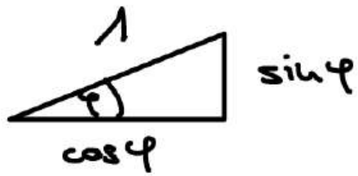
3. Vorlesung

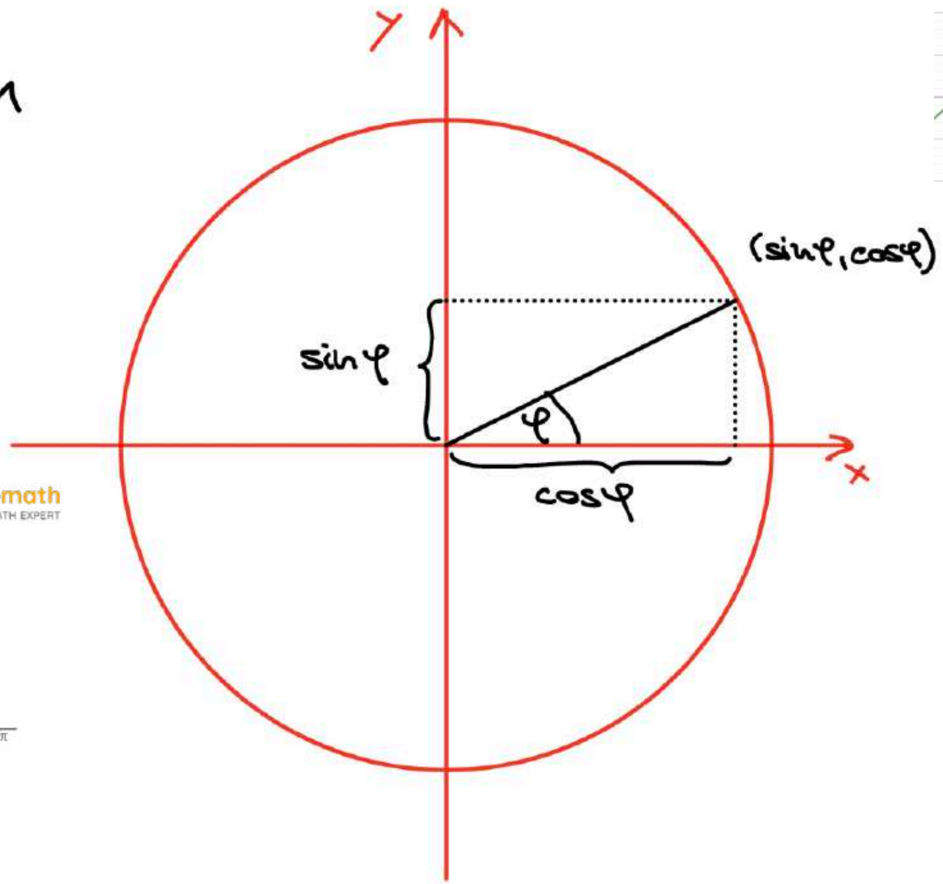
Wiederholung 2. Vorlesung

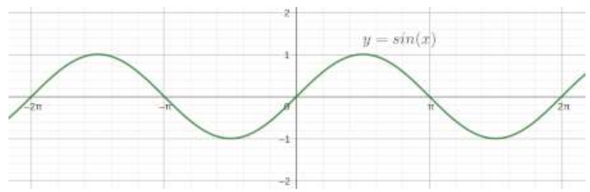
Trigonometrische Funktionen

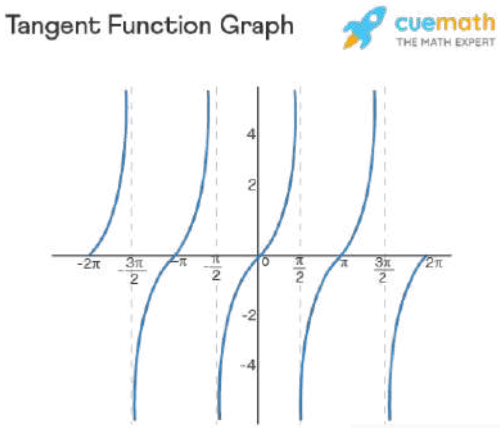


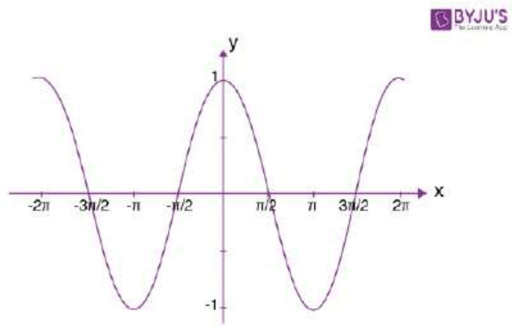
$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

φ beliebig



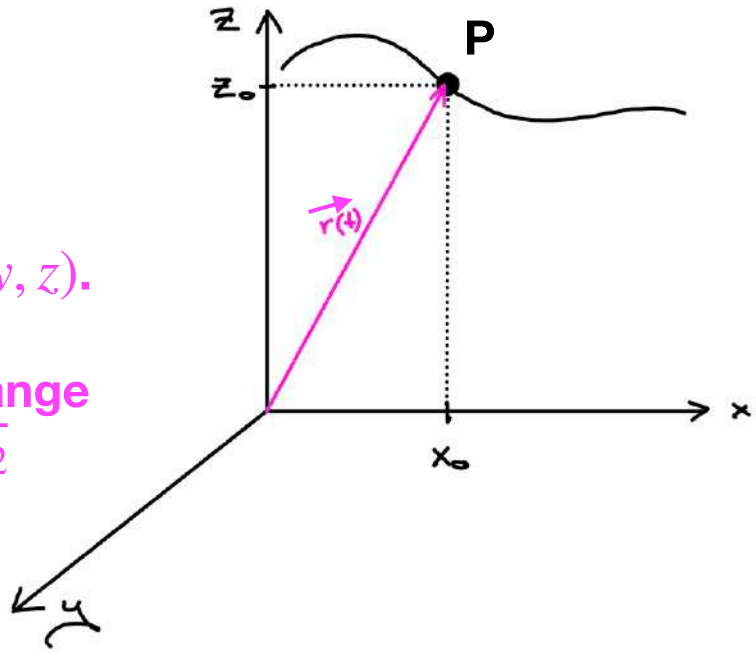






Wiederholung 2. Vorlesung: Vektoren,...

Der Punkt P hat die Koordinaten $(x_0, 0, z_0)$ - die Linie vom Ursprung zum Punkt P nennt man auch den Vektor $\vec{r}$



Man schreibt $\vec{r} = (x, y, z)$.

Ein Vektor hat eine Länge

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und eine Richtung.

Vektoren kann man mit normalen Zahlen multiplizieren

$a\vec{r} = (ax, ay, az)$.

