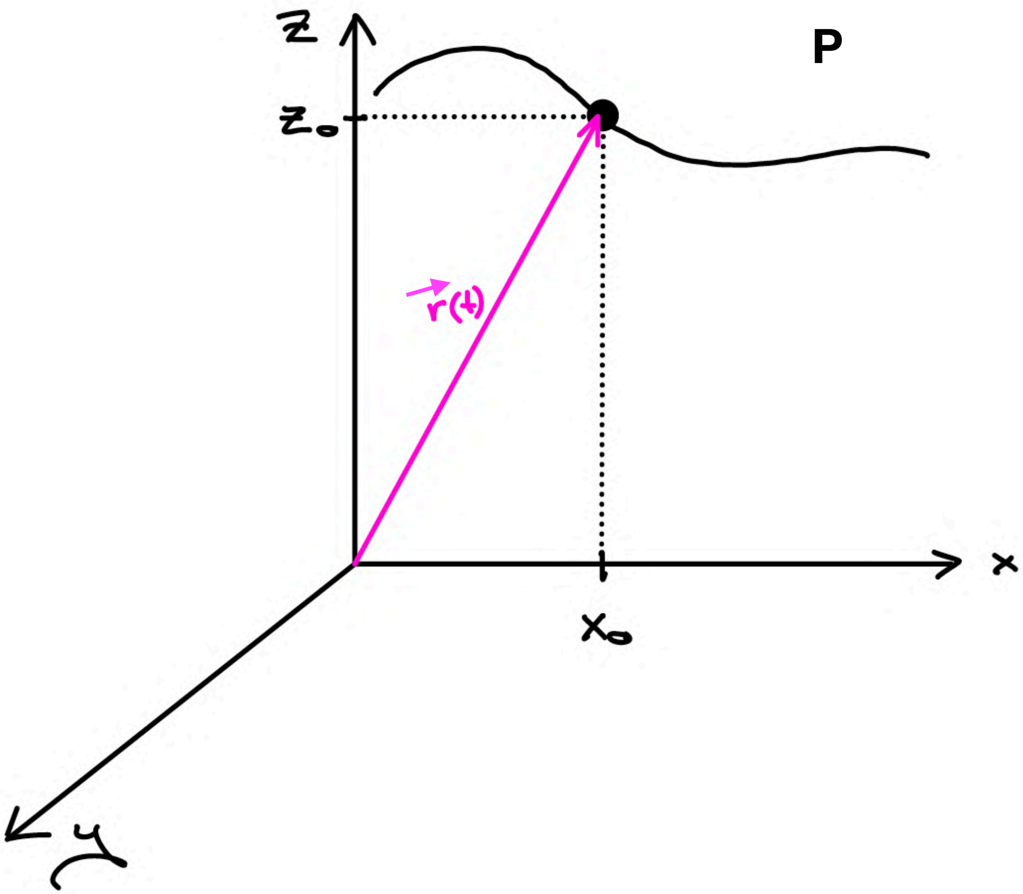


Man schreibt $\vec{r} = (x, y, z)$.

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Vektoren

Der Punkt P hat die Koordinaten $(x_0, 0, z_0)$ **- die Linie vom Ursprung zum Punkt P nennt man auch den Vektor** $\vec{r}$



Man schreibt $\vec{r} = (x, y, z)$**.**

Ein Vektor hat eine Länge

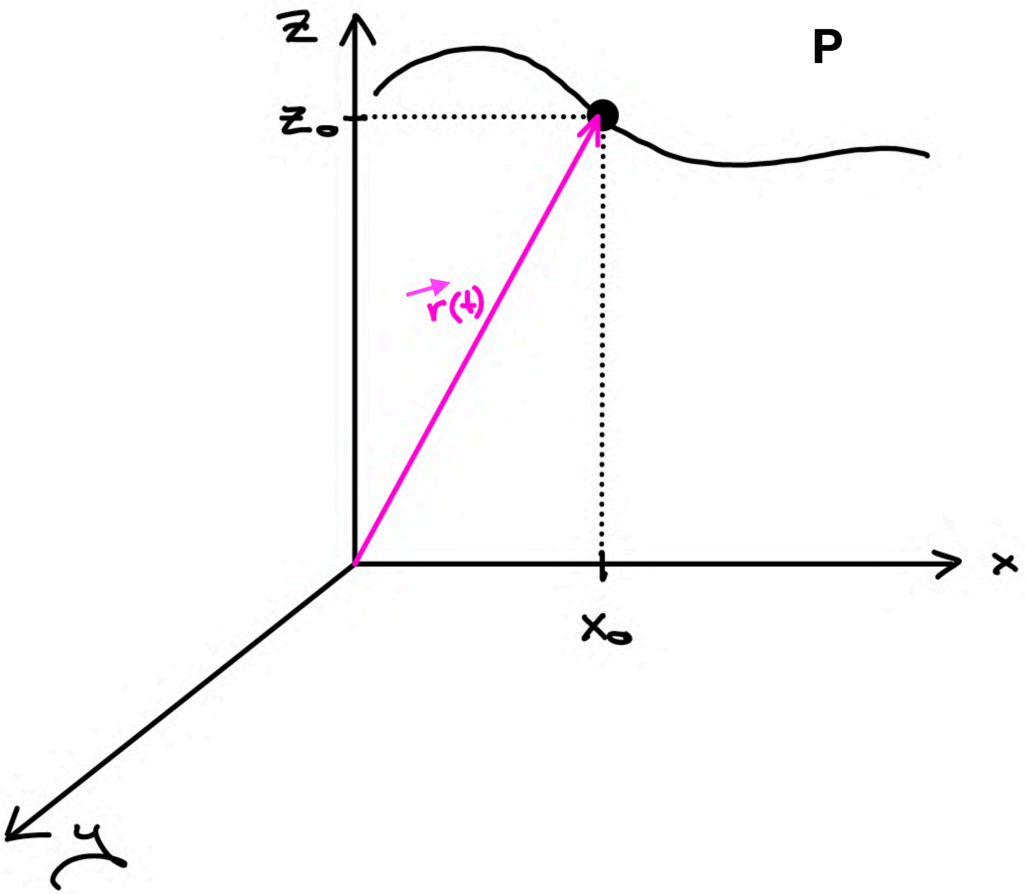
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und eine Richtung.

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Vektoren

Der Punkt P hat die Koordinaten $(x_0, 0, z_0)$ **- die Linie vom Ursprung zum Punkt P nennt man auch den Vektor** $\vec{r}$



Man schreibt $\vec{r} = (x, y, z)$**.**

Ein Vektor hat eine Länge

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und eine Richtung.

