4. Vorlesung

Wiederholung 2. Vorlesung: Ableitung

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **damit gilt** $f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$ **und somit**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

d.h. die Ableitung von t^2 **ist** $2t$

2. $f(t) = t^n$ **: beachte** $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots. + b^n$

und somit

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^n + nt^{n-1}\Delta t + \ldots + \Delta t^n - t^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (nt^{n-1} + \ldots \Delta t^{n-1}) = nt^{n-1}$$

d.h. die Ableitung von t^n **ist** nt^{n-1}

$$\frac{d(t^3)}{dt} = 3t^2, \ \frac{d(1)}{dt} = \frac{d(t^0)}{dt} = 0, \ \frac{d(t^5)}{dt} = 5t^4, \ \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{d(t^{-1})}{dt} = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2}$$

3. **Spezielle Funktionen:**

$$\frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t, \ \frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t, \qquad \frac{d(e^t)}{dt} = e^t, \ \frac{d(\log t)}{dt} = \frac{1}{t}$$

Wiederholung 2. Vorlesung: Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left(cf(t)\right)}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)+g(t)\right)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

4. **Kettenregel: $g = g(t)$ und $f = f(g)$**

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}$$

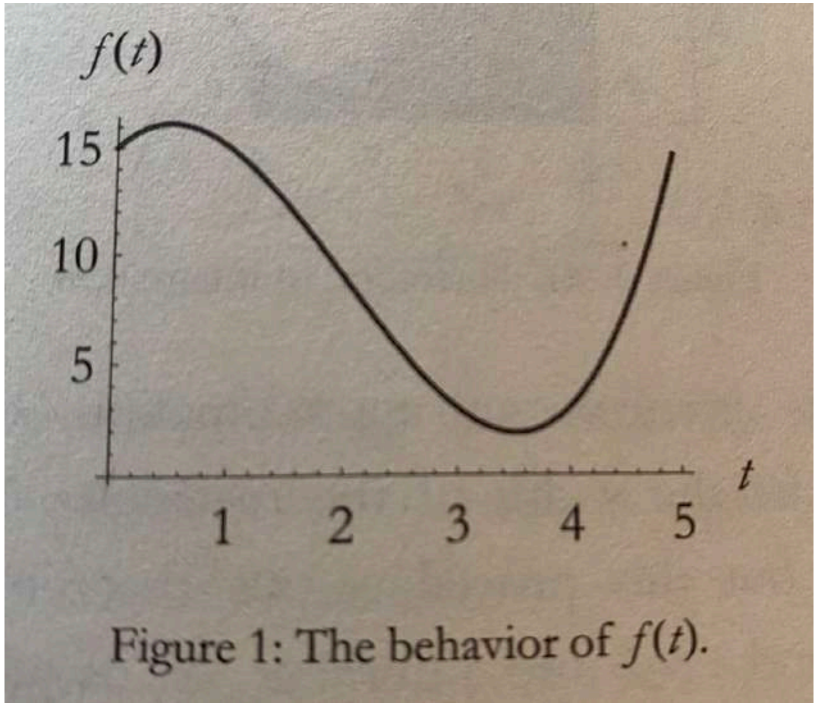
Beispiel: $f(t) = \log t^3$**? Ansatz:** $g(t) = t^3$ **und** $f(g) = \log g$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{g}3t^2 = \frac{1}{t^3}3t^2 = \frac{3}{t}$$

Wiederholung 3. Vorlesung: Umkehrung des Ableitens: Integrieren

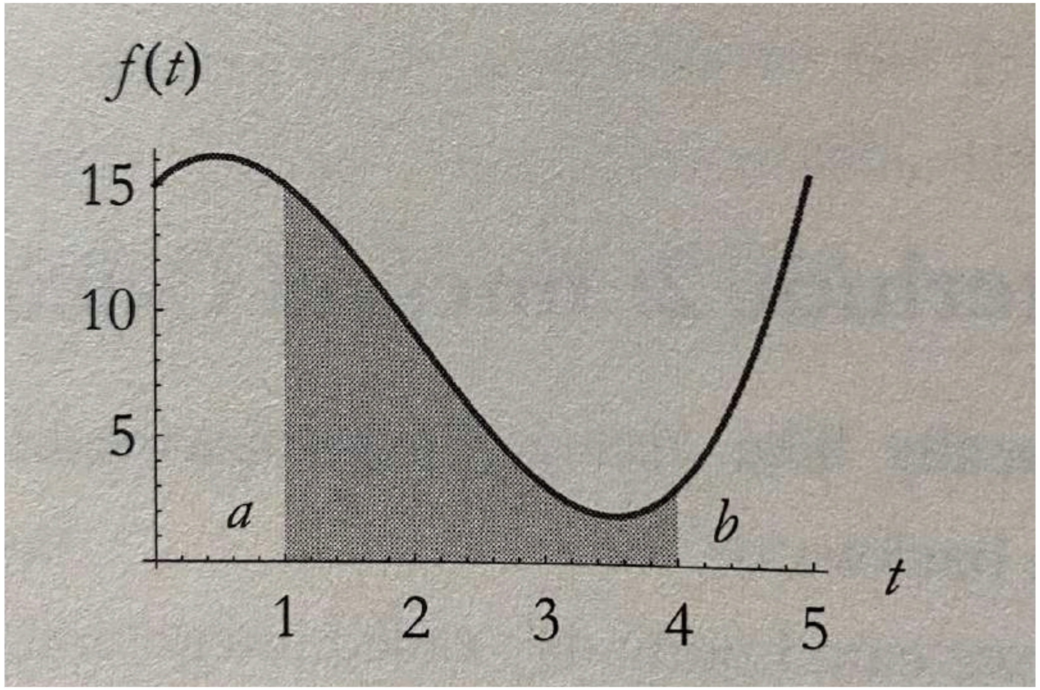
Wenn man die Ableitung $\frac{df(t)}{dt}$ kennt, kann man daraus die Funktion $f(t)$ bestimmen?

Betrachte eine beliebige Funktion $f(t)$



Betrachten wir erstmal eine scheinbar völlig unterschiedliche Frage?

Wie groß ist die Fläche unterhalb der Funktion $f(t)$ beginnend beim Punkt $t = a$ und endend beim Punkt $t = b$?