Vektoren werden addiert indem man ihre Komponenten addiert

$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Man kann die Koordinatenachsen durch folgende Vektoren darstellen:

$\vec{e}_x = (1,0,0)$,

$\vec{e}_y = (0,1,0)$

$\vec{e}_z = (0,0,1)$

Damit gilt für einen beliebigen Vektor $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Wiederholung 2. Vorlesung: Bewegung

Betrachte Änderungen von Ort, Geschwindigkeit,… bei kontinuierlich ablaufender Zeit

Ziel der klassischen Mechanik: bestimme $\vec{x}(t)$ **aus den Bewegungsgleichungen**

$\Rightarrow$ $\vec{v}(t)$ **Geschwindigkeit (velocity)**

$\Rightarrow$ $\vec{a}(t)$ **Beschleunigung (acceleration)**

Mathematik für kontinuierliche Änderungen: Differential/Infinitesimalrechnung

Grenzwert: betrachte die Folge von Zahlen

$$l_1, l_2, l_3, \ldots$$

Beispiel: $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \ldots$
Der Grenzwert dieser Folge ist 1

Formal schreibt man dafür $\lim_{i \to \infty} l_i = 1$

Wiederholung 2. Vorlesung: Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Betrachte eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$
Zum Zeitpunkt t **besitzt die Funktion den Wert** $f(t)$

Einen kleinen Zeitpunkt später bezeichnet wir mit $t + \Delta t$
Der Funktionswert zu diesem kleinen Zeitpunkt später lautet $f(t + \Delta t)$

Die Funktion hat sich im Zeitraum von t **nach** $t + \Delta t$ **um den Betrag**
$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ **geändert**

Die Rate dieser Änderung ist gegeben durch $\dfrac{\Delta f}{\Delta t}$ **(sieht aus wie** $\dfrac{0}{0}$**!)**

Definition: Die Ableitung der Funktion $f(t)$ **lautet**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Wiederholung 2. Vorlesung: Ableitung

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t+\Delta t) = (t+\Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

d.h. die Ableitung von t^2 **ist** $2t$

2. $f(t) = t^n$ **: beachte** $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots. + b^n$

und somit

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^n + nt^{n-1}\Delta t + \ldots + \Delta t^n - t^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (nt^{n-1} + \ldots \Delta t^{n-1}) = nt^{n-1}$$

d.h. die Ableitung von t^n **ist** nt^{n-1}

$$\frac{d(t^3)}{dt} = 3t^2, \quad \frac{d(1)}{dt} = \frac{d(t^0)}{dt} = 0, \quad \frac{d(t^5)}{dt} = 5t^4, \quad \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{d(t^{-1})}{dt} = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2}$$

3. **Spezielle Funktionen:**

$$\frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t, \quad \frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t, \qquad \frac{d(e^t)}{dt} = e^t, \quad \frac{d(\log t)}{dt} = \frac{1}{t}$$

Wiederholung 2. Vorlesung: Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t) + g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

4. **Kettenregel:** $g = g(t)$ **und** $f = f(g)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}$$

Beispiel: $f(t) = \log t^3$**? Ansatz:** $g(t) = t^3$ **und** $f(g) = \log g$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{g}3t^2 = \frac{1}{t^3}3t^2 = \frac{3}{t}$$

Wiederholung 2. Vorlesung: Bewegung

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich der Massenpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \big(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)\big)$$

Der Massenpunkt hat sich von t nach $t + \Delta t$ um folgende Verschiebung bewegt

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$$

Es gilt:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Für die Geschwindigkeit gilt

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} =: \dot{x}$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} =: \dot{y}$$

$$v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} =: \dot{z}$$

Der Geschwindigkeitsvektor lautet

$$\vec{v} = (v_x, v_y v_z)$$

Wiederholung 2. Vorlesung: Bewegung

Notation:

1. **Statt** x, y, z **benutzt man oft** x_i **mit** $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

   Damit erhält man z.B. $v_i = \dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$

2. **Man schreibt auch** $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

3. **Der Geschwindigkeitsvektor hat den Betrag** $\left|\vec{v}\right|$ **mit**

   $\left|\vec{v}\right|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$,

4. **Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit**

   $a_i = \dfrac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i$, $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$ **und man schreibt auch**

   $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

Wiederholung 2. Vorlesung: Beispiel 1 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ sich wie folgt zu bewegen:

$$x(t) = 0\,,\;\; y(t) = 0\,,\;\; z(t) = z(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

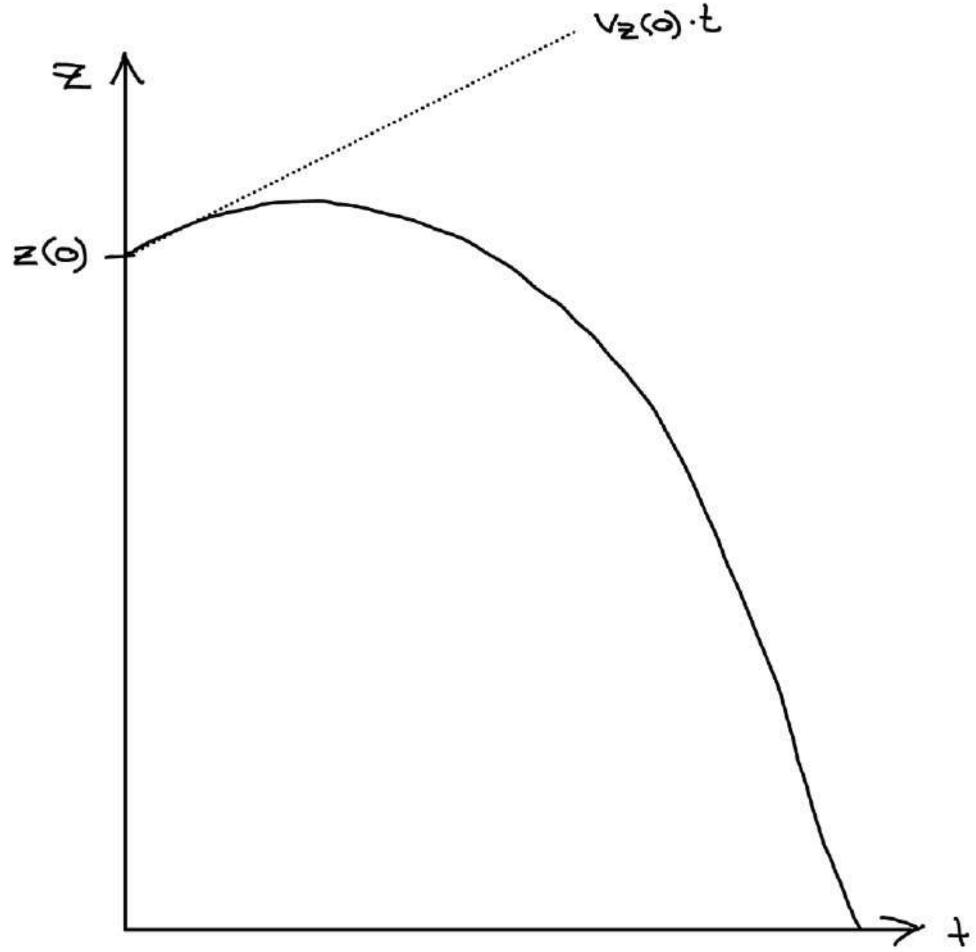
Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = 0\,,\;\; v_y(t) = 0\,,\;\; v_z(t) = v(0) - gt$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = 0\,,\;\; a_y(t) = 0\,,\;\; a_z(t) = -g$$

Der Wurf



Wiederholung 2. Vorlesung: Beispiel 2 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ in der x-Achse zu oszillieren:

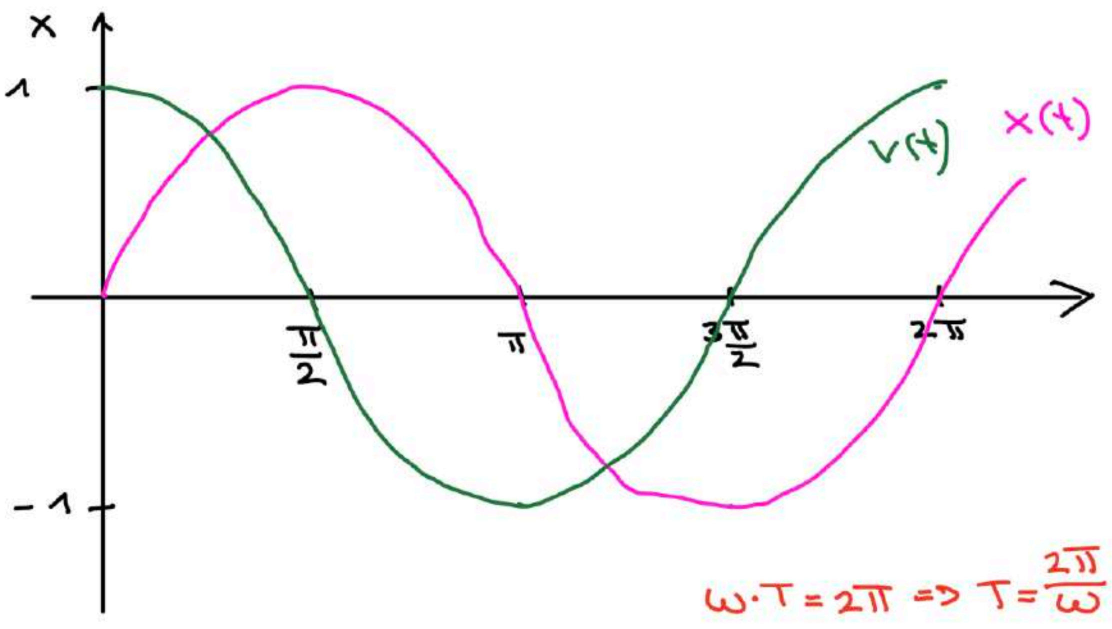
$$x(t) = \sin(\omega t)\,,$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = \omega \cos(\omega t)$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = -\,\omega^2 \sin(\omega t) = -\,\omega^2 x(t)$$



Wiederholung 2. Vorlesung: Beispiel 3 für Bewegung

Der Massenpunkt bewegt sich in der (x, y)- Ebene auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius R:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt am Punkt $(R,0)$:

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = -\omega R\sin(\omega t)$$
$$v_y(t) = \omega R\cos(\omega t)$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$$
$$a_y(t) = -\omega^2 R\sin(\omega t)$$

d.h. $\vec{a} = -\omega^2\vec{x}$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Wenn man die Ableitung $\frac{df(t)}{dt}$ **kennt, kann man daraus die Funktion** $f(t)$ **bestimmen?**

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

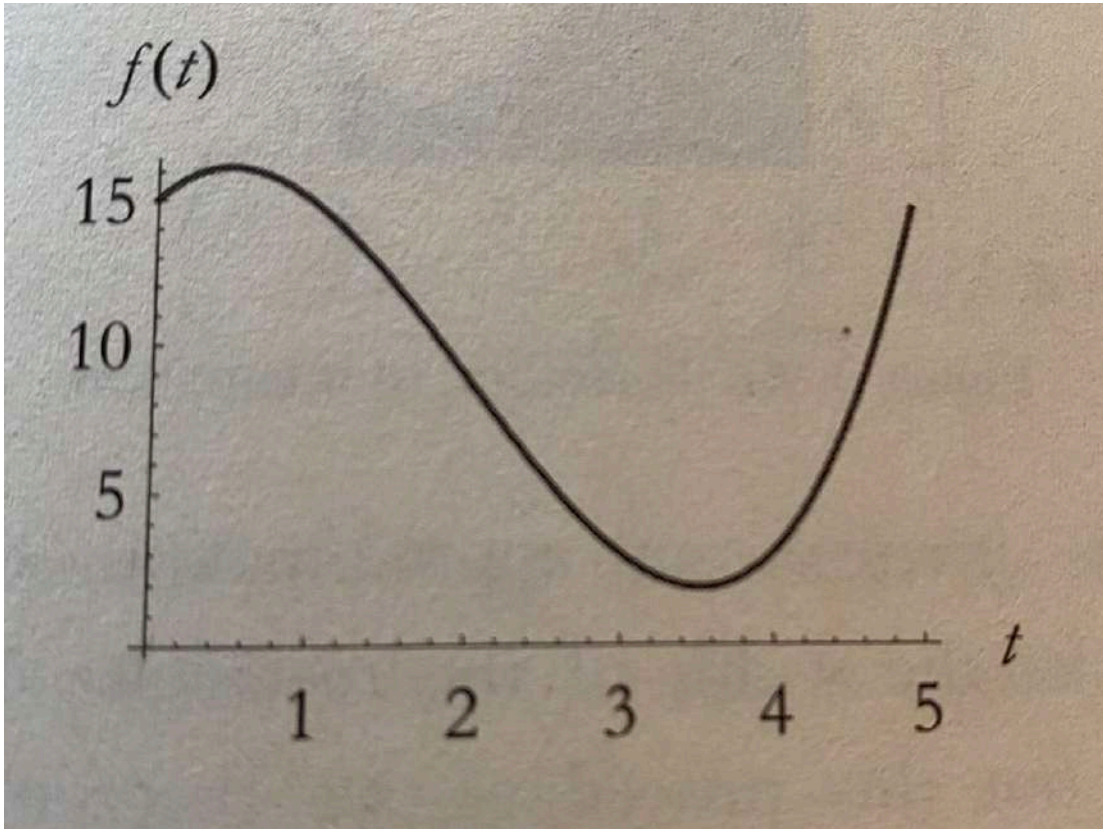
Wenn man die Ableitung $\frac{df(t)}{dt}$ kennt, kann man daraus die Funktion $f(t)$ bestimmen?

Betrachte eine beliebige Funktion $f(t)$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Wenn man die Ableitung $\frac{df(t)}{dt}$ kennt, kann man daraus die Funktion $f(t)$ bestimmen?

Betrachte eine beliebige Funktion $f(t)$



Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Betrachten wir erstmal eine scheinbar völlig unterschiedliche Frage?

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

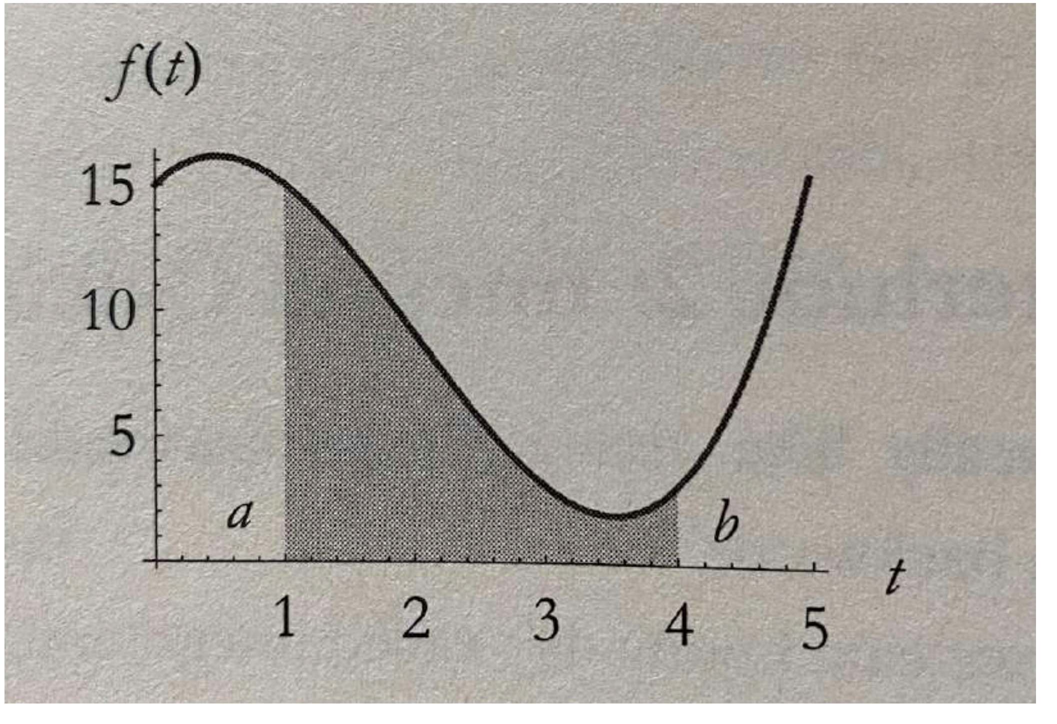
Betrachten wir erstmal eine scheinbar völlig unterschiedliche Frage?