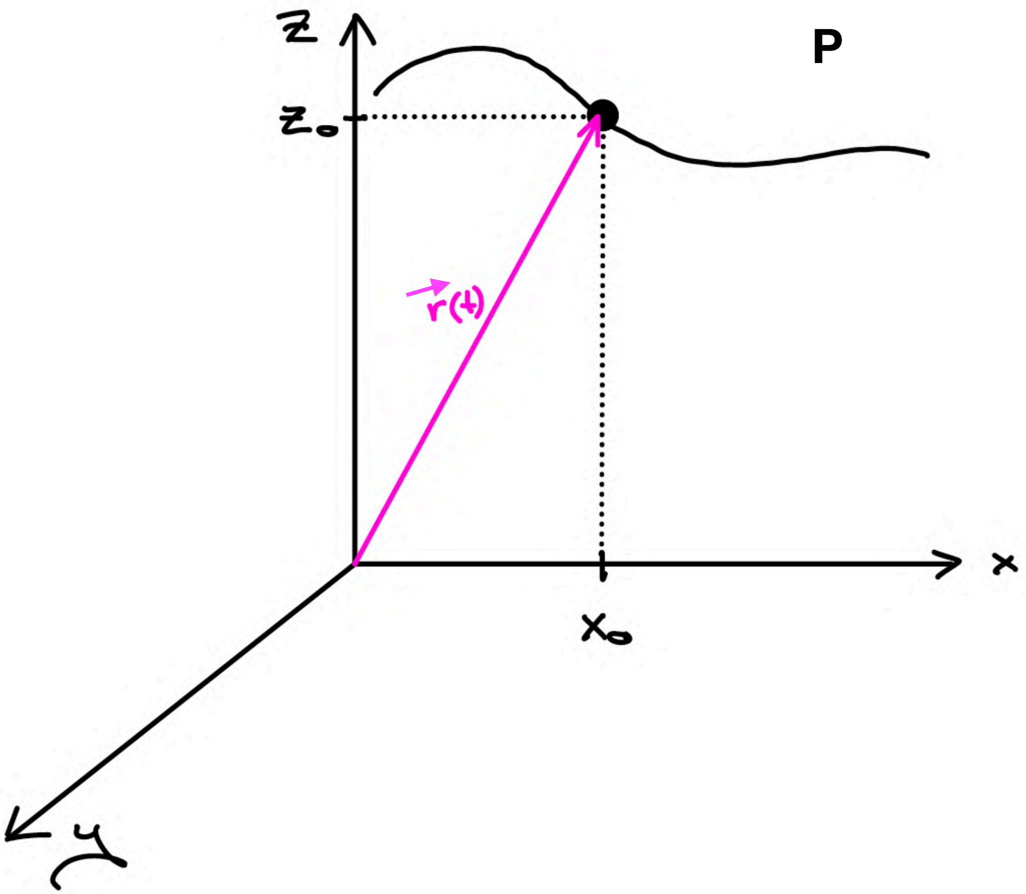
Vektoren kann man mit normalen Zahlen multiplizieren

$a\vec{r} = (ax, ay, az)$**.**

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Vektoren

Der Punkt P hat die Koordinaten $(x_0, 0, z_0)$ **- die Linie vom Ursprung zum Punkt P nennt man auch den Vektor** $\vec{r}$



Man schreibt $\vec{r} = (x, y, z)$**.**

Ein Vektor hat eine Länge

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und eine Richtung.

Vektoren kann man mit normalen Zahlen multiplizieren

$a\vec{r} = (ax, ay, az)$**.**

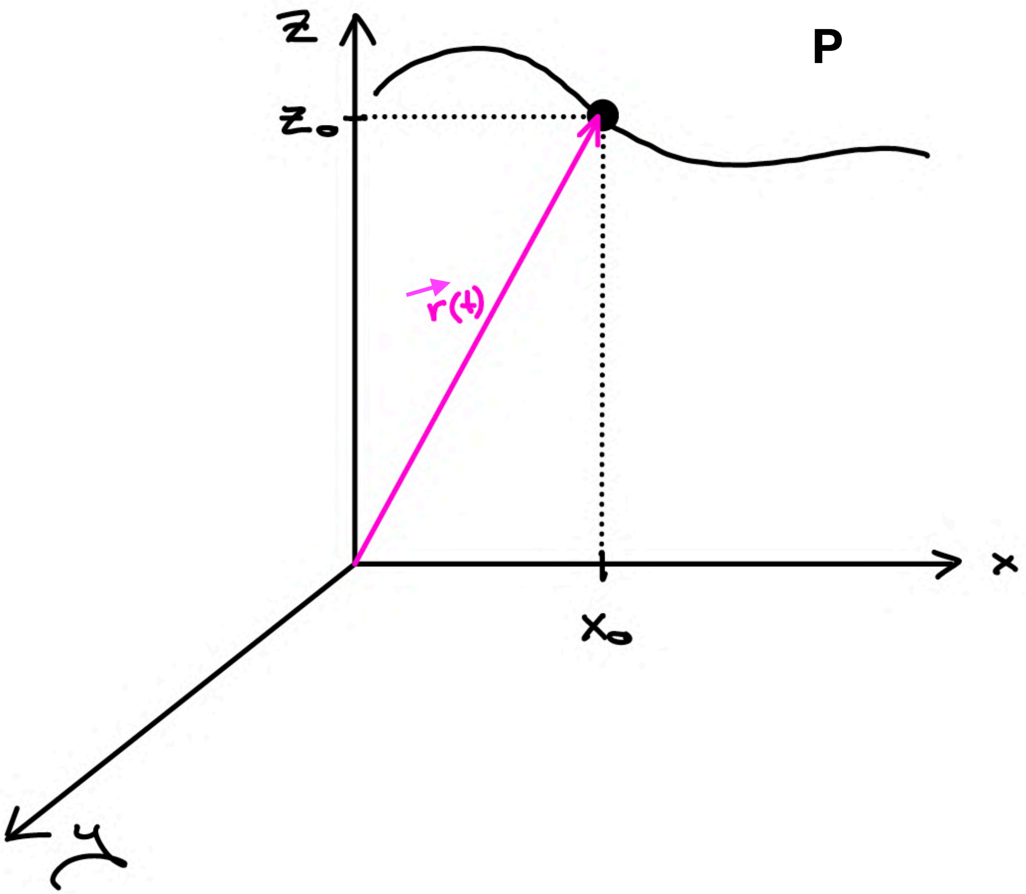
Vektoren werden addiert indem man ihre Komponenten addiert

$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$**.**

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Vektoren

Der Punkt P hat die Koordinaten $(x_0, 0, z_0)$ **- die Linie vom Ursprung zum Punkt P nennt man auch den Vektor** $\vec{r}$



