5. Vorlesung

Wiederholung: Ableitung

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **und somit** $\dfrac{df(t)}{dt} = 2t$

2. $f(t) = t^n$ **und somit** $\dfrac{df(t)}{dt} = nt^{n-1}$

3. $\dfrac{d(t^3)}{dt} = 3t^2$, $\dfrac{d(1)}{dt} = \dfrac{d(t^0)}{dt} = 0$, $\dfrac{d(t^5)}{dt} = 5t^4$, $\dfrac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \dfrac{d(t^{-1})}{dt} = -t^{-2} = -\dfrac{1}{t^2}$

4. **Spezielle Funktionen:**

$$\frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t\,, \quad \frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t\,, \qquad \frac{d(e^t)}{dt} = e^t, \quad \frac{d(\log t)}{dt} = \frac{1}{t}$$

Wiederholung: Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left[cf(t)\right]}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left[f(t)+g(t)\right]}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left[f(t)g(t)\right]}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

4. **Kettenregel: $g = g(t)$ und $f = f(g)$**

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}$$

Wiederholung: Integrieren

Betrachte die Funktion $F(T)$:

$$F(T) = \int_a^T f(t)dt \qquad \textbf{schlampig:} \quad F(t) = \int f(t)dt$$

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Wiederholung: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a dt = at + c$$

2. $$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

4. $$\int \sin t \, dt = -\cos t + c$$

5. $$\int \cos t \, dt = \sin t + c$$

6. $$\int e^t \, dt = e^t + c$$

7. $$\int \frac{dt}{t} = \ln t + c$$

8. $$\int af(t)dt = a \int f(t)dt$$

9. $$\int \left[f(t) \pm g(t)\right] dt = \int f(t)dt \pm \int g(t)dt$$

Wiederholung: Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\frac{d\sin x}{dx}\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Partielle Integration funktioniert erstaunlich oft!

Wiederholung: Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit

"Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig"

"Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt"

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = 0$**:** $\quad \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow x(t) = v_0 t + x_0$

$F = mg$**:** $\quad \Rightarrow x(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$

Freier Fall

Es gibt zwei Anfangs-bedingungen

$F = -kx$**:** $\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x \qquad \Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

Federpendel

Wiederholung: Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

$V(x, y)$ **: z.B. 3-dimensionale Landschaft:** V **entspricht der Höhe**
$V(x, y, z)$**: z.B. Potential mit unterschiedlichen Werten an verschiedenen Raumpunkten**

Die Funktion $V(x, y, z)$ **kann nach jeder der 3 Variablen abgeleitet werden:**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta x} \quad \textbf{mit} \quad \Delta V_x = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta V_y}{\Delta y} \quad \textbf{mit} \quad \Delta V_y = V(x, y + \Delta y, z) - V(x, y, z)$$

Man kann auch mehrfach ableiten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} \equiv \partial_{x,x} V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} \equiv \partial_{x,y} V$$

Man kann beweisen: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$

Wiederholung: Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte:

$$\frac{dF}{dy} = 0$$

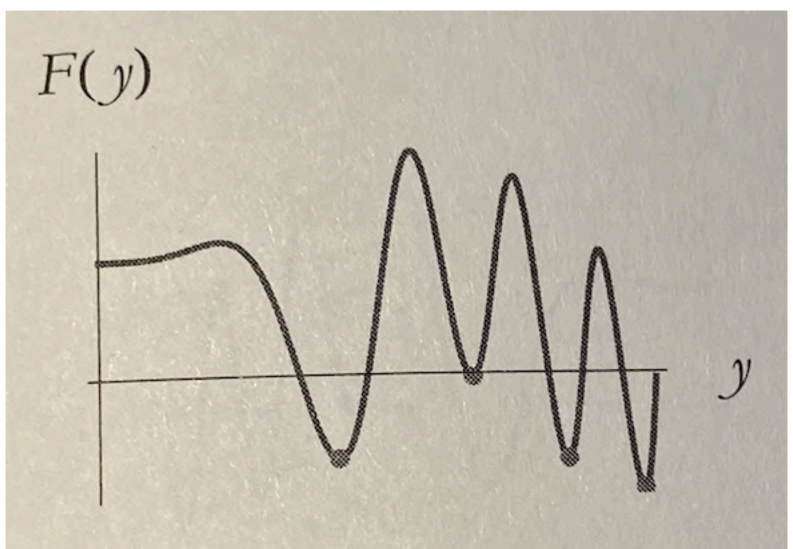


Figure 2: Local minima.