Wie groß ist die Fläche unterhalb der Funktion $f(t)$ beginnend beim Punkt $t = a$ und endend beim Punkt $t = b$?

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Betrachten wir erstmal eine scheinbar völlig unterschiedliche Frage?

Wie groß ist die Fläche unterhalb der Funktion $f(t)$ beginnend beim Punkt $t = a$ und endend beim Punkt $t = b$?



Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Um diese Frage zu beantworten teilen wir die Fläche in N kleine Rechtecke der Breite Δt , Höhe $f(t)$ und Fläche $\Delta A = f(t)\Delta t$ auf

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

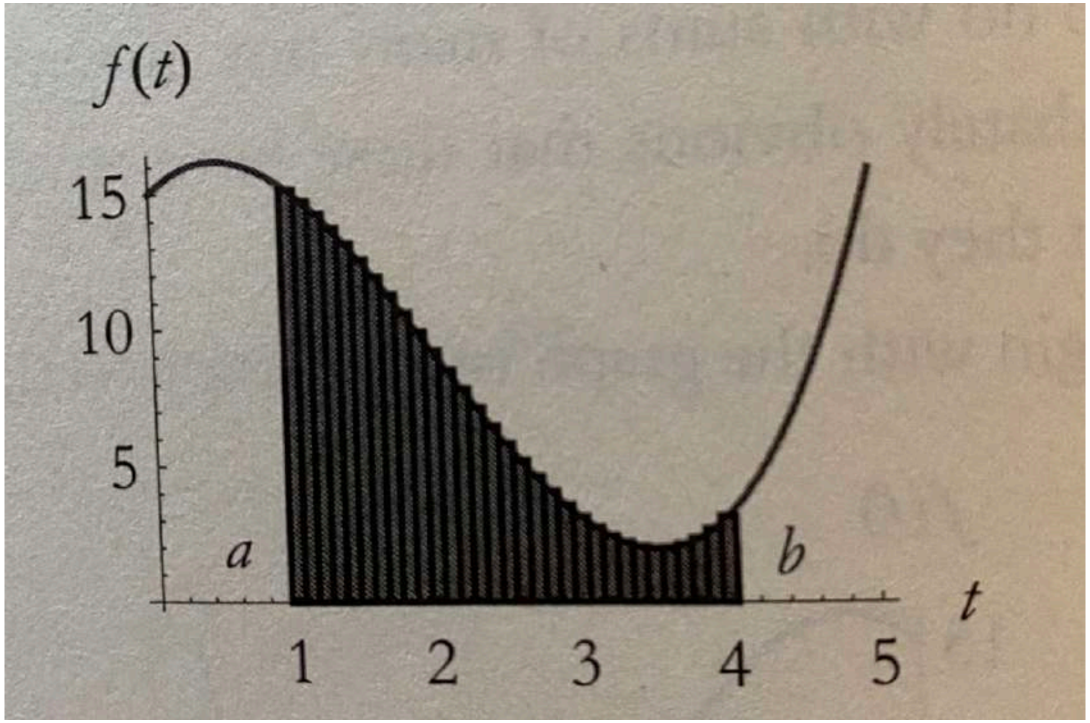
Um diese Frage zu beantworten teilen wir die Fläche in N kleine Rechtecke der Breite Δt , Höhe $f(t)$ und Fläche $\Delta A = f(t)\Delta t$ auf und summieren diese Flächen zur Gesamtfläche A auf

$$A = \sum_i f(t_i)\Delta t$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Um diese Frage zu beantworten teilen wir die Fläche in N kleine Rechtecke der Breite Δt , Höhe $f(t)$ und Fläche$\Delta A = f(t)\Delta t$ auf und summieren diese Flächen zur Gesamtfläche A auf

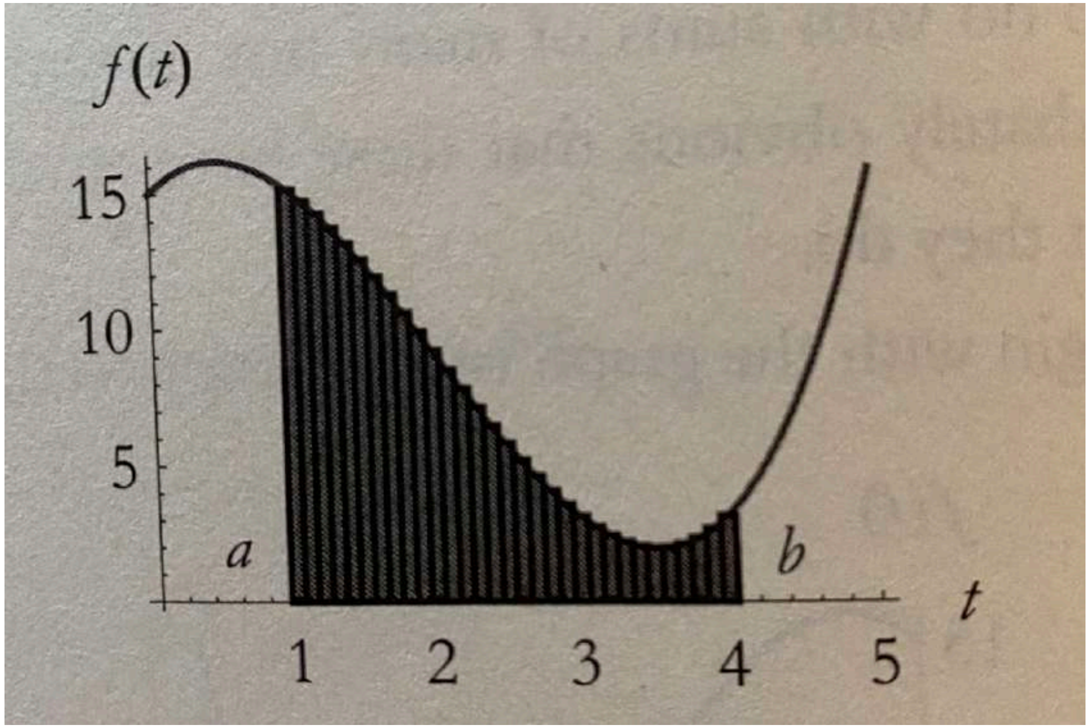
$$A = \sum_i f(t_i)\Delta t$$



Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Zum Beispiel $N = 3$:

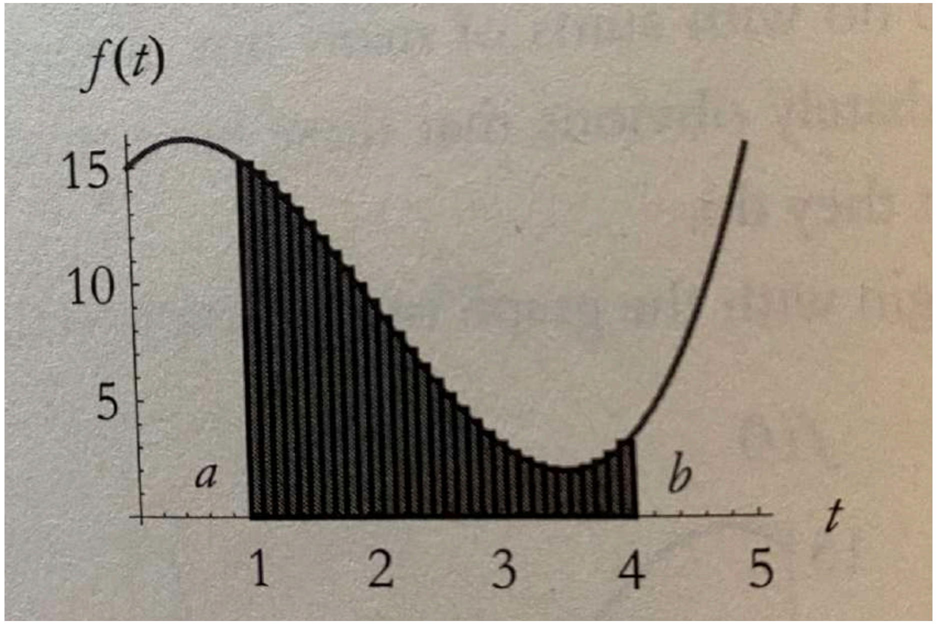
$$A = \sum_i f(t_i)\Delta t = f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t$$

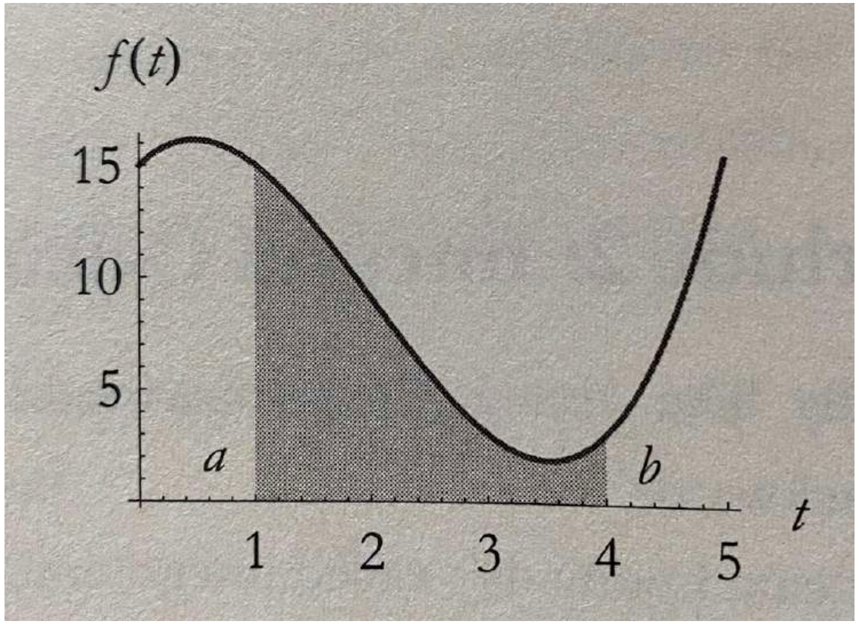


Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Die exakte Fläche erhalten wir, wenn wir den Grenzwert $\Delta t \to 0$ bilden:

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i)\Delta t \qquad \equiv \qquad \int_a^b f(t)dt$$





Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Die exakte Fläche erhalten wir, wenn wir den Grenzwert $\Delta t \to 0$ bilden:

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i) \Delta t$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Die exakte Fläche erhalten wir, wenn wir den Grenzwert $\Delta t \to 0$ bilden:

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i)\Delta t \qquad \equiv \qquad \int_a^b f(t)dt$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Die exakte Fläche erhalten wir, wenn wir den Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$ bilden:

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i) \Delta t \qquad \equiv \qquad \int_a^b f(t) dt$$

Das Integralzeichen ersetzt das Summationszeichen

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Die exakte Fläche erhalten wir, wenn wir den Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$ bilden:

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i) \Delta t \qquad \equiv \qquad \int_a^b f(t) dt$$

Das Integralzeichen ersetzt das Summationszeichen

Der Grenzwert von Δt wird mit dt bezeichnet

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Die exakte Fläche erhalten wir, wenn wir den Grenzwert $\Delta t \to 0$ bilden:

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i)\Delta t \qquad \equiv \qquad \int_a^b f(t)dt$$

Das Integralzeichen ersetzt das Summationszeichen

Der Grenzwert von Δt wird mit dt bezeichnet

Die Funktion $f(t)$ wird als Integrand bezeichnet

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Als Nächstes betrachten wir die Funktion $F(T)$:

$$F(T) = \int_a^T f(t)dt$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Als Nächstes betrachten wir die Funktion $F(T)$:

$$F(T) = \int_a^T f(t)dt$$

Oft schreibt man etwas schlampig

$$F(t) = \int f(t)dt$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Beweis: $$F(T + \Delta T) = \int_a^{T+\Delta T} f(t)dt$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Beweis: $$F(T+\Delta T) = \int_a^{T+\Delta T} f(t)dt$$

Das bedeutet wir haben ein Rechteck hinzugefügt

$$F(T+\Delta T) - F(T) = f(t)\Delta T$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Beweis: $$F(T + \Delta T) = \int_a^{T+\Delta T} f(t)dt$$

Das bedeutet wir haben ein Rechteck hinzugefügt

$$F(T + \Delta T) - F(T) = f(t)\Delta T$$

und damit

$$\frac{F(T + \Delta T) - F(T)}{\Delta T} = f(t)$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Beweis: $$F(T + \Delta T) = \int_a^{T+\Delta T} f(t)dt$$

Das bedeutet wir haben ein Rechteck hinzugefügt

$$F(T + \Delta T) - F(T) = f(t)\Delta T$$

und damit

$$\frac{F(T + \Delta T) - F(T)}{\Delta T} = f(t)$$

Im Grenzfall $\Delta T \to 0$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Beweis: $$F(T + \Delta T) = \int_a^{T+\Delta T} f(t)dt$$

Das bedeutet wir haben ein Rechteck hinzugefügt

$$F(T + \Delta T) - F(T) = f(t)\Delta T$$

und damit

$$\frac{F(T + \Delta T) - F(T)}{\Delta T} = f(t)$$

Im Grenzfall $\Delta T \to 0$

$$f(t) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{F(T + \Delta T) - F(T)}{\Delta T} = \frac{dF(T)}{dT} \equiv \frac{dF(t)}{dt} \qquad \square$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Kann $F(T)$ eindeutig bestimmt werden?

Nein nur bis auf eine Konstante

Beispiele:

1. $f(t) = t^n$:

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Kann $F(T)$ eindeutig bestimmt werden?

Nein nur bis auf eine Konstante

Beispiele:

1. $f(t) = t^n$:

$$F(t) = \int f(t)dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = t^n$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Kann $F(T)$ eindeutig bestimmt werden?

Nein nur bis auf eine Konstante

Beispiele:

1. $f(t) = t^n$:

$$F(t) = \int f(t)dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = t^n$$

Ausprobieren: es gilt $\frac{dt^m}{dt} = mt^{m-1}$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Kann $F(T)$ eindeutig bestimmt werden?

Nein nur bis auf eine Konstante

Beispiele:

1. $f(t) = t^n$:

$$F(t) = \int f(t)dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = t^n$$

Ausprobieren: es gilt $\frac{dt^m}{dt} = mt^{m-1}$

damit gilt weiter ($m = n + 1$) $\frac{dt^{n+1}}{dt} = (n+1)t^n$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Kann $F(T)$ eindeutig bestimmt werden?