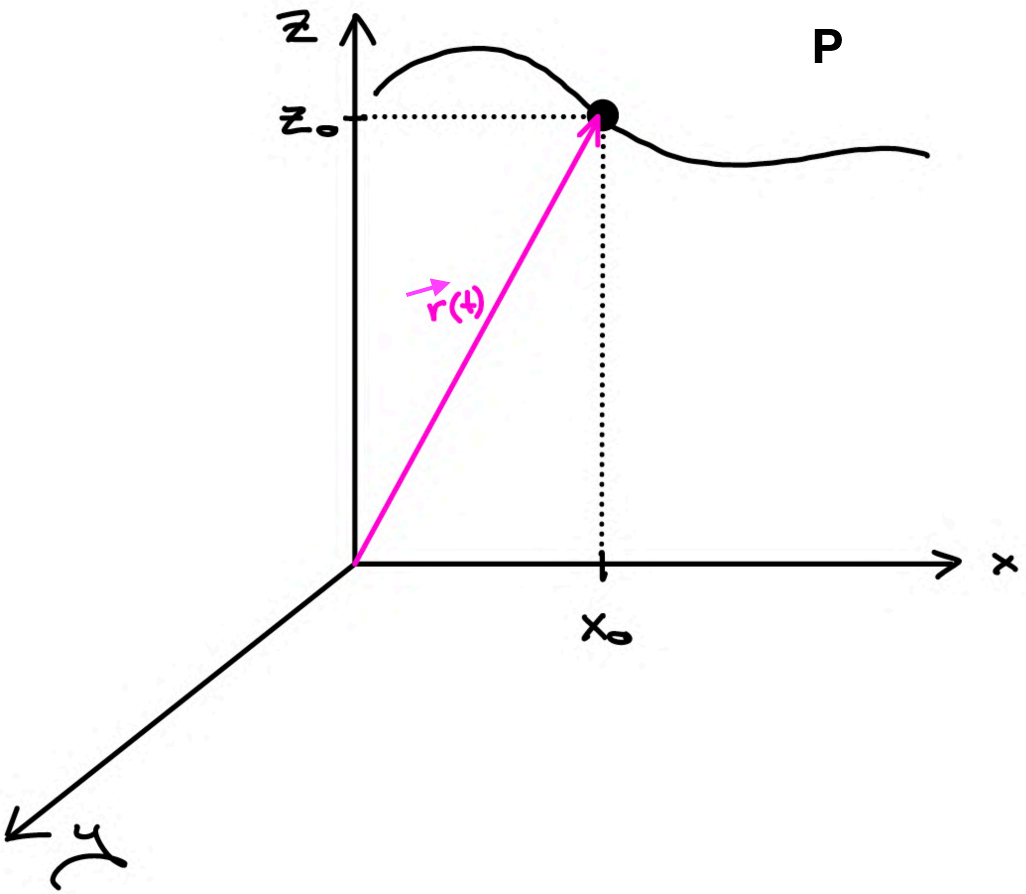
Vektoren kann man auch miteinander multiplizieren

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Vektoren

Der Punkt P hat die Koordinaten $(x_0, 0, z_0)$ - die Linie vom Ursprung zum Punkt P nennt man auch den Vektor $\vec{r}$



Vektoren kann man auch miteinander multiplizieren

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)$$

Man kann zeigen

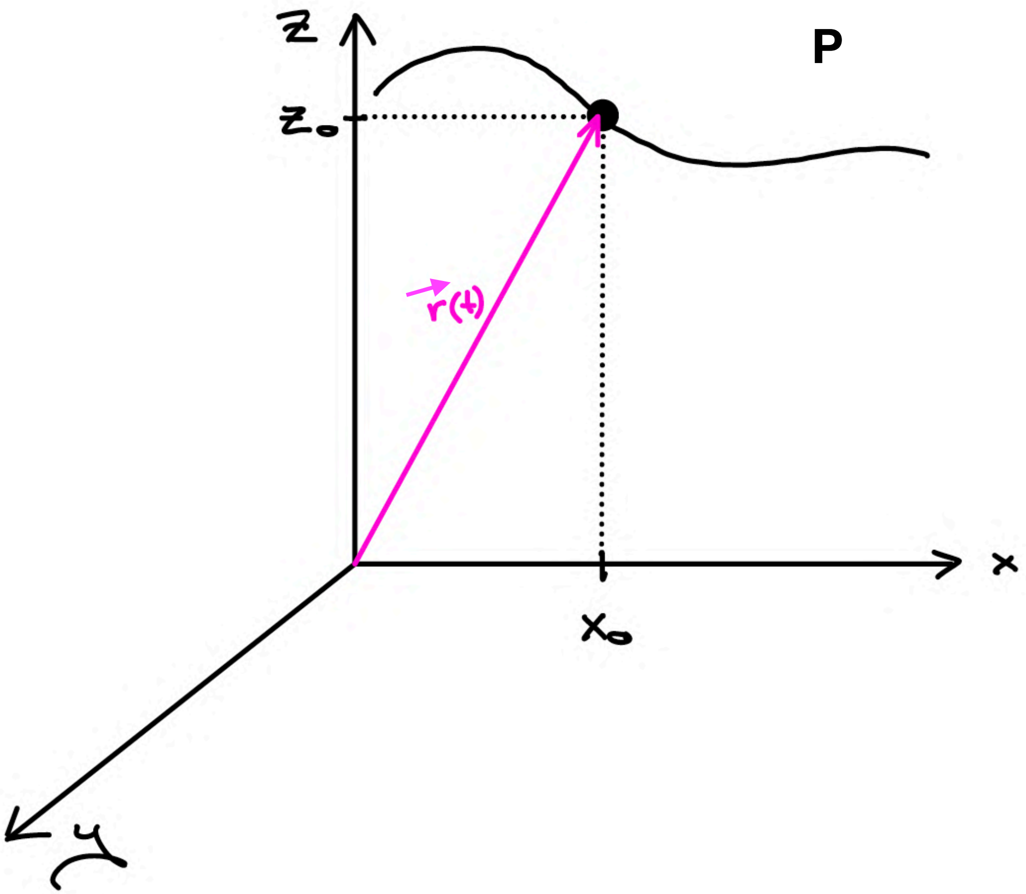
$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos\theta$$

wobei θ den Winkel zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ bezeichnet

Mathe: Koordinaten, Räume, Vektoren,...

Vektoren

Der Punkt P hat die Koordinaten $(x_0, 0, z_0)$ **- die Linie vom Ursprung zum Punkt P nennt man auch den Vektor** $\vec{r}$



Man kann die Koordinatenachsen durch folgende Vektoren Darstellen:

$\vec{e}_x = (1,0,0)$,

$\vec{e}_y = (0,1,0)$

$\vec{e}_z = (0,0,1)$

Damit gilt für einen beliebigen Vektor $\vec{r}$**:**

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Bewegung

Betrachte Änderungen von Ort, Geschwindigkeit,… bei kontinuierlich ablaufender Zeit

Bewegung

Betrachte Änderungen von Ort, Geschwindigkeit,… bei kontinuierlich ablaufender Zeit

Ziel der klassischen Mechanik: bestimme $\vec{x}(t)$ aus den Bewegungsgleichungen

Bewegung

Betrachte Änderungen von Ort, Geschwindigkeit,… bei kontinuierlich ablaufender Zeit

Ziel der klassischen Mechanik: bestimme $\vec{x}(t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$\Rightarrow \vec{v}(t)$ **Geschwindigkeit (velocity)**

Bewegung

Betrachte Änderungen von Ort, Geschwindigkeit,… bei kontinuierlich ablaufender Zeit

Ziel der klassischen Mechanik: bestimme $\vec{x}(t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$\Rightarrow$ $\vec{v}(t)$ **Geschwindigkeit (velocity)**

$\Rightarrow$ $\vec{a}(t)$ **Beschleunigung (acceleration)**

Bewegung

Betrachte Änderungen von Ort, Geschwindigkeit,… bei kontinuierlich ablaufender Zeit

Ziel der klassischen Mechanik: bestimme $\vec{x}(t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$\Rightarrow \vec{v}(t)$ **Geschwindigkeit (velocity)**