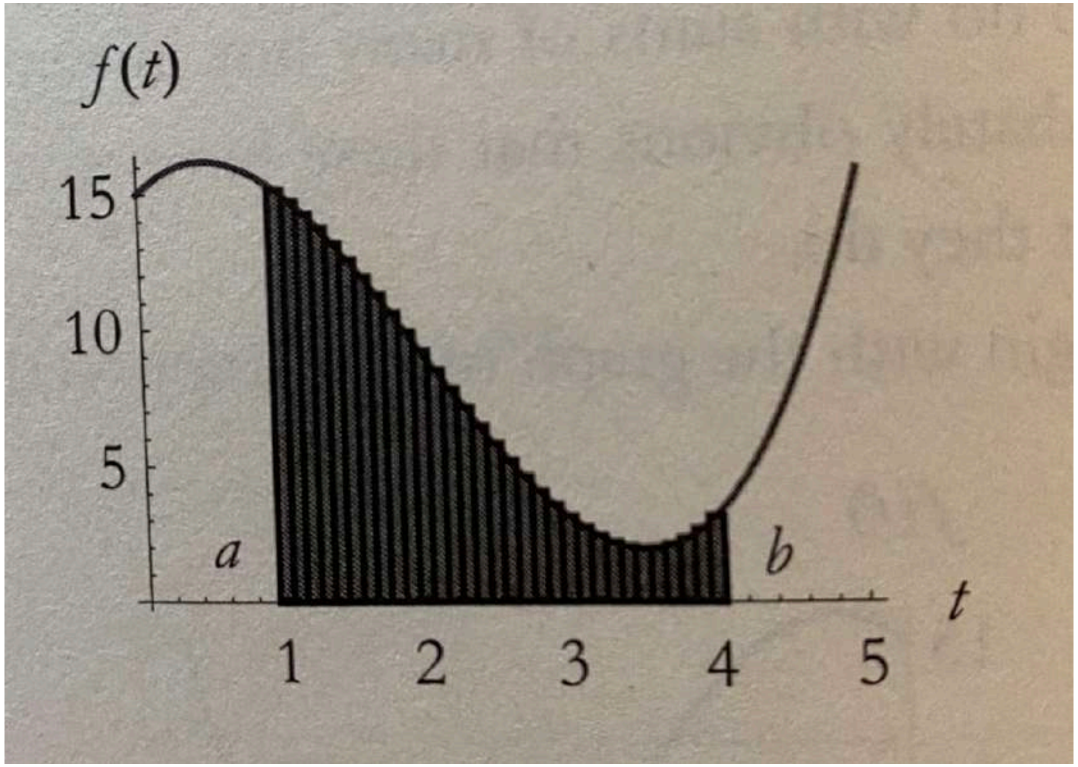
Wiederholung 3. Vorlesung: Integrieren

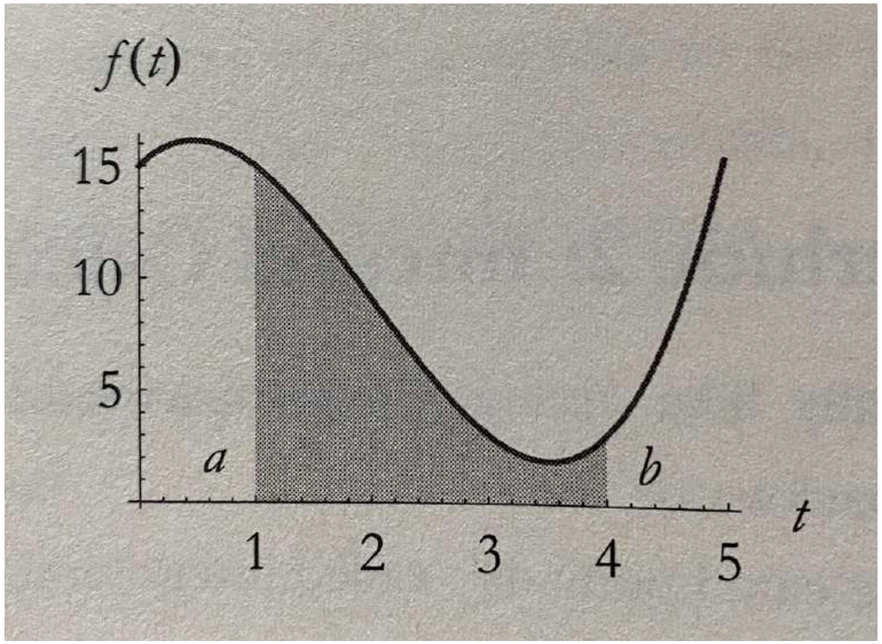
Um diese Frage zu beantworten teilen wir die Fläche in N kleine Rechtecke der Breite Δt, Höhe $f(t)$ und Fläche $\Delta A = f(t)\Delta t$ auf und summieren diese Flächen zur Gesamtfläche A auf

$$A = \sum_i f(t_i)\Delta t$$

Die exakte Fläche erhalten wir, wenn wir den Grenzwert $\Delta t \to 0$ bilden:

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i)\Delta t \quad \equiv \quad \int_a^b f(t)dt$$





Wiederholung 3. Vorlesung: Integrieren

Die exakte Fläche erhalten wir, wenn wir den Grenzwert $\Delta t \to 0$ bilden:

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i)\Delta t \qquad \equiv \qquad \int_a^b f(t)dt$$

Das Integralzeichen ersetzt das Summationszeichen

Der Grenzwert von Δt wird mit dt bezeichnet

Die Funktion $f(t)$ wird als Integrand bezeichnet

Als Nächstes betrachten wir die Funktion $F(T)$:

$$F(T) = \int_a^T f(t)dt \qquad \textbf{schlampig:} \quad F(t) = \int f(t)dt$$

Wiederholung 3. Vorlesung: Integrieren

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Beweis: $$F(T + \Delta T) = \int_a^{T+\Delta T} f(t)dt$$

Das bedeutet wir haben ein Rechteck hinzugefügt

$$F(T + \Delta T) - F(T) = f(t)\Delta T$$

und damit

$$\frac{F(T + \Delta T) - F(T)}{\Delta T} = f(t)$$

Im Grenzfall $\Delta T \to 0$

$$f(t) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{F(T + \Delta T) - F(T)}{\Delta T} = \frac{dF(T)}{dT} \equiv \frac{dF(t)}{dt} \qquad \square$$

Wiederholung 3. Vorlesung: Integrieren

Kann $F(T)$ eindeutig bestimmt werden?

Nein, nur bis auf eine Konstante

Beispiele:

1. $f(t) = t^n$:

$$F(t) = \int f(t)dt \Leftrightarrow f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = t^n$$

Ausprobieren: es gilt $\dfrac{dt^m}{dt} = mt^{m-1}$

damit gilt weiter $(m = n + 1)$ $\dfrac{dt^{n+1}}{dt} = (n+1)t^n$

Und schliesslich $\dfrac{d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)}{dt} = t^n$

Somit haben wir gefunden

$$F(t) = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \boxed{+ c}$$

Wiederholung 3. Vorlesung: Integrieren

Sind Ober- und Untergrenze des Integrals festgelegt, dann spricht man von einem bestimmten Integral

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Hier hebt sich die unbekannte Konstante raus

Wiederholung 3. Vorlesung:

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

4. $$\int \sin t \, dt = -\cos t + c$$

5. $$\int \cos t \, dt = \sin t + c$$

6. $$\int e^t \, dt = e^t + c$$

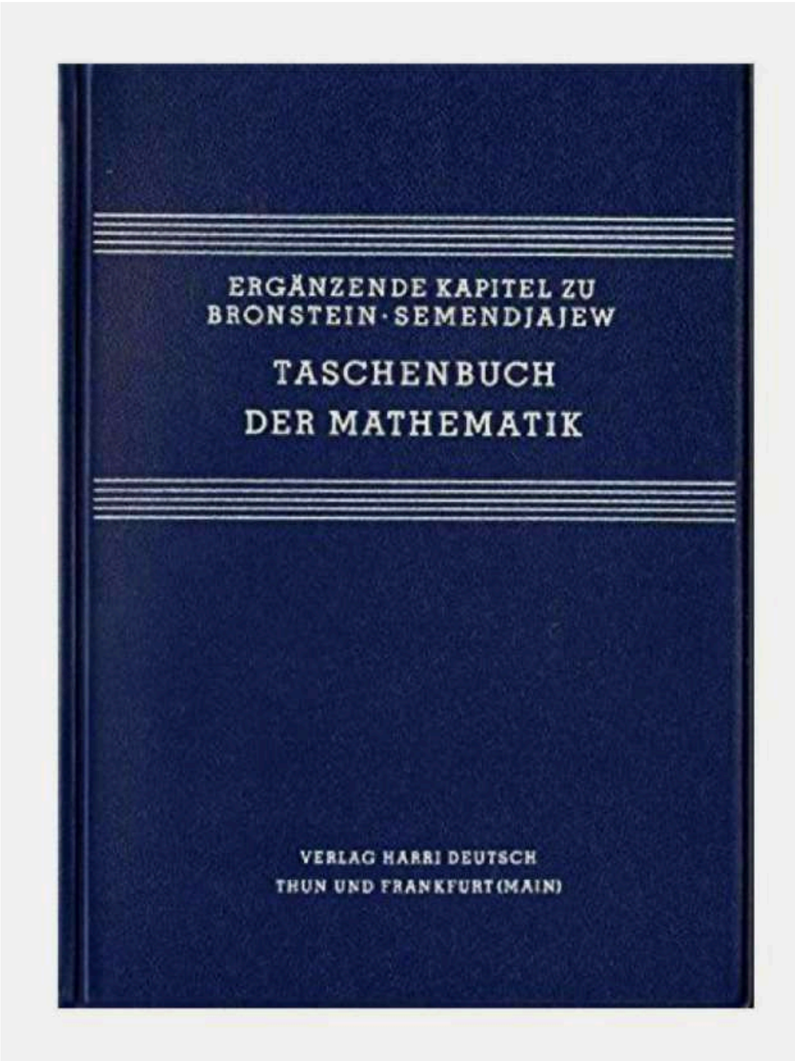
7. $$\int \frac{dt}{t} = \ln t + c$$

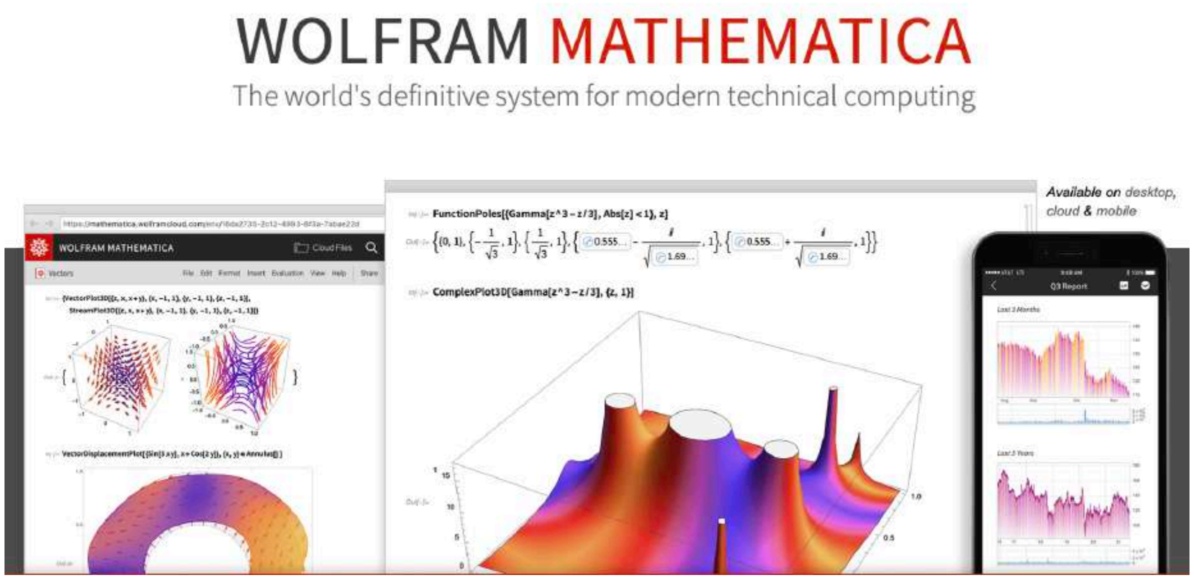
8. $$\int af(t)dt = a \int f(t)dt$$

9. $$\int \left[f(t) \pm g(t)\right] dt = \int f(t)dt \pm \int g(t)dt$$

Wiederholung 3. Vorlesung: Masterclass Integrieren

Es gibt große Formelsammlungen
Computerprogramme wie Mathematica können integrieren





Wiederholung 3. Vorlesung: Masterclass Integrieren

Partielle Integration

Ein wichtiger Standard Trick

$$\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

$$\int_a^b \frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt} = \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt} + \int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

$$f(t)g(t)\Big|_a^b = \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt} + \int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

Wiederholung 3. Vorlesung: Masterclass Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\frac{d\sin x}{dx}\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Partielle Integration funktioniert erstaunlich oft!