Nein nur bis auf eine Konstante

Beispiele:

1. $f(t) = t^n$:

$$F(t) = \int f(t)dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = t^n$$

Ausprobieren: es gilt $\frac{dt^m}{dt} = mt^{m-1}$

damit gilt weiter ($m = n + 1$) $\frac{dt^{n+1}}{dt} = (n+1)t^n$

Und schliesslich $\frac{d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)}{dt} = t^n$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Kann $F(T)$ eindeutig bestimmt werden?

Nein nur bis auf eine Konstante

Beispiele:

1. $f(t) = t^n$:

$$F(t) = \int f(t)dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = t^n$$

Ausprobieren: es gilt $\frac{dt^m}{dt} = mt^{m-1}$

damit gilt weiter $(m = n + 1)$ $\frac{dt^{n+1}}{dt} = (n+1)t^n$

Und schliesslich $\frac{d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)}{dt} = t^n$

Somit haben wir gefunden $F(t) = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Kann $F(T)$ eindeutig bestimmt werden?

Nein nur bis auf eine Konstante

Beispiele:

1. $f(t) = t^n$:

$$F(t) = \int f(t)dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = t^n$$

Ausprobieren: es gilt $\frac{dt^m}{dt} = mt^{m-1}$

damit gilt weiter $(m = n + 1)$ $\frac{dt^{n+1}}{dt} = (n+1)t^n$

Und schliesslich $\frac{d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)}{dt} = t^n$

Somit haben wir gefunden

$$F(t) = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \boxed{+\, c}$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Sind Ober- und Untergrenze des Integrals festgelegt, dann spricht man von einem bestimmten Integral

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Hier hebt sich die unbekannte Konstante raus

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

4. $$\int \sin t \, dt = -\cos t + c$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

4. $$\int \sin t \, dt = -\cos t + c$$

5. $$\int \cos t \, dt = \sin t + c$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

4. $$\int \sin t \, dt = -\cos t + c$$

5. $$\int \cos t \, dt = \sin t + c$$

6. $$\int e^t \, dt = e^t + c$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

4. $$\int \sin t \, dt = -\cos t + c$$

5. $$\int \cos t \, dt = \sin t + c$$

6. $$\int e^t \, dt = e^t + c$$

7. $$\int \frac{dt}{t} = \ln t + c$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

4. $$\int \sin t \, dt = -\cos t + c$$

5. $$\int \cos t \, dt = \sin t + c$$

6. $$\int e^t \, dt = e^t + c$$

7. $$\int \frac{dt}{t} = \ln t + c$$

8. $$\int a f(t) dt = a \int f(t) dt$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

4. $$\int \sin t \, dt = -\cos t + c$$

5. $$\int \cos t \, dt = \sin t + c$$

6. $$\int e^t \, dt = e^t + c$$

7. $$\int \frac{dt}{t} = \ln t + c$$

8. $$\int a f(t) dt = a \int f(t) dt$$

9. $$\int \left[f(t) \pm g(t) \right] dt = \int f(t) dt \pm \int g(t) dt$$

Umkehrung des Ableitens: Integrieren

Übungen für Integrale

Exercise 1: Determine the indefinite integral of each of the following expressions by reversing the process of differentiation and adding a constant.

$f(t) = t^4$

$f(t) = \cos t$

$f(t) = t^2 - 2$

Exercise 2: Use the fundamental theorem of calculus to evaluate each integral from Exercise 1 with limits of integration being $t = 0$ to $t = T$.

Exercise 3: Treat the expressions from Exercise 1 as expressions for the acceleration of a particle. Integrate them once, with respect to time, and determine the velocities, and a second time to determine the trajectories. Because we will use t as one of the limits of integration we will adopt the dummy integration variable t'. Integrate them from $t' = 0$ to $t' = t$.