$\Rightarrow \vec{a}(t)$ **Beschleunigung (acceleration)**

Mathematik für kontinuierliche Änderungen: Differential/Infinitesimalrechnung

Bewegung

Betrachte Änderungen von Ort, Geschwindigkeit,… bei kontinuierlich ablaufender Zeit

Ziel der klassischen Mechanik: bestimme $\vec{x}(t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$\Rightarrow$ $\vec{v}(t)$ **Geschwindigkeit (velocity)**

$\Rightarrow$ $\vec{a}(t)$ **Beschleunigung (acceleration)**

Mathematik für kontinuierliche Änderungen: Differential/Infinitesimalrechnung

Grenzwert: betrachte die Folge von Zahlen

$$l_1, l_2, l_3, \ldots$$

Bewegung

Betrachte Änderungen von Ort, Geschwindigkeit,… bei kontinuierlich ablaufender Zeit

Ziel der klassischen Mechanik: bestimme $\vec{x}(t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$\Rightarrow$ $\vec{v}(t)$ **Geschwindigkeit (velocity)**

$\Rightarrow$ $\vec{a}(t)$ **Beschleunigung (acceleration)**

Mathematik für kontinuierliche Änderungen: Differential/Infinitesimalrechnung

Grenzwert: betrachte die Folge von Zahlen

$$l_1, l_2, l_3, \ldots$$

Beispiel: $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots$

Der Grenzwert dieser Folge ist 1

Bewegung

Betrachte Änderungen von Ort, Geschwindigkeit,… bei kontinuierlich ablaufender Zeit

Ziel der klassischen Mechanik: bestimme $\vec{x}(t)$ **aus den Bewegungsgleichungen**

$\Rightarrow$ $\vec{v}(t)$ **Geschwindigkeit (velocity)**

$\Rightarrow$ $\vec{a}(t)$ **Beschleunigung (acceleration)**

Mathematik für kontinuierliche Änderungen: Differential/Infinitesimalrechnung

Grenzwert: betrachte die Folge von Zahlen

$$l_1, l_2, l_3, \ldots$$

Beispiel: $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots$
Der Grenzwert dieser Folge ist 1

Formal schreibt man dafür $\lim_{i\to\infty} l_i = 1$

Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Betrachte eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$

Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Betrachte eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$

Zum Zeitpunkt t **besitzt die Funktion den Wert** $f(t)$

Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Betrachte eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$

Zum Zeitpunkt t **besitzt die Funktion den Wert** $f(t)$

Einen kleinen Zeitpunkt später bezeichnet wir mit $t + \Delta t$

Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Betrachte eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$

Zum Zeitpunkt t **besitzt die Funktion den Wert** $f(t)$

Einen kleinen Zeitpunkt später bezeichnet wir mit $t + \Delta t$

Der Funktionswert zu diesem kleinen Zeitpunkt später lautet $f(t + \Delta t)$

Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Betrachte eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$
Zum Zeitpunkt t **besitzt die Funktion den Wert** $f(t)$

Einen kleinen Zeitpunkt später bezeichnet wir mit $t + \Delta t$
Der Funktionswert zu diesem kleinen Zeitpunkt später lautet $f(t + \Delta t)$

Die Funktion hat sich im Zeitraum von t **nach** $t + \Delta t$ **um den Betrag**
$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ **geändert**

Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Betrachte eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$
Zum Zeitpunkt t **besitzt die Funktion den Wert** $f(t)$

Einen kleinen Zeitpunkt später bezeichnet wir mit $t + \Delta t$
Der Funktionswert zu diesem kleinen Zeitpunkt später lautet $f(t + \Delta t)$

Die Funktion hat sich im Zeitraum von t **nach** $t + \Delta t$ **um den Betrag**
$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ **geändert**

Die Rate dieser Änderung ist gegeben durch $\dfrac{\Delta f}{\Delta t}$ **(sieht aus wie** $\dfrac{0}{0}$**!)**

Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Betrachte eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$
Zum Zeitpunkt t **besitzt die Funktion den Wert** $f(t)$

Einen kleinen Zeitpunkt später bezeichnet wir mit $t + \Delta t$
Der Funktionswert zu diesem kleinen Zeitpunkt später lautet $f(t + \Delta t)$

Die Funktion hat sich im Zeitraum von t **nach** $t + \Delta t$ **um den Betrag** $\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ **geändert**

Die Rate dieser Änderung ist gegeben durch $\dfrac{\Delta f}{\Delta t}$ **(sieht aus wie** $\dfrac{0}{0}$**!)**

Definition: Die Ableitung der Funktion $f(t)$ **lautet**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

<u>Beispiele:</u>

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

d.h. die Ableitung von t^2 **ist** $2t$

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t+\Delta t) = (t+\Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

d.h. die Ableitung von t^2 **ist** $2t$

2. $f(t) = t^n$

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

d.h. die Ableitung von t^2 **ist** $2t$

2. $f(t) = t^n$ **: beachte** $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots. + b^n$

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

d.h. die Ableitung von t^2 **ist** $2t$

2. $f(t) = t^n$ **: beachte** $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots. + b^n$

und somit

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^n + nt^{n-1}\Delta t + \ldots + \Delta t^n - t^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (nt^{n-1} + \ldots \Delta t^{n-1}) = nt^{n-1}$$

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

d.h. die Ableitung von t^2 **ist** $2t$

2. $f(t) = t^n$ **: beachte** $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots. + b^n$

und somit

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^n + nt^{n-1}\Delta t + \ldots + \Delta t^n - t^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (nt^{n-1} + \ldots \Delta t^{n-1}) = nt^{n-1}$$

d.h. die Ableitung von t^n **ist** nt^{n-1}

$$\frac{d(t^3)}{dt} = 3t^2, \; \frac{d(1)}{dt} = \frac{d(t^0)}{dt} = 0, \; \frac{d(t^5)}{dt} = 5t^4, \; \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{d(t^{-1})}{dt} = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2}$$

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t+\Delta t) = (t+\Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

d.h. die Ableitung von t^2 **ist** $2t$

2. $f(t) = t^n$ **: beachte** $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots. + b^n$

und somit

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^n + nt^{n-1}\Delta t + \ldots + \Delta t^n - t^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (nt^{n-1} + \ldots \Delta t^{n-1}) = nt^{n-1}$$

d.h. die Ableitung von t^n **ist** nt^{n-1}

$$\frac{d(t^3)}{dt} = 3t^2, \ \frac{d(1)}{dt} = \frac{d(t^0)}{dt} = 0, \ \frac{d(t^5)}{dt} = 5t^4, \ \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{d(t^{-1})}{dt} = -\,t^{-2} = -\,\frac{1}{t^2}$$

3. **Spezielle Funktionen:**

$$\frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t\,, \ \frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t\,, \qquad \frac{d(e^t)}{dt} = e^t, \ \frac{d(\log t)}{dt} = \frac{1}{t}$$

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t) + g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t) + g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t) + g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)+g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

4. **Kettenregel:** $g = g(t)$ **und** $f = f(g)$

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)+g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

4. **Kettenregel: $g = g(t)$ und $f = f(g)$**

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}$$

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)+g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

4. **Kettenregel:** $g = g(t)$ **und** $f = f(g)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}$$