Wiederholung 3. Vorlesung: Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert
Idee 1: Kraft verursacht Bewegung - keine Kraft keine Bewegung
Mögliches Gesetz: "Die Geschwindigkeit eines Objektes ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt"

$$\vec{F}(t) = m\vec{v}(t)$$

In 1 Dimension äquivalent zu $\dfrac{F(t)}{m} = \dfrac{dx}{dt} \Leftrightarrow x(t+\Delta t) = x(t) + \dfrac{F}{m}\Delta t$

d.h. deterministisch

Bewegungsgleichung integrieren $\displaystyle\int \frac{F(t)}{m}dt = \int \frac{dx}{dt}dt = x(t) + c_1$

Beispiel: Konstante Kraft:

$$x(t) + c_1 = \int \frac{F}{m}dt = \frac{F}{m}t + c_2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{F}{m}t + \underbrace{c_2 - c_1}_{=c}$$

Wie bestimmt man c **? Aus der Anfangsbedingung.** $x(0) = c$ **Es gibt eine AB**

Wiederholung 3. Vorlesung: Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Aristoteles: viele Phänomene von Reibung dominiert

Sind diese Gleichungen reversibel?

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dx}{dt} \quad t \to -t\text{:} \quad \frac{F(-t)}{m} = \frac{dx}{-dt}$$

D.h. dasselbe Gesetz, allerdings wird die Kraft $F(t)$ durch $-F(-t)$ ersetzt
d.h. auch in der Vergangenheit deterministisch und somit reversibel

Aristoteles' Gleichungen sind zwar konsistent,
stimmen aber nicht mit der Natur überein
und sind daher falsch!

Können aber als Näherung für Reibungskräfte benutzt werden

Wiederholung 3. Vorlesung: Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$F = 0\text{:} \quad \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int 0\, dt = c = v(0) = v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int v_0\, dt = v_0 t + c = v_0 t + x_0$$

Es gibt zwei ABs

Wiederholung 3. Vorlesung: Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = const.$**:**

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = \int \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{F}{m}\, dt = \frac{F}{m}t + c = \frac{F}{m}t + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + v_0 \Rightarrow x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(\frac{F}{m}t + v_0\right)\, dt = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t + x_0$$

$F = mg$**:** $\Rightarrow x(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$ **Freier Fall**

Es gibt zwei ABs

Wiederholung 3. Vorlesung: Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}$$

träge Masse

Einheiten:

Länge m **(Meter) - Zeit** s **(Sekunde) - Geschwindigkeit** $\frac{m}{s}$ **- Beschleunigung** $\frac{m}{s^2}$

Masse kg **(Kilogramm)- Kraft** $kg\frac{m}{s^2} \equiv N$ **(Newton)**

Wiederholung 3. Vorlesung: Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Federpendel:

$F = -kx$**:** $$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$$x_0 = x(0) = A$$
$$v_0 = v(0) = -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) = B\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Es gibt zwei ABs

Wiederholung 3. Vorlesung: Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

$V(x, y)$**: z.B. 3-dimensionale Landschaft:** V **entspricht der Höhe**
$V(x, y, z)$**: schwer anschaulich vorstellbar, taucht aber oft in der Mechanik auf, z.B. Potential mit unterschiedlichen Werten an verschiedenen Raumpunkten**

Die Funktion $V(x, y, z)$ **kann nach jeder der 3 Variablen abgeleitet werden:**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta x} \quad \textbf{mit} \quad \Delta V_x = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta V_y}{\Delta y} \quad \textbf{mit} \quad \Delta V_y = V(x, y + \Delta y, z) - V(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta V_z}{\Delta z} \quad \textbf{mit} \quad \Delta V_z = V(x, y, z + \Delta z) - V(x, y, z)$$

Wiederholung 3. Vorlesung: Partielle Ableitung

Man kann auch mehrfach ableiten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} \equiv \partial_{x,x} V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} \equiv \partial_{x,y} V$$

Man kann beweisen: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$

Exercise 1: Compute all first and second partial derivatives—including mixed derivatives—of the following functions.

$x^2 + y^2 = \sin(x\ y)$

$\frac{x}{y} e^{x^2+y^2}$

$e^x \cos y$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte:

$$\frac{dF}{dy} = 0$$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte:

$$\frac{dF}{dy} = 0$$

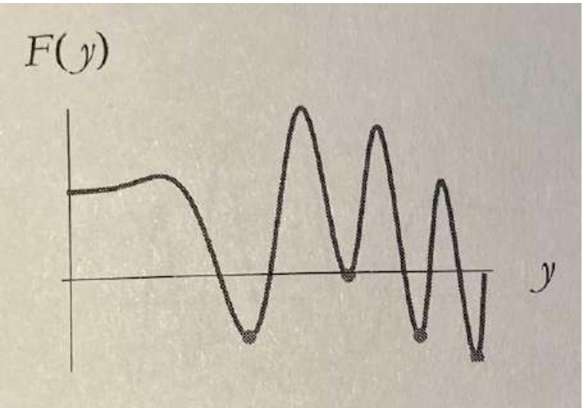


Figure 2: Local minima.

Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte:

$$\frac{dF}{dy} = 0$$

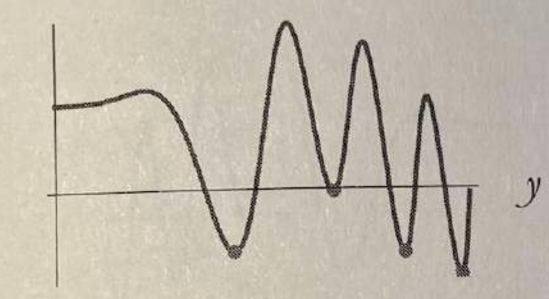


Figure 2: Local minima.

Lokales Maximum: $\dfrac{d^2F}{dy^2} < 0$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte:

$$\frac{dF}{dy} = 0$$

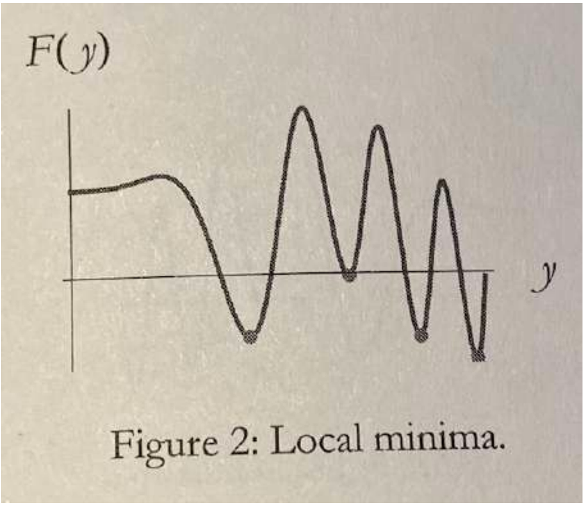


Figure 2: Local minima.

Lokales Maximum: $\frac{d^2F}{dy^2} < 0$

Lokales Minimum: $\frac{d^2F}{dy^2} > 0$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte:

$$\frac{dF}{dy} = 0$$

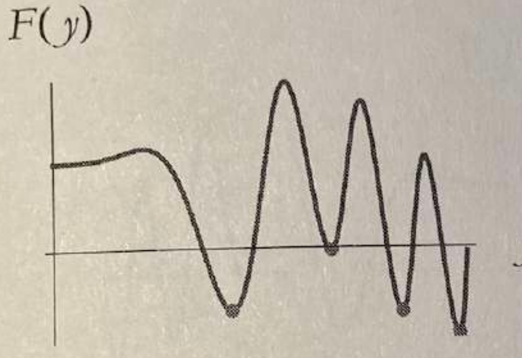


Figure 2: Local minima.

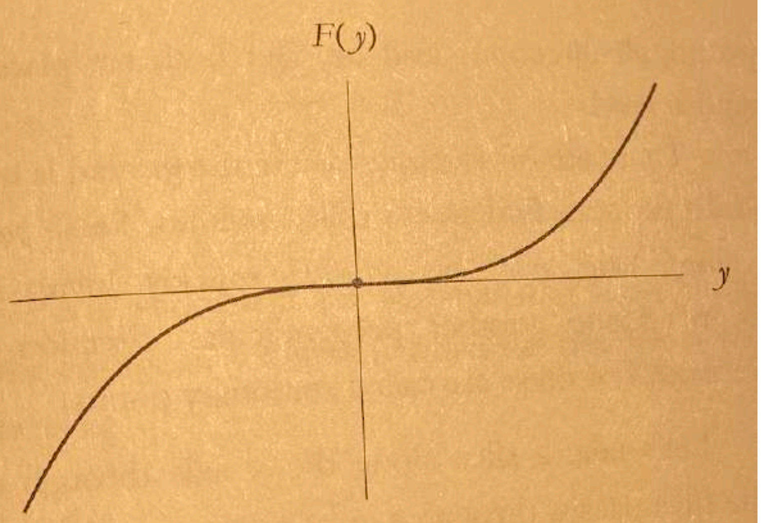


Figure 4: Point of inflection.