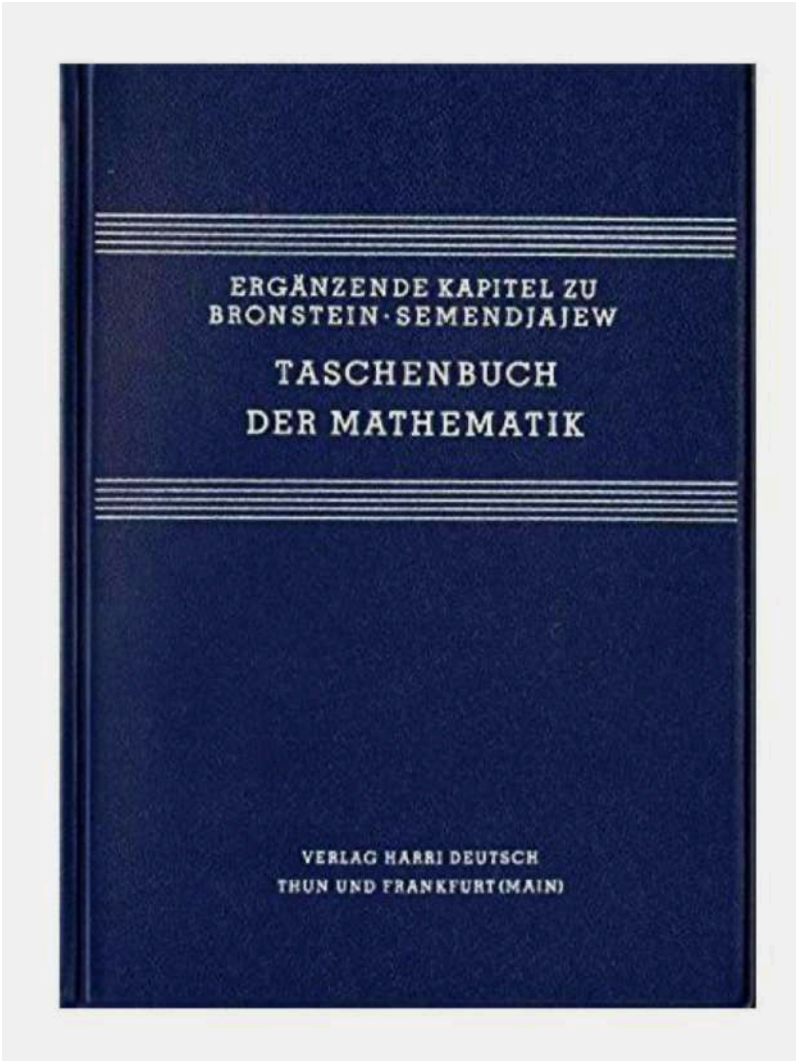
$v(t) = \int_0^t t'^4 \, dt'$

$v(t) = \int_0^t \cos t' \, dt'$

$v(t) = \int_0^t \left(t'^2 - 2\right) dt'$

Masterclass: Integrieren

Es gibt große Formelsammlungen

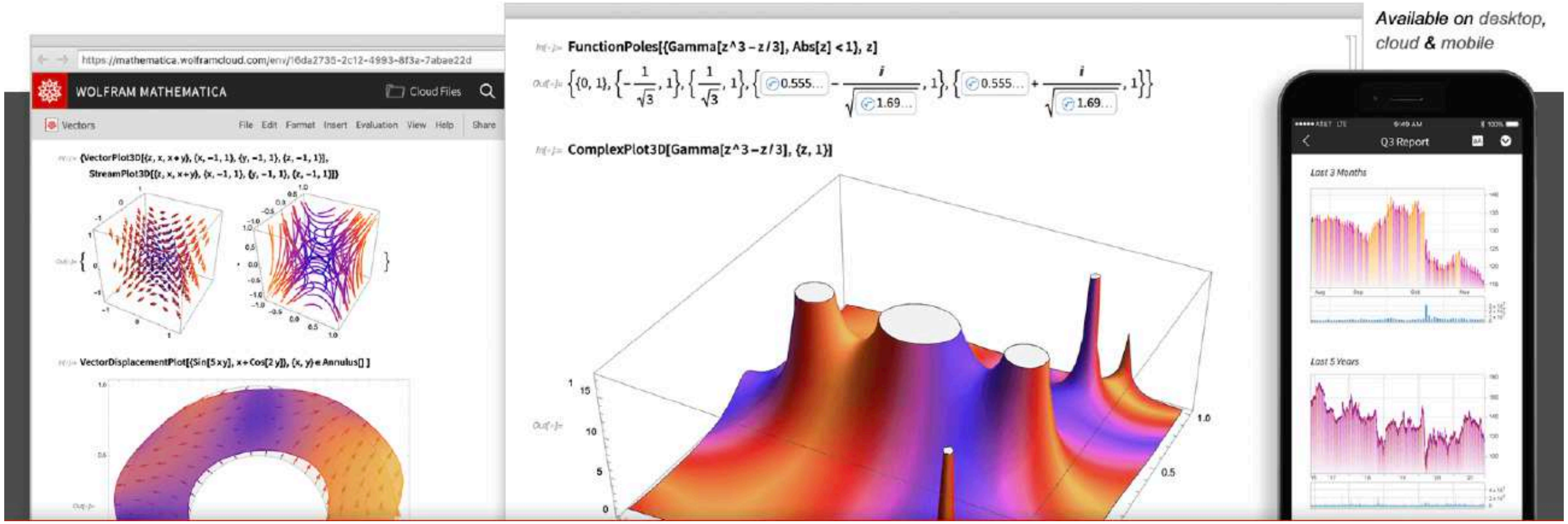


Masterclass: Integrieren

Es gibt große Formelsamlungen
Computerprogramme wie Mathematica können integrieren

WOLFRAM MATHEMATICA

The world's definitive system for modern technical computing



Masterclass: Integrieren

Partielle Integration

Ein wichtiger Standard Trick

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

Masterclass: Integrieren

Partielle Integration

Ein wichtiger Standard Trick

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

$$\int_a^b \frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt} + \int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

Masterclass: Integrieren

Partielle Integration

Ein wichtiger Standard Trick

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

$$\int_a^b \frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt} + \int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

$$f(t)g(t)\Big|_a^b = \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt} + \int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

Masterclass: Integrieren

Partielle Integration

Ein wichtiger Standard Trick

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

$$\int_a^b \frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt} + \int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

$$f(t)g(t)\Big|_a^b = \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt} + \int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

Masterclass: Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

Masterclass: Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx =$$

Masterclass: Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} x\frac{d\sin x}{dx}\, dx$$

Masterclass: Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\frac{d\sin x}{dx}\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\sin x\,dx$$

Masterclass: Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\frac{d\sin x}{dx}\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2}$$

Masterclass: Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\frac{d\sin x}{dx}\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Masterclass: Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\frac{d\sin x}{dx}\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Partielle Integration funktioniert erstaunlich oft!

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Idee 1: Kraft verursacht Bewegung - keine Kraft keine Bewegung

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Idee 1: Kraft verursacht Bewegung - keine Kraft keine Bewegung
Mögliches Gesetz:
“Die Geschwindigkeit eines Objektes ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Idee 1: Kraft verursacht Bewegung - keine Kraft keine Bewegung
Mögliches Gesetz:
“Die Geschwindigkeit eines Objektes ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\overrightarrow{F}(t) = m\vec{v}(t)$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Idee 1: Kraft verursacht Bewegung - keine Kraft keine Bewegung
Mögliches Gesetz:
“Die Geschwindigkeit eines Objektes ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = m\vec{v}(t)$$

In 1 Dimension äquivalent zu

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt}$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Idee 1: Kraft verursacht Bewegung - keine Kraft keine Bewegung
Mögliches Gesetz:
“Die Geschwindigkeit eines Objektes ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\overrightarrow{F}(t) = m\vec{v}(t)$$

In 1 Dimension äquivalent zu

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{F}{m}\Delta t$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Idee 1: Kraft verursacht Bewegung - keine Kraft keine Bewegung
Mögliches Gesetz:
“Die Geschwindigkeit eines Objektes ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\overrightarrow{F}(t) = m\vec{v}(t)$$

In 1 Dimension äquivalent zu

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{F}{m}\Delta t$$

d.h. deterministisch

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Idee 1: Kraft verursacht Bewegung - keine Kraft keine Bewegung
Mögliches Gesetz:
“Die Geschwindigkeit eines Objektes ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\overrightarrow{F}(t) = m\vec{v}(t)$$

In 1 Dimension äquivalent zu

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{F}{m}\Delta t$$

d.h. deterministisch

Bewegungsgleichung integrieren

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Idee 1: Kraft verursacht Bewegung - keine Kraft keine Bewegung
Mögliches Gesetz:
“Die Geschwindigkeit eines Objektes ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\overrightarrow{F}(t) = m\vec{v}(t)$$

In 1 Dimension äquivalent zu

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{F}{m}\Delta t$$

d.h. deterministisch

Bewegungsgleichung integrieren

$$\int \frac{F(t)}{m} dt = \int \frac{dx}{dt} dt = x(t) + c_1$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Beispiel: Konstante Kraft:

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Beispiel: Konstante Kraft:

$$x(t) + c_1 = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + c_2$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Beispiel: Konstante Kraft:

$$x(t) + c_1 = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + c_2$$

$$x(t) = \frac{F}{m} t + \underbrace{c_2 - c_1}_{=c}$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Beispiel: Konstante Kraft:

$$x(t) + c_1 = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + c_2$$

$$x(t) = \frac{F}{m} t + \underbrace{c_2 - c_1}_{=c}$$

Wie bestimmt man c ?

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Beispiel: Konstante Kraft:

$$x(t) + c_1 = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + c_2$$

$$x(t) = \frac{F}{m} t + \underbrace{c_2 - c_1}_{=c}$$

Wie bestimmt man c ?
Aus der Anfangsbedingung

$$x(0) = c$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Beispiel: Konstante Kraft:

$$x(t) + c_1 = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + c_2$$

$$x(t) = \frac{F}{m} t + \underbrace{c_2 - c_1}_{=c}$$

Wie bestimmt man c ?
Aus der Anfangsbedingung

$$x(0) = c$$

Exercise 1: Given a force that varies with time according to $F = 2t^2$, and with the initial condition at time zero, $x(0) = \pi$, use Aristotle's law to find $x(t)$ at all times.

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Sind diese Gleichungen reversibel?

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Sind diese Gleichungen reversibel?

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt} \quad t \to -t\text{:} \quad \frac{F(-t)}{m} = \frac{dx}{-dt}$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert

Sind diese Gleichungen reversibel?

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt} \quad t \to -t\text{:} \quad \frac{F(-t)}{m} = \frac{dx}{-dt}$$

D.h. dasselbe Gesetz, allerdings wird die Kraft $F(t)$ durch $-F(-t)$ ersetzt
d.h. auch in der Vergangenheit deterministisch und somit reversibel

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Sind diese Gleichungen reversibel?

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt} \quad t \to -t\text{:} \quad \frac{F(-t)}{m} = \frac{dx}{-dt}$$

D.h. dasselbe Gesetz, allerdings wird die Kraft $F(t)$ durch $-F(-t)$ ersetzt
d.h. auch in der Vergangenheit deterministisch und somit reversibel

Aristoteles Gleichungen sind zwar konsistent,
stimmen aber nicht mit der Natur überein
Und sind daher falsch!

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert

Sind diese Gleichungen reversibel?