Beispiel: $f(t) = \log t^3$**?**

Rechenregeln für Ableitungen

1. Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:

$$\frac{d\left(f(t)+g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

4. Kettenregel: $g = g(t)$ **und** $f = f(g)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}$$

Beispiel: $f(t) = \log t^3$**? Ansatz:** $g(t) = t^3$ **und** $f(g) = \log g$

Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)+g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

4. **Kettenregel: $g = g(t)$ und $f = f(g)$**

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}$$

Beispiel: $f(t) = \log t^3$**? Ansatz:** $g(t) = t^3$ **und** $f(g) = \log g$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{g}3t^2 = \frac{1}{t^3}3t^2 = \frac{3}{t}$$

Rechenaufgaben für Ableitungen

Exercise 1: Calculate the derivatives of each of these functions.

$$f(t) = t^4 + 3t^3 - 12t^2 + t - 6$$
$$g(x) = \sin x - \cos x$$
$$\theta(\alpha) = e^{\alpha} + \alpha \ln \alpha$$
$$x(t) = \sin^2 x - \cos x$$

Exercise 2: The derivative of a derivative is called the second derivative and is written $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$. Take the second derivative of each of the functions listed above.

Exercise 3: Use the chain rule to find the derivatives of each of the following functions.

$$g(t) = \sin\left(t^2\right) - \cos\left(t^2\right)$$
$$\theta(\alpha) = e^{3\alpha} + 3\alpha\ln(3\alpha)$$
$$x(t) = \sin^2\left(t^2\right) - \cos\left(t^2\right)$$

Bewegung

In der klassischen Mechanik betrachten wir Massenpunkte

Bewegung

In der klassischen Mechanik betrachten wir Massenpunkte
Idealisierung - funktioniert aber gut, z.B. auch bei Planetenbewegung!

Bewegung

In der klassischen Mechanik betrachten wir Massenpunkte
Idealisierung - funktioniert aber gut, z.B. auch bei Planetenbewegung!

Die Position eines Massenpunktes zur Zeit t ist durch die Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ gegeben.

Bewegung

In der klassischen Mechanik betrachten wir Massenpunkte
Idealisierung - funktioniert aber gut, z.B. auch bei Planetenbewegung!

Die Position eines Massenpunktes zur Zeit t ist durch die Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ gegeben.

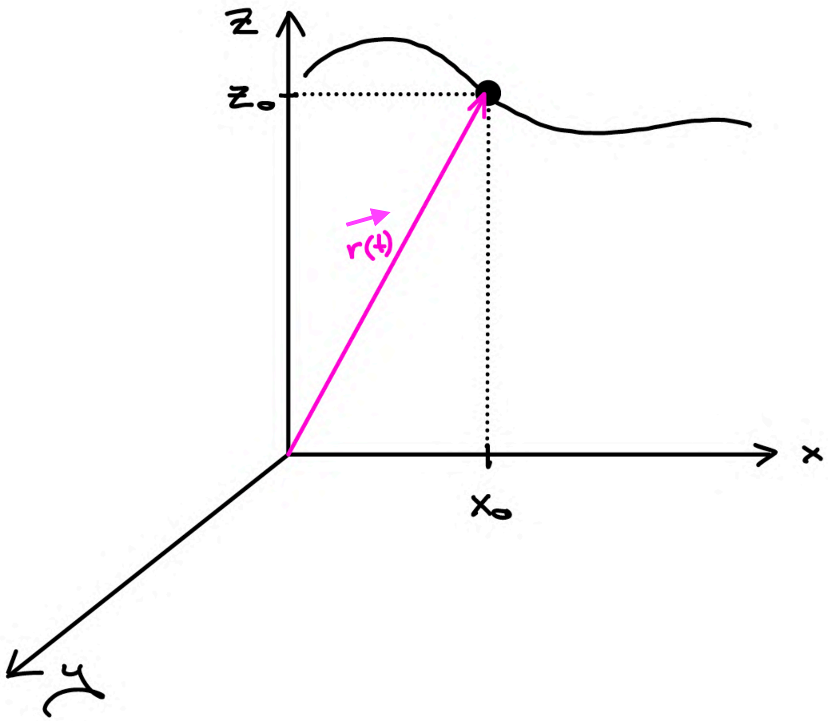
Dies kann auch durch den Vektor $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ dargestellt werden

Bewegung

In der klassischen Mechanik betrachten wir Massenpunkte
Idealisierung - funktioniert aber gut, z.B. auch bei Planetenbewegung!

Die Position eines Massenpunktes zur Zeit t ist durch die Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ gegeben.

Dies kann auch durch den Vektor $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ dargestellt werden



Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ wird auch als Trajektorie bezeichnet

Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Der Massenpunkt hat sich von t nach $t + \Delta t$ um folgende Verschiebung bewegt

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Der Massenpunkt hat sich von t nach $t + \Delta t$ um folgende Verschiebung bewegt

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Der Massenpunkt hat sich von t nach $t + \Delta t$ um folgende Verschiebung bewegt

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$$

Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Der Massenpunkt hat sich von t nach $t + \Delta t$ um folgende Verschiebung bewegt

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$
$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$
$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$$

Es gilt:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Der Massenpunkt hat sich von t nach $t + \Delta t$ um folgende Verschiebung bewegt

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$
$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$
$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$$

Es gilt:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Für die Geschwindigkeit gilt

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} =: \dot{x}$$

Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Der Massenpunkt hat sich von t nach $t + \Delta t$ um folgende Verschiebung bewegt

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$
$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$
$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$$

Es gilt:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Für die Geschwindigkeit gilt

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} =: \dot{x}$$
$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} =: \dot{y}$$

Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Der Massenpunkt hat sich von t nach $t + \Delta t$ um folgende Verschiebung bewegt

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$
$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$
$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$$

Es gilt:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Für die Geschwindigkeit gilt

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} =: \dot{x}$$
$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} =: \dot{y}$$
$$v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} =: \dot{z}$$

Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Der Massenpunkt hat sich von t nach $t + \Delta t$ um folgende Verschiebung bewegt

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$
$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$
$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$$

Es gilt:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Für die Geschwindigkeit gilt

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} =: \dot{x}$$
$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} =: \dot{y}$$
$$v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} =: \dot{z}$$

Der Geschwindigkeitsvektor lautet

$$\vec{v} = (v_x, v_y v_z)$$

Bewegung

Notation:

1. **Statt** x, y, z **benutzt man oft** x_i **mit** $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

Bewegung

Notation:

1. **Statt** x, y, z **benutzt man oft** x_i **mit** $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

   Damit erhält man z.B. $v_i = \dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$

Bewegung

Notation:

1. **Statt** x, y, z **benutzt man oft** x_i **mit** $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

   Damit erhält man z.B. $v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$

2. **Man schreibt auch** $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

Bewegung

Notation:

1. **Statt** x, y, z **benutzt man oft** x_i **mit** $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

   Damit erhält man z.B. $v_i = \dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$

2. **Man schreibt auch** $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

3. **Der Geschwindigkeitsvektor hat den Betrag** $\left|\vec{v}\right|$ **mit**

   $\left|\vec{v}\right|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$,

Bewegung

Notation:

1. **Statt** x, y, z **benutzt man oft** x_i **mit** $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