Lokales Maximum: $\frac{d^2F}{dy^2} < 0$

Lokales Minimum: $\frac{d^2F}{dy^2} > 0$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte:

$$\frac{dF}{dy} = 0$$

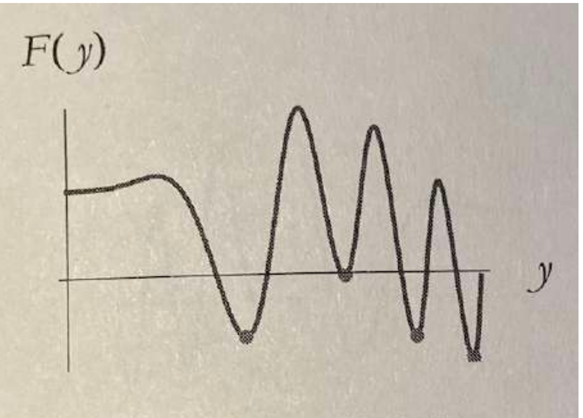


Figure 2: Local minima.

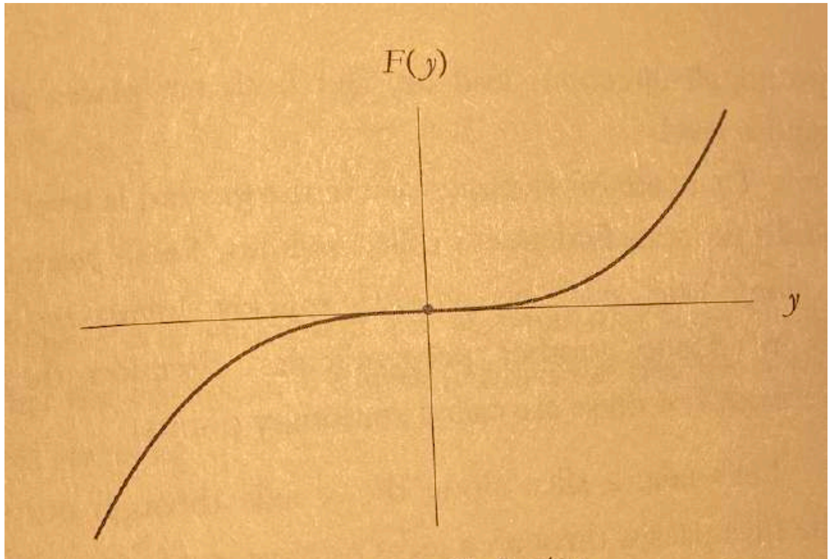


Figure 4: Point of inflection.

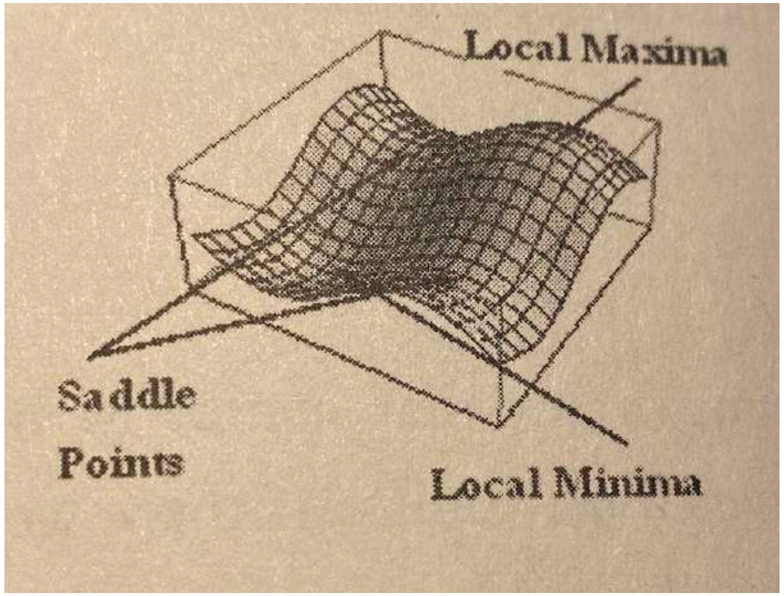
Lokales Maximum: $\frac{d^2F}{dy^2} < 0$

Lokales Minimum: $\frac{d^2F}{dy^2} > 0$

Wendepunkt: $\frac{d^2F}{dy^2} = 0$

Maxima, Minima, Wendepunkt

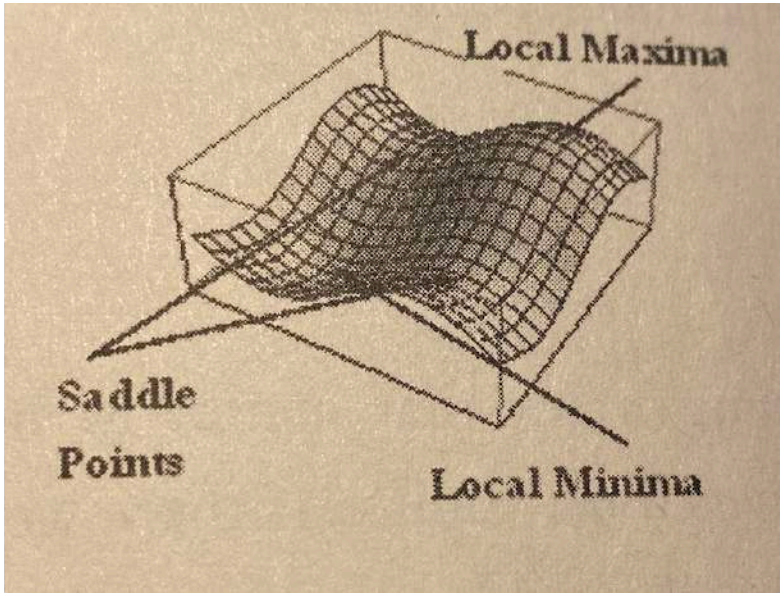
Stationäre Punkte in mehreren Dimensionen:



Für ein Minimum, Maximum, Sattelpunkt braucht man: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte in mehreren Dimensionen:

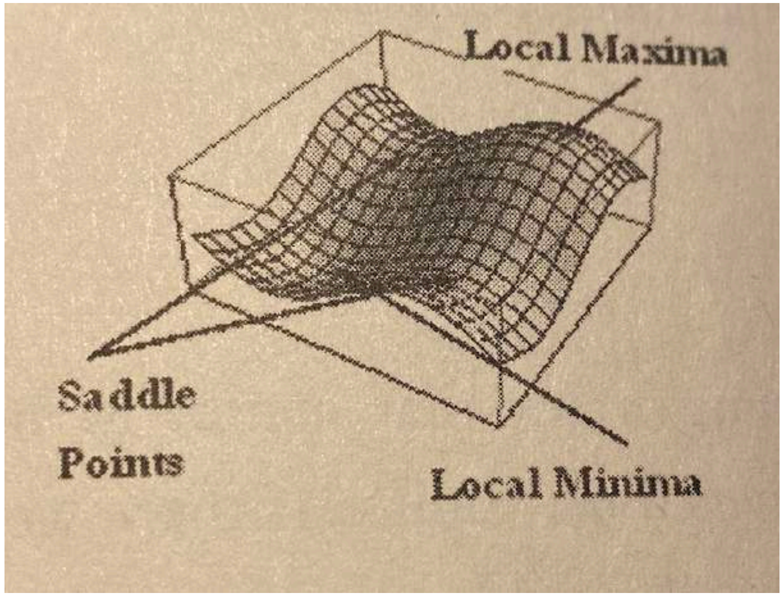


Für ein Minimum, Maximum, Sattelpunkt braucht man: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial F}{\partial y}$

allgemein: $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte in mehreren Dimensionen:

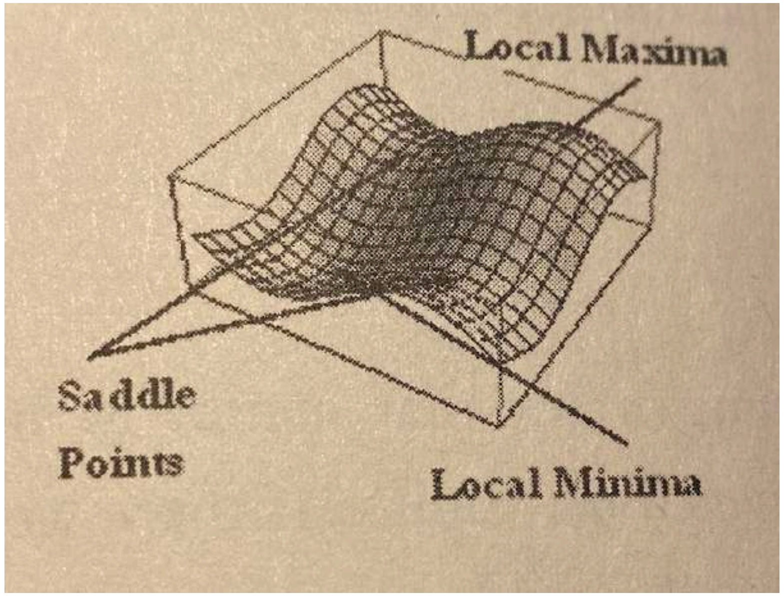


Für ein Minimum, Maximum, Sattelpunkt braucht man: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial F}{\partial y}$

allgemein: $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \delta F = 0$ **Def.:** $\delta F = \sum_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte in mehreren Dimensionen:



Für ein Minimum, Maximum, Sattelpunkt braucht man: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}$

allgemein: $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \delta F = 0$ **Def.:** $\delta F = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i$

Betrachte die 2. Ableitungen in 2 Dimensionen: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ **,** $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ **und** $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Hesse Matrix: $$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Hesse Matrix: $$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Determinante der Hesse Matrix : $\det H = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Hesse Matrix: $$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Determinante der Hesse Matrix : $\det H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

Spur der Hesse Matrix: **Tr** $H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

Maxima, Minima, Wendepunkt

Hesse Matrix: $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

Determinante der Hesse Matrix : $\det H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

Spur der Hesse Matrix: **Tr** $H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

Regeln für Punkte mit $\delta F = 0$:

Maxima, Minima, Wendepunkt

Hesse Matrix: $$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Determinante der Hesse Matrix : $\det H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

Spur der Hesse Matrix: **Tr** $H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

Regeln für Punkte mit $\delta F = 0$:

1. **Det H > 0 & Tr H > 0: lokales Minimum**

Maxima, Minima, Wendepunkt

Hesse Matrix: $$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Determinante der Hesse Matrix : $$\det H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Spur der Hesse Matrix: $$\text{Tr } H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Regeln für Punkte mit $\delta F = 0$:

1. **Det H > 0 & Tr H > 0: lokales Minimum**
2. **Det H > 0 & Tr H < 0: lokales Maximum**

Maxima, Minima, Wendepunkt

Hesse Matrix: $$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Determinante der Hesse Matrix : $$\det H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Spur der Hesse Matrix: $$\text{Tr } H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Regeln für Punkte mit $\delta F = 0$:

1. **Det H > 0 & Tr H > 0: lokales Minimum**
2. **Det H > 0 & Tr H < 0: lokales Maximum**
3. **Det H < 0 : Sattelpunkt**

Beisipiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

Beisipiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

1. Ableitungen: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos x$ **und** $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos y$

Beisipiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

1. Ableitungen: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos x$ **und** $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos y$

verschwindet bei $x, y = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$

Beisipiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

1. Ableitungen: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos x$ **und** $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos y$

verschwindet bei $x, y = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$

2. Ableitungen : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x$ **,** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin y$ **und** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$

Beisipiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

1. Ableitungen: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos x$ **und** $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos y$

verschwindet bei $x, y = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$

2. Ableitungen : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x$ **,** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin y$ **und** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$

Determinante $\det H = \sin x \sin y$

Beisipiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

1. Ableitungen: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos x$ **und** $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos y$

verschwindet bei $x, y = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$

2. Ableitungen : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x$ **,** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin y$ **und** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$

Determinante $\det H = \sin x \sin y$

Spur **Tr** $H = -\sin x - \sin y$

Beisipiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

1. Ableitungen: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos x$ **und** $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos y$

verschwindet bei $x, y = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$

2. Ableitungen : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x$ **,** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin y$ **und** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$

Determinante $\det H = \sin x \sin y$

Spur **Tr** $H = -\sin x - \sin y$

Für den Punkt $x = \dfrac{\pi}{2}$ **,** $y = \dfrac{\pi}{2}$ **gilt mit** $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$**:** $\det H = +1$ **und tr** $H = -2$

Beisipiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

1. Ableitungen: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos x$ **und** $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos y$

verschwindet bei $x, y = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$

2. Ableitungen : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x$ **,** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin y$ **und** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$

Determinante $\det H = \sin x \sin y$

Spur **Tr** $H = -\sin x - \sin y$

Für den Punkt $x = \dfrac{\pi}{2}$ **,** $y = \dfrac{\pi}{2}$ **gilt mit** $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$**:** $\det H = +1$ **und tr** $H = -2$

1. **Det H > 0 & Tr H > 0: lokales Minimum**
2. **Det H > 0 & Tr H < 0: lokales Maximum**
3. **Det H < 0 : Sattelpunkt**

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: " Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist", der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist" wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Abgeleitete Kräfte

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Abgeleitete Kräfte

Reibungskräfte
- abgeleitet aus molekularen
  und atomaren Kräften

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Abgeleitete Kräfte

Reibungskräfte
- abgeleitet aus molekularen und atomaren Kräften

konstante Gravitationskraft
- genähert aus fundamentaler Gravitationskraft

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Abgeleitete Kräfte

Reibungskräfte
- abgeleitet aus molekularen und atomaren Kräften

konstante Gravitationskraft
- genähert aus fundamentaler Gravitationskraft

Federkraft
- abgeleitet aus Festkörper-Wechselwirkungen

...

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Abgeleitete Kräfte

Reibungskräfte
- abgeleitet aus molekularen und atomaren Kräften

konstante Gravitationskraft
- genähert aus fundamentaler Gravitationskraft

Federkraft
- abgeleitet aus Festkörper-Wechselwirkungen

...

Fundamentale Kräfte

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Abgeleitete Kräfte

Reibungskräfte
- abgeleitet aus molekularen und atomaren Kräften

konstante Gravitationskraft
- genähert aus fundamentaler Gravitationskraft

Federkraft
- abgeleitet aus Festkörper-Wechselwirkungen

...

Fundamentale Kräfte

Gravitationskraft: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ $\quad G = 6.67430 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Abgeleitete Kräfte

Reibungskräfte
- abgeleitet aus molekularen und atomaren Kräften

konstante Gravitationskraft
- genähert aus fundamentaler Gravitationskraft

Federkraft
- abgeleitet aus Festkörper-Wechselwirkungen

...

Fundamentale Kräfte

Gravitationskraft: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ $\quad G = 6.67430 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$

Coulombkraft: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ $\quad \epsilon_0 = 8.854187812 \cdot 10^{-12}\frac{As}{Vm}$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abgeschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1, \ldots, N$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $i = 1, \ldots, N$
Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1, \ldots, N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\overrightarrow{F}_l$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1,\ldots,N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen i **wirkt die Kraft** $\overrightarrow{F}_l$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N)$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1, \ldots, N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\vec{F}_l$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

$$\vec{F}_l = \vec{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right)$$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1,\ldots,N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\overrightarrow{F}_i$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots.., \vec{r}_N)$

$$\overrightarrow{F}_l = \overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right)$$

Nach Newton gilt $\overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l \vec{a}_i$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1,\ldots,N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\overrightarrow{F}_i$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N)$

$$\overrightarrow{F}_l = \overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right)$$

Nach Newton gilt $\overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l \vec{a}_i = m_l \dfrac{d^2\vec{r}_l}{dt^2}$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1, \ldots, N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\overrightarrow{F}_i$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

$$\overrightarrow{F}_l = \overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right)$$

Nach Newton gilt $\overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l \vec{a}_i = m_l \dfrac{d^2 \vec{r}_l}{dt^2}$

oder in Komponentenform

$$(F_x)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l (a_x)_l = m_l \frac{d^2 x_l}{dt^2}$$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1,\ldots,N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\vec{F}_i$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots\ldots, \vec{r}_N)$

$$\vec{F}_l = \vec{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right)$$

Nach Newton gilt $\vec{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l \vec{a}_i = m_l \dfrac{d^2\vec{r}_l}{dt^2}$

oder in Komponentenform

$$(F_x)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l (a_x)_l = m_l \frac{d^2 x_l}{dt^2}$$

$$(F_y)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l (a_y)_l = m_l \frac{d^2 y_l}{dt^2}$$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1,\ldots,N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\vec{F}_i$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

$$\vec{F}_l = \vec{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right)$$

Nach Newton gilt $\vec{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l \vec{a}_i = m_l \dfrac{d^2 \vec{r}_l}{dt^2}$

oder in Komponentenform

$$(F_x)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l (a_x)_l = m_l \frac{d^2 x_l}{dt^2}$$

$$(F_y)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l (a_y)_l = m_l \frac{d^2 y_l}{dt^2}$$

$$(F_z)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l (a_z)_l = m_l \frac{d^2 z_l}{dt^2}$$

Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1,\ldots,N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\overrightarrow{F}_i$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N)$

$$\overrightarrow{F}_l = \overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right)$$

Nach Newton gilt $\overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l\vec{a}_i = m_l\dfrac{d^2\vec{r}_l}{dt^2}$

oder in Komponentenform

$$(F_x)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l(a_x)_l = m_l\frac{d^2x_l}{dt^2}$$

$$(F_y)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l(a_y)_l = m_l\frac{d^2y_l}{dt^2}$$

$$(F_z)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l(a_z)_l = m_l\frac{d^2z_l}{dt^2}$$

D.h. es gibt $3N$ **Gleichungen, die der Weltgeist lösen muss**

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0))$

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

4. Newton's Welt mit N Teilchen:

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

4. Newton's Welt mit N Teilchen:
   $2N$ Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0), \dot{\vec{r}}_1(t_0), \ldots, \dot{\vec{r}}_N(t_0))$