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt} \quad t \to -t\textbf{:} \quad \frac{F(-t)}{m} = \frac{dx}{-dt}$$

D.h. dasselbe Gesetz, allerdings wird die Kraft $F(t)$ durch $-F(-t)$ ersetzt
d.h. auch in der Vergangenheit deterministisch und somit reversibel

Aristoteles Gleichungen sind zwar konsistent,
stimmen aber nicht mit der Natur überein
Und sind daher falsch!

Können aber als Näherung für Reibungskräfte benutzt werden

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = 0$**:** $\quad \frac{dv}{dt} = 0$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$F = 0\text{:} \quad \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int 0 \, dt = c = v(0) = v_0$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$F = 0\text{:} \qquad \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int 0 \, dt = c = v(0) = v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$F = 0\textbf{:} \qquad \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int 0\, dt = c = v(0) = v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int v_0\, dt = v_0 t + c = v_0 t + x_0$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$F = 0\text{:} \quad \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int 0\, dt = c = v(0) = v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int v_0\, dt = v_0 t + c = v_0 t + x_0$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.$**:**

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.$**:** $\quad \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F}{m}$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$F = const.: \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$F = const.: \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m}\, dt$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.:$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + c$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.:$ $$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + c = \frac{F}{m} t + v_0$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + c = \frac{F}{m} t + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + v_0$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.:$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m}\, dt = \frac{F}{m} t + c = \frac{F}{m} t + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$F = const.: \quad \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m}\, dt = \frac{F}{m} t + c = \frac{F}{m} t + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(\frac{F}{m} t + v_0 \right) dt$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.:$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m}\, dt = \frac{F}{m}t + c = \frac{F}{m}t + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(\frac{F}{m}t + v_0\right) dt = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t + x_0$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m}\, dt = \frac{F}{m}t + c = \frac{F}{m}t + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(\frac{F}{m}t + v_0 \right)\, dt = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t + x_0$$

$F = mg$:

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
"Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig"
"Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt"

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.$**:**

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m}\, dt = \frac{F}{m} t + c = \frac{F}{m} t + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(\frac{F}{m} t + v_0 \right)\, dt = \frac{F}{2m} t^2 + v_0 t + x_0$$

$F = mg$**:**

$$\Rightarrow x(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + x_0$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const\,.$**:** $$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m}\, dt = \frac{F}{m} t + c = \frac{F}{m} t + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(\frac{F}{m} t + v_0 \right)\, dt = \frac{F}{2m} t^2 + v_0 t + x_0$$

$F = mg$**:** $$\Rightarrow x(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + x_0$$ **Freier Fall**

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\overrightarrow{F}(t) = m\vec{a}$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}$$

träge Masse

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}$$

träge Masse

Einheiten:

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}$$

träge Masse

Einheiten:
Länge m (Meter)

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}$$

träge Masse

Einheiten:
Länge m (Meter) - Zeit s (Sekunde)

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = \underbrace{m}_{\text{träge Masse}}\vec{a}$$

Einheiten:

Länge m (Meter) - Zeit s (Sekunde) - Geschwindigkeit $\frac{m}{s}$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}$$

träge Masse

Einheiten:

Länge m **(Meter) - Zeit** s **(Sekunde) - Geschwindigkeit** $\frac{m}{s}$ **- Beschleunigung** $\frac{m}{s^2}$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}$$

träge Masse

Einheiten:

Länge m **(Meter) - Zeit** s **(Sekunde) - Geschwindigkeit** $\frac{m}{s}$ **- Beschleunigung** $\frac{m}{s^2}$

Masse kg **(Kilogramm)**

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}$$

träge Masse

Einheiten:

Länge m **(Meter) - Zeit** s **(Sekunde) - Geschwindigkeit** $\frac{m}{s}$ **- Beschleunigung** $\frac{m}{s^2}$

Masse kg **(Kilogramm)- Kraft** $kg\frac{m}{s^2} \equiv N$ **(Newton)**

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$**:**

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$**:** $\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$**:** $$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$: $$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$**:** $$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung:

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$**:** $$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$**:** $$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$$x_0 = x(0) = A$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$**:** $$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$$x_0 = x(0) = A$$
$$v_0 = v(0) = -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) = B\omega$$

Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$**:** $$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$$x_0 = x(0) = A$$
$$v_0 = v(0) = -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) = B\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

$V(x, y)$**: z.B. 3-dimensionale Landschaft:** V **entspricht der Höhe**

Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

$V(x, y)$**: z.B. 3-dimensionale Landschaft:** V **entspricht der Höhe**

$V(x, y, z)$**: schwer anschaulich vorstellbar, taucht aber oft in Mechanik auf, z.B. Potential mit unterschiedlichen Werten an verschieden Raumpunkten**

Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

$V(x, y)$**: z.B. 3-dimensionale Landschaft:** V **entspricht der Höhe**

$V(x, y, z)$**: schwer anschaulich vorstellbar, taucht aber oft in Mechanik auf, z.B. Potential mit unterschiedlichen Werten an verschiedenen Raumpunkten**

Die Funktion $V(x, y, z)$ **kann nach jeder der 3 Variablen abgeleitet werden:**

Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

$V(x, y)$**: z.B. 3-dimensionale Landschaft:** V **entspricht der Höhe**

$V(x, y, z)$**: schwer anschaulich vorstellbar, taucht aber oft in Mechanik auf, z.B. Potential mit unterschiedlichen Werten an verschiedenen Raumpunkten**

Die Funktion $V(x, y, z)$ **kann nach jeder der 3 Variablen abgeleitet werden:**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta x} \quad \textbf{mit} \quad \Delta V_x = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

$V(x, y)$**: z.B. 3-dimensionale Landschaft:** V **entspricht der Höhe**

$V(x, y, z)$**: schwer anschaulich vorstellbar, taucht aber oft in Mechanik auf, z.B. Potential mit unterschiedlichen Werten an verschiedenen Raumpunkten**

Die Funktion $V(x, y, z)$ **kann nach jeder der 3 Variablen abgeleitet werden:**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta x} \ \text{mit} \ \Delta V_x = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta V_y}{\Delta y} \ \text{mit} \ \Delta V_y = V(x, y + \Delta y, z) - V(x, y, z)$$

Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

$V(x, y)$**: z.B. 3-dimensionale Landschaft:** V **entspricht der Höhe**

$V(x, y, z)$**: schwer anschaulich vorstellbar, taucht aber oft in Mechanik auf, z.B. Potential mit unterschiedlichen Werten an verschiedenen Raumpunkten**

Die Funktion $V(x, y, z)$ **kann nach jeder der 3 Variablen abgeleitet werden:**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta x} \text{ mit } \Delta V_x = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta V_y}{\Delta y} \text{ mit } \Delta V_y = V(x, y + \Delta y, z) - V(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta V_z}{\Delta z} \text{ mit } \Delta V_z = V(x, y, z + \Delta z) - V(x, y, z)$$

Partielle Ableitung

Man kann auch mehrfach ableiten:

Partielle Ableitung

Man kann auch mehrfach ableiten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} \equiv \partial_{x,x} V$$

Partielle Ableitung

Man kann auch mehrfach ableiten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} \equiv \partial_{x,x} V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} \equiv \partial_{x,y} V$$

Partielle Ableitung

Man kann auch mehrfach ableiten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} \equiv \partial_{x,x} V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} \equiv \partial_{x,y} V$$

Man kann beweisen: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$

Partielle Ableitung

Man kann auch mehrfach ableiten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} \equiv \partial_{x,x} V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} \equiv \partial_{x,y} V$$

Man kann beweisen: $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$

Exercise 1: Compute all first and second partial derivatives—including mixed derivatives—of the following functions.

$x^2 + y^2 = \sin(x\ y)$

$\frac{x}{y}\, e^{x^2+y^2}$

$e^x \cos y$

Ende 3. Vorlesung