   Damit erhält man z.B. $v_i = \dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$

2. **Man schreibt auch** $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

3. **Der Geschwindigkeitsvektor hat den Betrag** $\left|\vec{v}\right|$ **mit**

   $\left|\vec{v}\right|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$**,**

4. **Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit**

   $a_i = \dfrac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i$ **,** $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$

Bewegung

Notation:

1. **Statt** x, y, z **benutzt man oft** x_i **mit** $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

   Damit erhält man z.B. $v_i = \dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$

2. **Man schreibt auch** $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

3. **Der Geschwindigkeitsvektor hat den Betrag** $\left|\vec{v}\right|$ **mit**

   $\left|\vec{v}\right|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$**,**

4. **Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit**

   $a_i = \dfrac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i$ **,** $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$ **und man schreibt auch**

   $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

Beispiel 1 für Bewegung

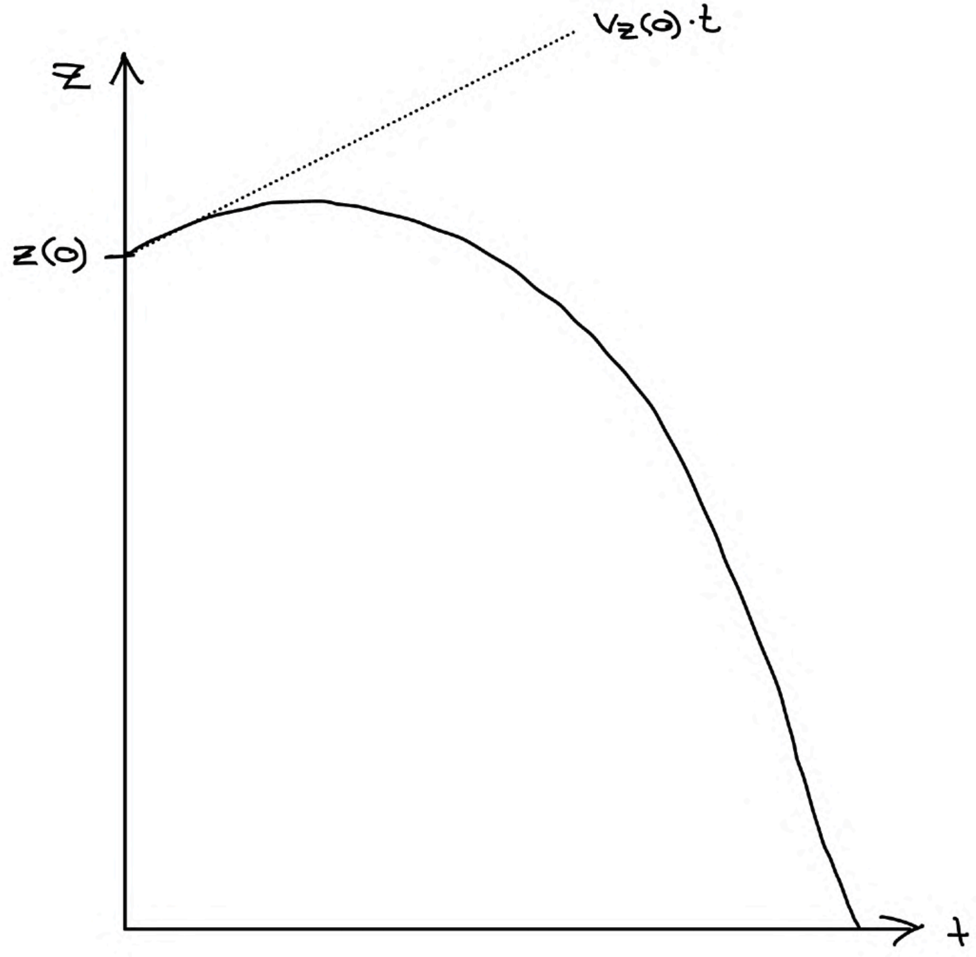
Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ sich wie folgt zu bewegen:

$x(t) = 0$ **,** $y(t) = 0$ **,** $z(t) = z(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$

Beispiel 1 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ sich wie folgt zu bewegen:

$$x(t) = 0\,,\ \ y(t) = 0\,,\ \ z(t) = z(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$$



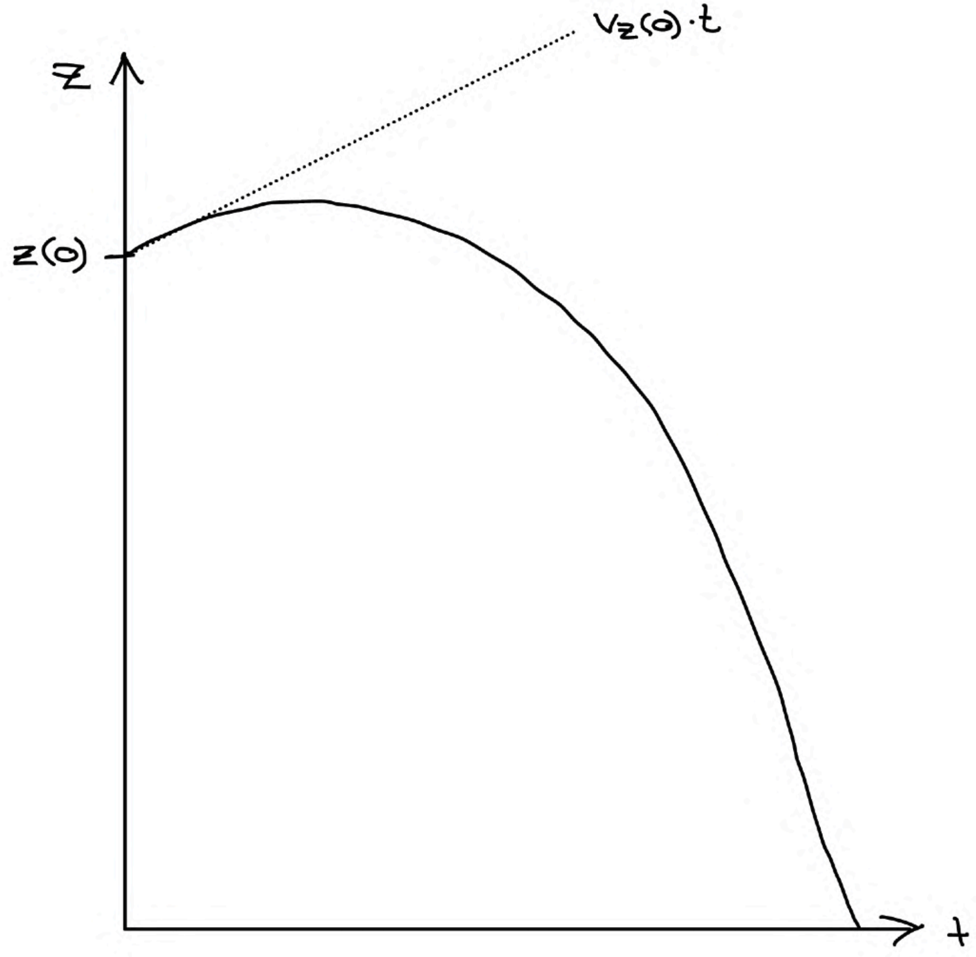
Beispiel 1 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ sich wie folgt zu bewegen:

$$x(t) = 0\,,\;\; y(t) = 0\,,\;\; z(t) = z(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = 0\,,\;\; v_y(t) = 0\,,\;\; v_z(t) = v(0) - gt$$