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots., \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N)$

4. Newton's Welt mit N Teilchen:
   $2N$ Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots., \vec{r}_N(t_0), \dot{\vec{r}}_1(t_0), \ldots., \dot{\vec{r}}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots., \dot{\vec{r}}_N)$

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

4. Newton's Welt mit N Teilchen:
   $2N$ Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0), \dot{\vec{r}}_1(t_0), \ldots, \dot{\vec{r}}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N)$

   Pro Teilchen: 6 Dimensionen

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots., \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N)$

4. Newton's Welt mit N Teilchen:
   $2N$ Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots., \vec{r}_N(t_0), \dot{\vec{r}}_1(t_0), \ldots., \dot{\vec{r}}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots., \dot{\vec{r}}_N)$

   Pro Teilchen: 6 Dimensionen

   6 Gleichungen pro Teilchen:

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots\ldots, \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots\ldots, \vec{r}_N)$

4. Newton's Welt mit N Teilchen:
   $2N$ Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots\ldots, \vec{r}_N(t_0), \dot{\vec{r}}_1(t_0), \ldots\ldots, \dot{\vec{r}}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots\ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots\ldots, \dot{\vec{r}}_N)$

   Pro Teilchen: 6 Dimensionen

   6 Gleichungen pro Teilchen: $m\dfrac{dv_i}{dt} = F_i$

Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss, um die Zukunft vorherzusagen, wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots., \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N)$

4. Newton's Welt mit N Teilchen:
   $2N$ Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots., \vec{r}_N(t_0), \dot{\vec{r}}_1(t_0), \ldots., \dot{\vec{r}}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots., \dot{\vec{r}}_N)$

   Pro Teilchen: 6 Dimensionen

   6 Gleichungen pro Teilchen: $m\frac{dv_i}{dt} = F_i$ und $\frac{dx_i}{dt} = v_i$

Einschub: Impuls und Energie

Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

Einschub: Impuls und Energie

Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die “Wucht” durch zwei Größen dargestellt werden.

Einschub: Impuls und Energie

Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die "Wucht" durch zwei Größen dargestellt werden.

1. **Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

Einschub: Impuls und Energie

Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die “Wucht” durch zwei Größen dargestellt werden.

1. **Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

2. **Impuls:** $\vec{p} = m\vec{v}$ **bzw.** $p_i = mv_i$

Einschub: Impuls und Energie

Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die "Wucht" durch zwei Größen dargestellt werden.

1. **Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

2. **Impuls:** $\vec{p} = m\vec{v}$ **bzw.** $p_i = mv_i$

Sowohl die Energie, als auch der Impuls ist erhalten

Einschub: Impuls und Energie

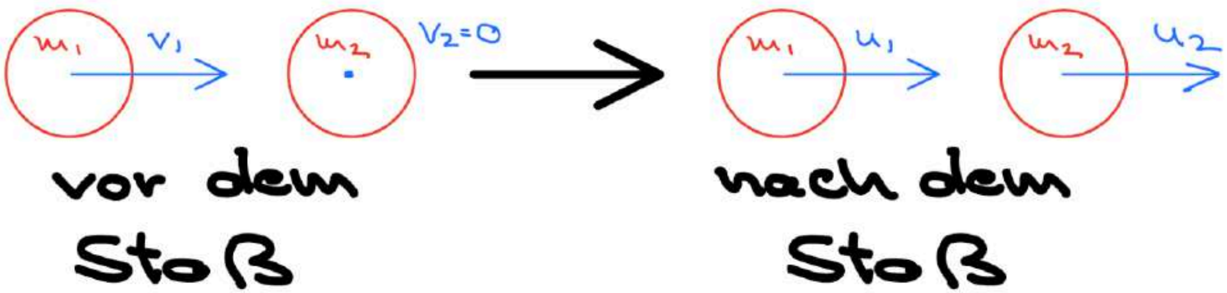
Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die "Wucht" durch zwei Größen dargestellt werden.

1. **Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

2. **Impuls:** $\vec{p} = m\vec{v}$ **bzw.** $p_i = mv_i$

Sowohl die Energie, als auch der Impuls ist erhalten



Einschub: Impuls und Energie

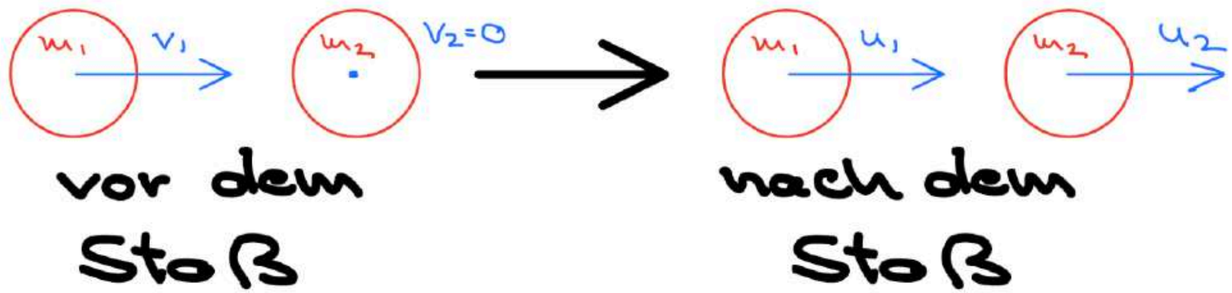
Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die “Wucht” durch zwei Größen dargestellt werden.

1. **Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

2. **Impuls:** $\vec{p} = m\vec{v}$ **bzw.** $p_i = mv_i$

Sowohl die Energie, als auch der Impuls ist erhalten



Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

Einschub: Impuls und Energie

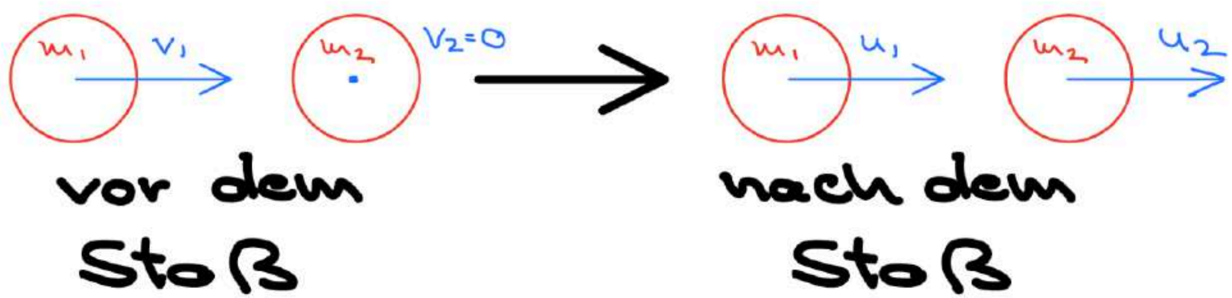
Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die “Wucht” durch zwei Größen dargestellt werden.

1. **Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

2. **Impuls:** $\vec{p} = m\vec{v}$ **bzw.** $p_i = mv_i$

Sowohl die Energie, als auch der Impuls ist erhalten



Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

Impulserhaltung: $m_1v_1 + 0 = m_1u_1 + m_2u_2$

Einschub: Impuls und Energie

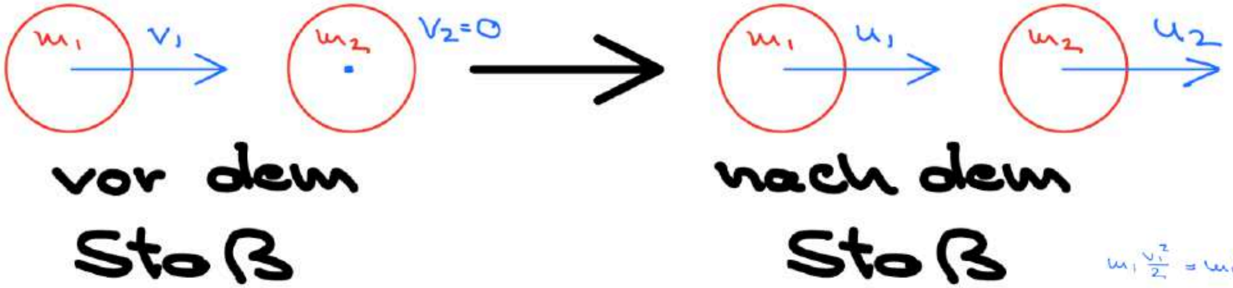
Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die “Wucht” durch zwei Größen dargestellt werden.