Beispiel 1 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ sich wie folgt zu bewegen:

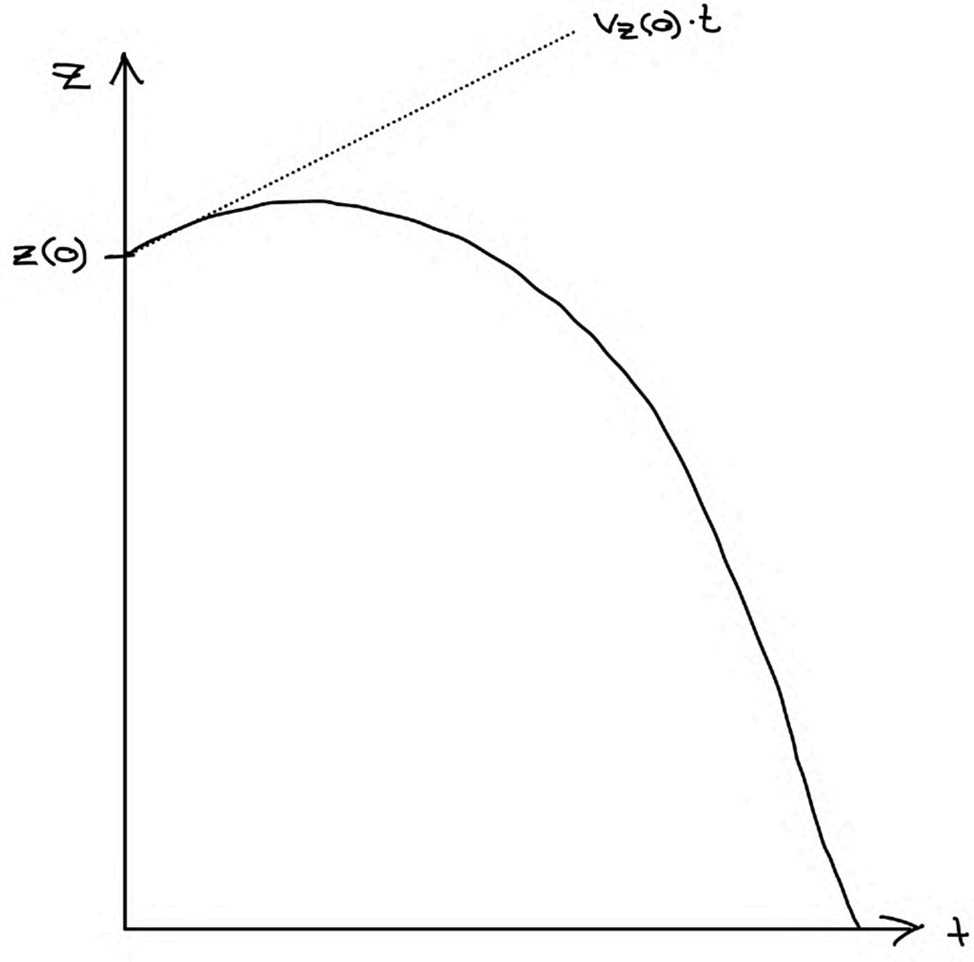
$$x(t) = 0\,,\;\; y(t) = 0\,,\;\; z(t) = z(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = 0\,,\;\; v_y(t) = 0\,,\;\; v_z(t) = v(0) - gt$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = 0\,,\;\; a_y(t) = 0\,,\;\; a_z(t) = -g$$



Beispiel 1 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ sich wie folgt zu bewegen:

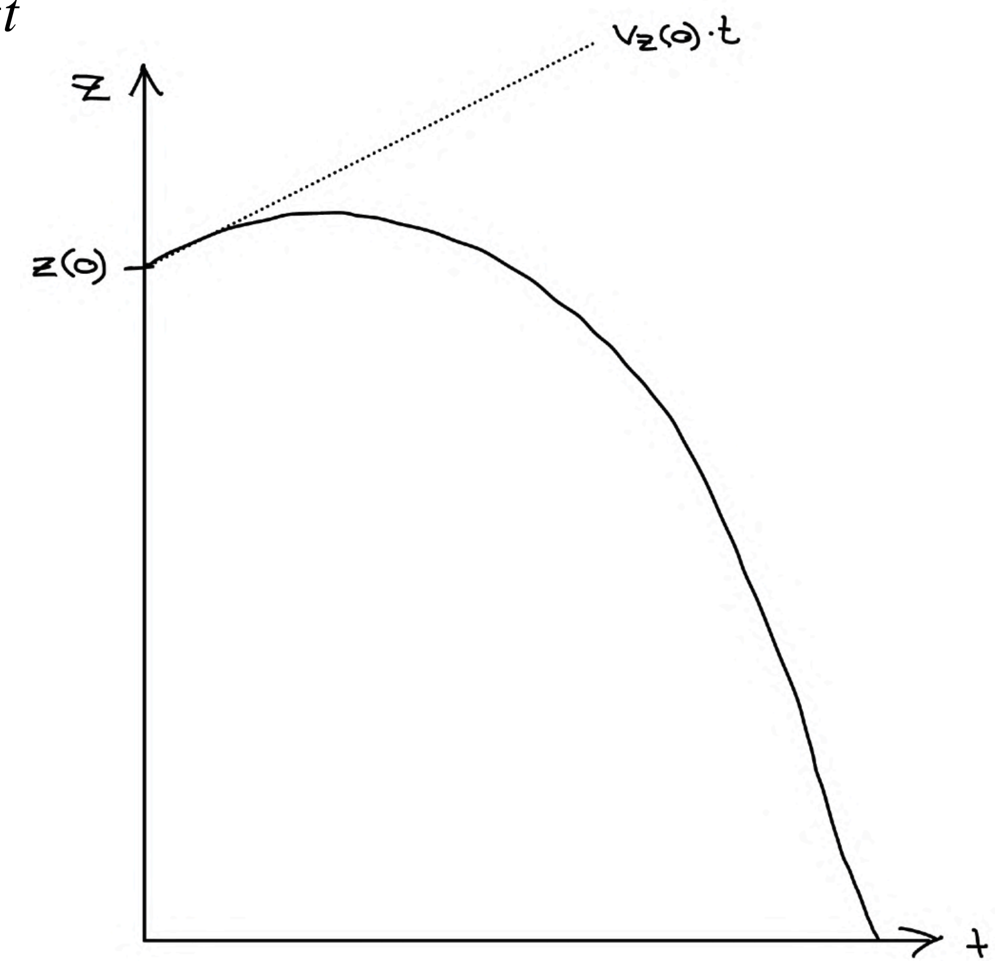
$$x(t) = 0\,,\;\; y(t) = 0\,,\;\; z(t) = z(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = 0\,,\;\; v_y(t) = 0\,,\;\; v_z(t) = v(0) - gt$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = 0\,,\;\; a_y(t) = 0\,,\;\; a_z(t) = -g$$



Der Wurf

Beispiel 2 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ in der x-Achse zu oszillieren:

$$x(t) = \sin(\omega t)\ ,$$

Beispiel 2 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ in der x-Achse zu oszillieren:

$$x(t) = \sin(\omega t)\,,$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = \omega \cos(\omega t)$$

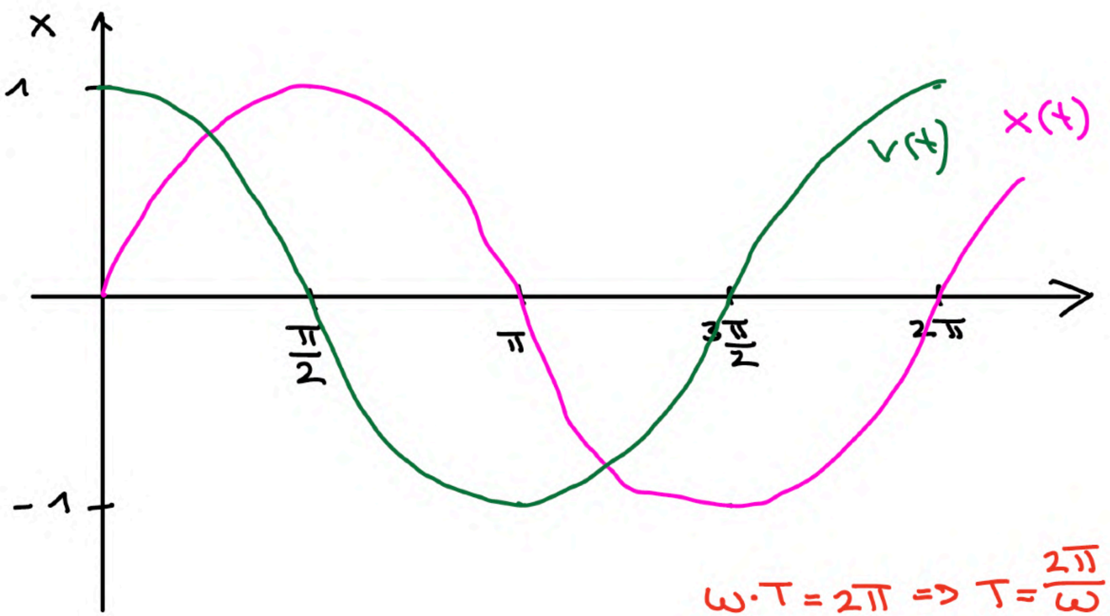
Beispiel 2 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ in der x-Achse zu oszillieren:

$$x(t) = \sin(\omega t)\,,$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = \omega\cos(\omega t)$$



$\omega \cdot T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

Beispiel 2 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ in der x-Achse zu oszillieren:

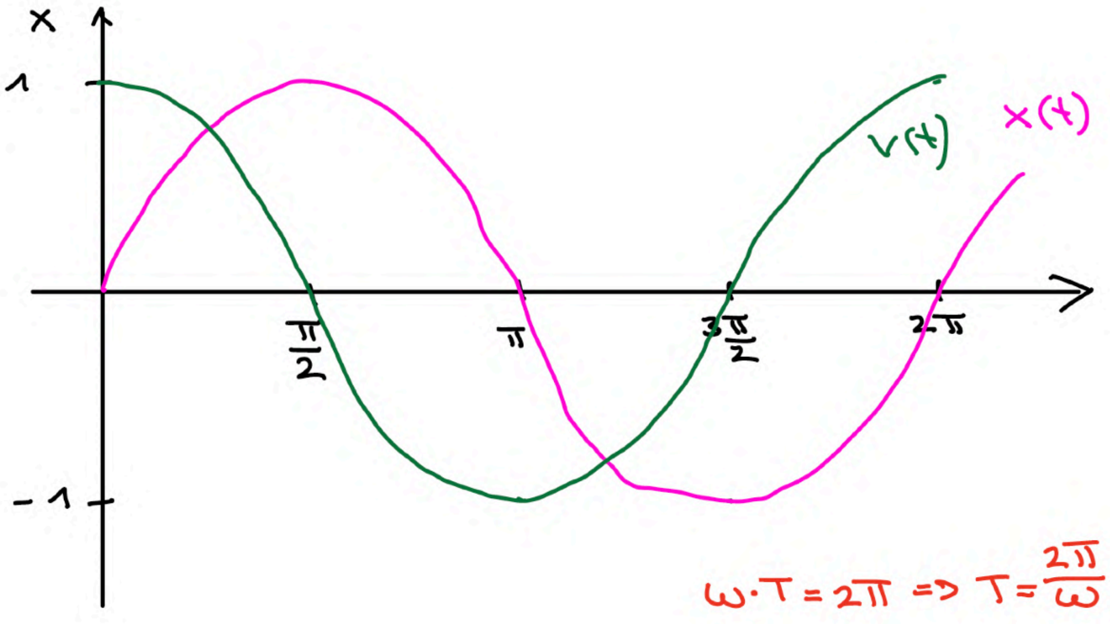
$$x(t) = \sin(\omega t)\,,$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = \omega \cos(\omega t)$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = -\,\omega^2 \sin(\omega t) = -\,\omega^2 x(t)$$



Beispiel 3 für Bewegung

Der Massenpunkt bewegt sich in der (x, y)- Ebene auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius R:

Beispiel 3 für Bewegung

Der Massenpunkt bewegt sich in der (x, y)- Ebene auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius R:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt am Punkt $(R,0)$:

Beispiel 3 für Bewegung

Der Massenpunkt bewegt sich in der (x, y)- Ebene auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius R:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt am Punkt $(R,0)$:

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

Beispiel 3 für Bewegung

Der Massenpunkt bewegt sich in der (x, y)- Ebene auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius R:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt am Punkt $(R,0)$:

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = -\omega R\sin(\omega t)$$
$$v_y(t) = \omega R\cos(\omega t)$$

Beispiel 3 für Bewegung

Der Massenpunkt bewegt sich in der (x, y)- Ebene auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius R:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt am Punkt $(R,0)$:

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = -\omega R\sin(\omega t)$$
$$v_y(t) = \omega R\cos(\omega t)$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$$
$$a_y(t) = -\omega^2 R\sin(\omega t)$$

Beispiel 3 für Bewegung

Der Massenpunkt bewegt sich in der (x, y)- Ebene auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius R:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt am Punkt $(R,0)$:

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = -\omega R\sin(\omega t)$$
$$v_y(t) = \omega R\cos(\omega t)$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$$
$$a_y(t) = -\omega^2 R\sin(\omega t)$$

d.h. $\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$

Aufgaben für Bewegung

Exercise 8: Calculate the velocity, speed, and acceleration for each of the following position vectors. If you have graphing software, plot each position vector, each velocity vector, and each acceleration vector.

$$\vec{r} = (\cos \omega t, e^{\omega t})$$

$$\vec{r} = (\cos(\omega t - \phi), \sin(\omega t - \phi))$$

$$\vec{r} = \left(c \cos^3 t, c \sin^3 t\right)$$

$$\vec{r} = (c(t - \sin t), c(1 - \cos t))$$

Ende 2. Vorlesung