1. **Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

2. **Impuls:** $\vec{p} = m\vec{v}$ **bzw.** $p_i = mv_i$

Sowohl die Energie, als auch der Impuls ist erhalten



Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

Impulserhaltung: $m_1v_1 + 0 = m_1u_1 + m_2u_2$

$m_1\frac{v_1^2}{2} = m_1\frac{u_1^2}{2} + m_2\frac{u_2^2}{2}$

$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2 \Rightarrow v_1 = u_1 + \frac{m_2}{m_1}u_2$

$\cancel{m_1\frac{u_1^2}{2}} = m_1\frac{2u_1u_2}{2}\frac{m_2}{m_1} + \frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{m_1^2}u_2^2 = \cancel{m_1\frac{u_1^2}{2}} + m_2\frac{u_2^2}{2}$

$u_1u_2 + \frac{m_2}{2m_1}u_2^2 - \frac{u_2^2}{2} = 0$

$2m_1u_1u_2 + m_2u_2^2 - m_1u_2^2 = 0$ $\quad \rightarrow u_2 = 0$ ↯

$2m_1u_1 + (m_2 - m_1)u_2 = 0$

$\Rightarrow u_1 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}u_2$ $\quad m_1 = m_2 \Rightarrow u_1 = 0$

$\Rightarrow u_2 = v_1$

Phasenraum

Statt dem Zustandsraum $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots., \dot{\vec{r}}_N)$

Phasenraum

Statt dem Zustandsraum $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots., \dot{\vec{r}}_N)$

kann man auch $\left\{\vec{r}, \vec{p}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \vec{p}_1, \ldots., \vec{p}_N)$ verwenden, letzterer Zustandsraum wird auch **Phasenraum** genannt

Phasenraum

Statt dem Zustandsraum $\left\{\vec{r},\dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots., \dot{\vec{r}}_N)$

kann man auch $\left\{\vec{r},\vec{p}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \vec{p}_1, \ldots., \vec{p}_N)$ verwenden - dieser Zustandsraum wird auch **Phasenraum** genannt

Phasenraum = Konfigurationsraum + Impulsraum

Phasenraum

Statt dem Zustandsraum $\left\{ \vec{r}, \dot{\vec{r}} \right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots., \dot{\vec{r}}_N)$

kann man auch $\left\{ \vec{r}, \vec{p} \right\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N, \vec{p}_1, \ldots., \vec{p}_N)$ verwenden, letzterer Zustandsraum wird auch **Phasenraum** genannt

Phasenraum = Konfigurationsraum + Impulsraum

Für ein Teilchen im 3 Dimensionalen Raum

Phasenraum

Statt dem Zustandsraum $\left\{\vec{r},\dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1,\ldots.,\vec{r}_N,\dot{\vec{r}}_1,\ldots.,\dot{\vec{r}}_N)$

kann man auch $\left\{\vec{r},\vec{p}\right\} = (\vec{r}_1,\ldots.,\vec{r}_N,\vec{p}_1,\ldots.,\vec{p}_N)$ verwenden, letzterer Zustandsraum wird auch **Phasenraum** genannt

Phasenraum = Konfigurationsraum + Impulsraum

Für ein Teilchen im 3 Dimensionalen Raum

$$\mathbb{R}^6 \quad \equiv \quad \mathbb{R}^3 \quad + \quad \mathbb{R}^3$$

Phasenraum

Statt dem Zustandsraum $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N)$

kann man auch $\left\{\vec{r}, \vec{p}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N)$ verwenden, letzterer Zustandsraum wird auch **Phasenraum** genannt

Phasenraum = Konfigurationsraum + Impulsraum

Für ein Teilchen im 3 Dimensionalen Raum

$$\mathbb{R}^6 \quad \equiv \quad \mathbb{R}^3 \quad + \quad \mathbb{R}^3$$

6 Gleichungen pro Teilchen: $\dot{p}_i = m_i \dfrac{dv_i}{dt} = F_i$ und $\dfrac{dx_i}{dt} = v_i = \dfrac{p_i}{m_i}$

Phasenraum

Statt dem Zustandsraum $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N)$

kann man auch $\left\{\vec{r}, \vec{p}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N)$ verwenden, letzterer Zustandsraum wird auch **Phasenraum** genannt

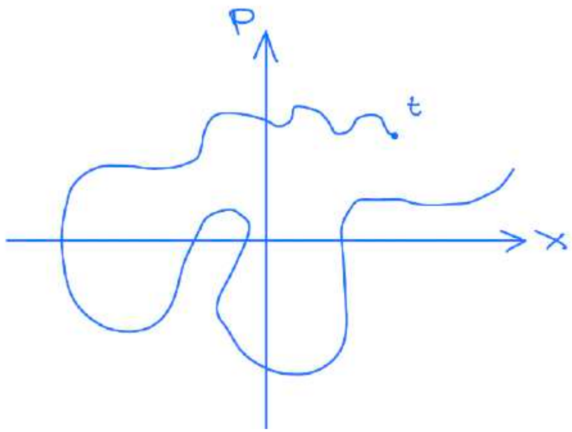
Phasenraum = Konfigurationsraum + Impulsraum

Für ein Teilchen im 3 Dimensionalen Raum

$$\mathbb{R}^6 \equiv \mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^3$$

6 Gleichungen pro Teilchen: $\dot{p}_i = m_i \dfrac{dv_i}{dt} = F_i$ und $\dfrac{dx_i}{dt} = v_i = \dfrac{p_i}{m_i}$

Für ein Teilchen in 1 Dimension



Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Annahme: $v_0 = 0$ $\quad \Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

Annahme: $v_0 = 0$ $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$ $\Rightarrow p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$

Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

Annahme: $v_0 = 0$ $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$ $\Rightarrow p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$

$\omega t = 0 \;\Rightarrow x = x_0\,,\, p = 0$

Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Annahme: $v_0 = 0$ $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$ $\Rightarrow p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$

$$\omega t = 0 \;\Rightarrow x = x_0\,,\; p = 0$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0\,,\; p = -m\omega x_0$$

Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Annahme: $v_0 = 0$ $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$ $\Rightarrow p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$

$$\omega t = 0 \Rightarrow x = x_0 \,,\, p = 0$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0 \,,\, p = -m\omega x_0$$

$$\omega t = \pi \Rightarrow x = -x_0 \,,\, p = 0$$

Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

Annahme: $v_0 = 0$ $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$ $\Rightarrow p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$

$$\omega t = 0 \;\Rightarrow x = x_0\,,\; p = 0$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0\,,\; p = -m\omega x_0$$

$$\omega t = \pi \Rightarrow x = -x_0\,,\; p = 0$$

$$\omega t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 0\,,\; p = +m\omega x_0$$

Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

Annahme: $v_0 = 0$ $\quad \Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

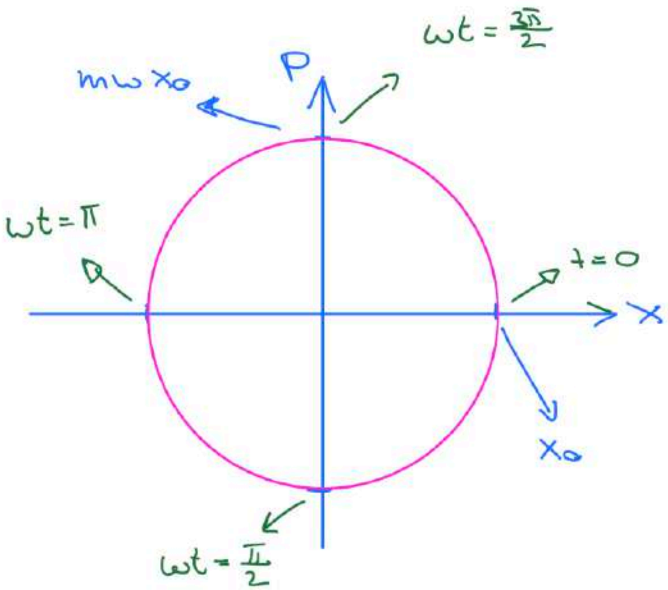
$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) \qquad \Rightarrow p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$

$$\omega t = 0 \;\Rightarrow x = x_0\,,\, p = 0$$

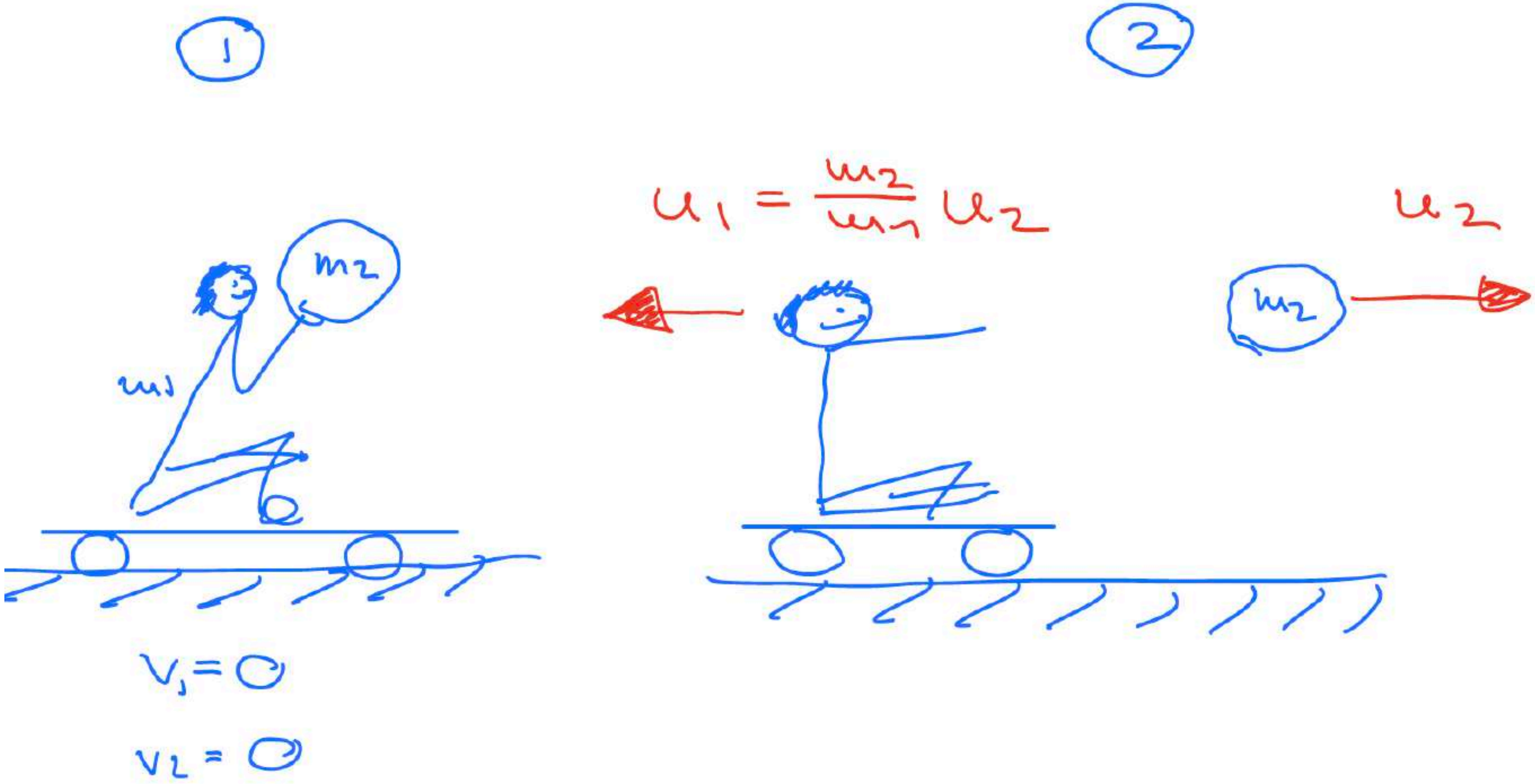
$$\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0\,,\, p = -m\omega x_0$$

$$\omega t = \pi \Rightarrow x = -x_0\,,\, p = 0$$

$$\omega t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 0\,,\, p = +m\omega x_0$$



Impulserhaltung



Impulserhaltung

Impulserhaltung kann aus der Invarianz der dynamischen Gesetze unter Raumtranslation hergeleitet werden (via Noether-Theorem)

Impulserhaltung

Impulserhaltung kann aus der Invarianz der dynamischen Gesetze unter Raumtranslation hergeleitet werden (via Noether-Theorem)
oder
aus dem 3. Newtonschen Gesetz

Actio = Reactio

Impulserhaltung

Impulserhaltung kann aus der Invarianz der dynamischen Gesetze unter Raumtranslation hergeleitet werden (via Noether-Theorem)
oder
aus dem 3. Newtonschen Gesetz

Actio = Reactio

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Impulserhaltung

Impulserhaltung kann aus der Invarianz der dynamischen Gesetze unter Raumtranslation hergeleitet werden (via Noether-Theorem)
oder
aus dem 3. Newtonschen Gesetz

Actio = Reactio

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen

Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen

Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen

Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Die Gesamtkraft auf das Teilchen i lautet $\overrightarrow{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen

Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Die Gesamtkraft auf das Teilchen i lautet $\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

2. Newtonsches Gesetz: $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N **Teilchen**

Jedes Teilchen j **übt eine Kraft** $\vec{f}_{ij}$ **auf das Teilchen** i **aus**

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Die Gesamtkraft auf das Teilchen i **lautet** $\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

2. Newtonsches Gesetz: $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ **des Systems**

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen

Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Die Gesamtkraft auf das Teilchen i lautet $\overrightarrow{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

2. Newtonsches Gesetz: $\dot{\vec{p}}_i = \overrightarrow{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

Der Gesamtimpuls $\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ **des Systems ändert sich damit mit der Zeit, wie**

$$\dot{\overrightarrow{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i$$

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen
Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Die Gesamtkraft auf das Teilchen i lautet $\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

2. Newtonsches Gesetz: $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ **des Systems ändert sich damit mit der Zeit, wie**

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$$

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen

Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Die Gesamtkraft auf das Teilchen i lautet $\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

2. Newtonsches Gesetz: $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ **des Systems ändert sich damit mit der Zeit, wie**

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{f}_{ij} = \underbrace{\vec{f}_{11}}_{=0} + \underbrace{\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}}_{=0} + \underbrace{\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}}_{=0} + \ldots .$$

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen
Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Die Gesamtkraft auf das Teilchen i lautet $\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

2. Newtonsches Gesetz: $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ **des Systems ändert sich damit mit der Zeit, wie**

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{f}_{ij} = \underbrace{\vec{f}_{11}}_{=0} + \underbrace{\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}}_{=0} + \underbrace{\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}}_{=0} + \ldots.$$

$\dot{\vec{P}} = 0$, **d.h. der Gesamimpuls ist erhalten!**

Impulserhaltung

Bei zwei Teilchen

Impulserhaltung

Bei zwei Teilchen

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$$

Impulserhaltung

Bei zwei Teilchen

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$$

d.h. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$**.**

Impulserhaltung

Bei zwei Teilchen

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$$

d.h. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$**.**

Vorher = $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$

Impulserhaltung

Bei zwei Teilchen

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$$

d.h. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$**.**

Vorher = $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$

Nachher = $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$

Impulserhaltung

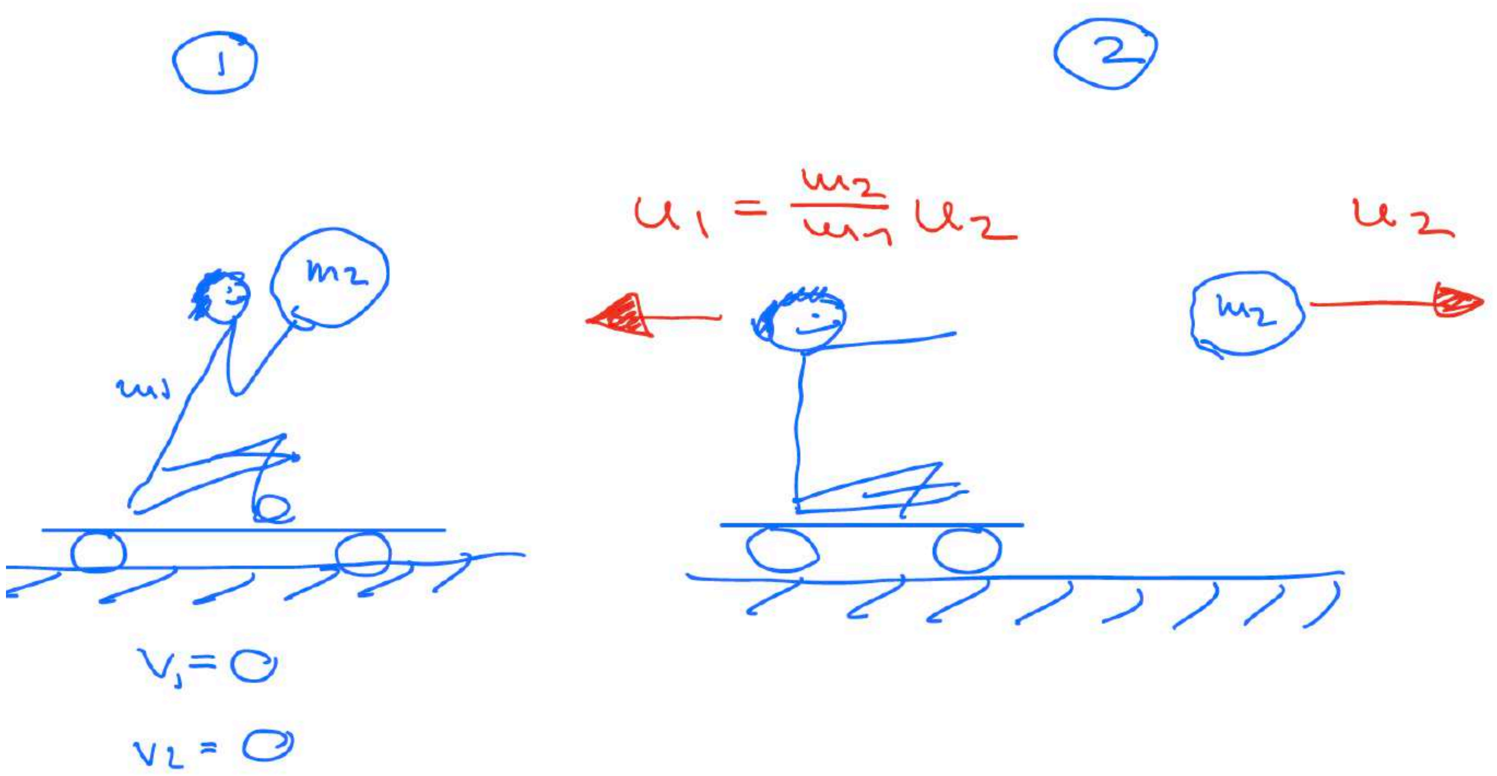
Bei zwei Teilchen

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$$

d.h. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const.$

Vorher = $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$

Nachher = $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$



Impulserhaltung

$\dot{\vec{P}} = 0$ **d.h. der Gesamtimpuls ist erhalten!**

Teilchen in einem abgeschlossen System
bewegen sich nur auf denjenigen Bahnen im Phasenraum
auf denen der Impuls und die Energie erhalten ist

Ende 4. Vorlesung