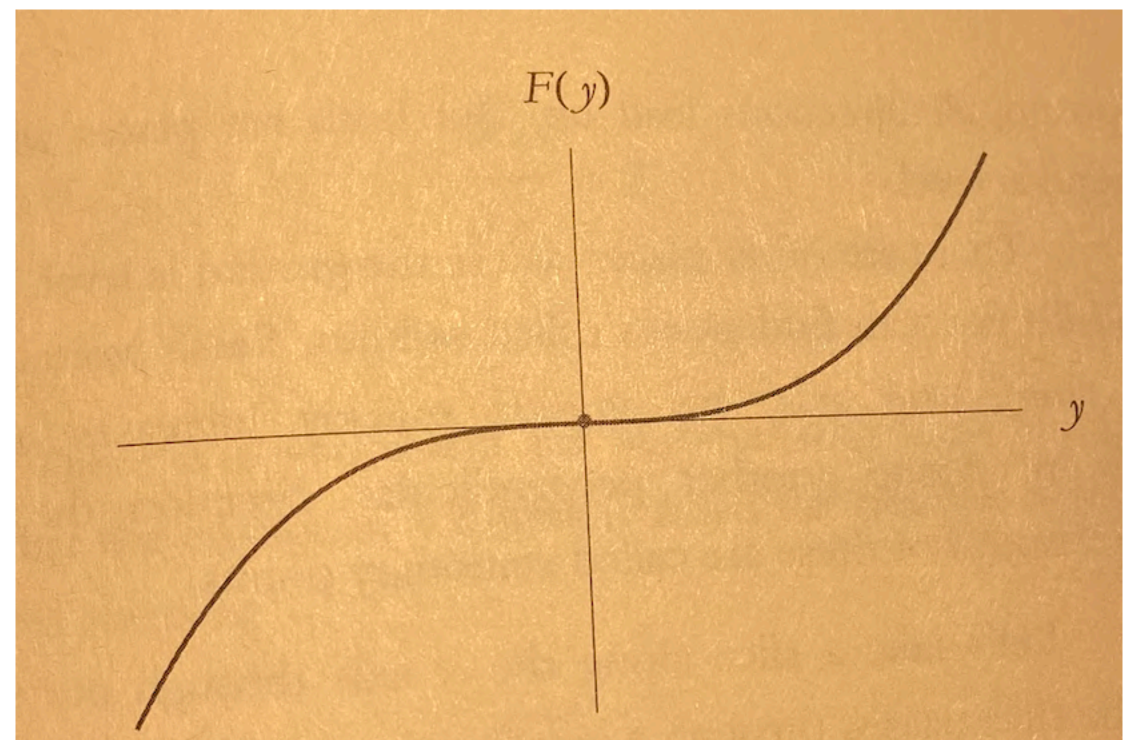


Figure 4: Point of inflection.

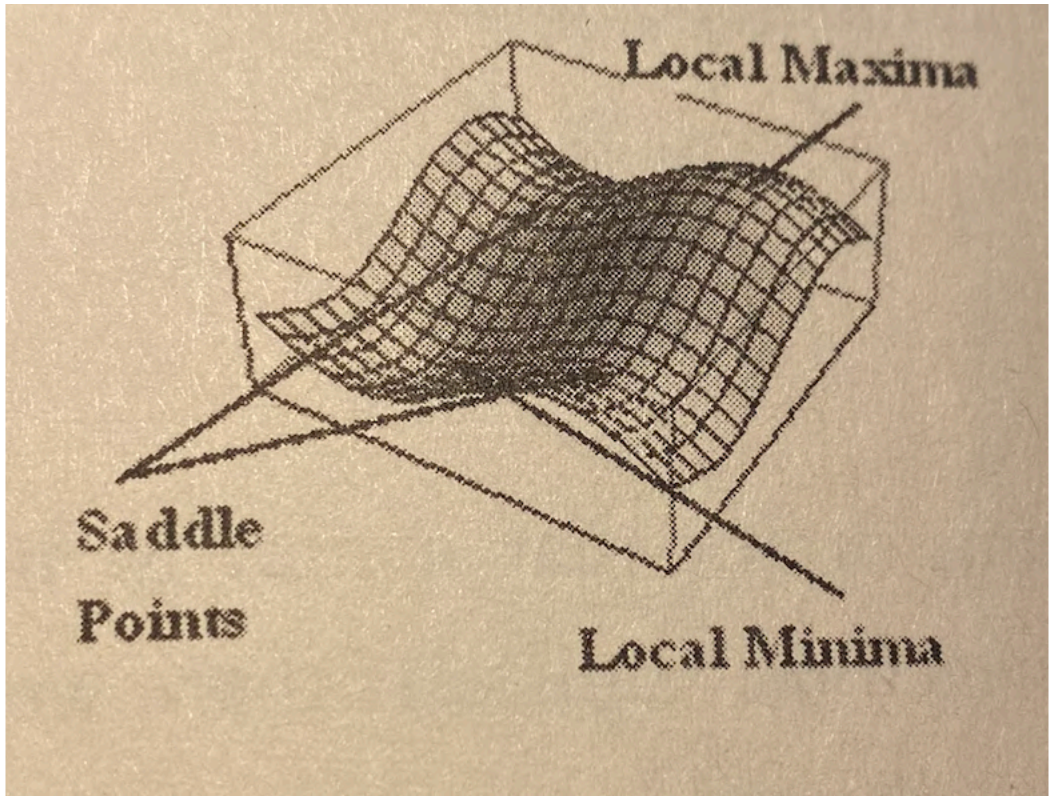
Lokales Maximum: $\frac{d^2F}{dy^2} < 0$

Lokales Minimum: $\frac{d^2F}{dy^2} > 0$

Wendepunkt: $\frac{d^2F}{dy^2} = 0$

Wiederholung: Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte in mehreren Dimensionen:



Für ein Minimum, Maximum, Sattelpunkt braucht man: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial F}{\partial y}$

allgemein: $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \delta F = 0$ **Def.:** $\delta F = \sum_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i$

Betrachte die 2. Ableitungen in 2 Dimensionen: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ **und** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

Wiederholung: Maxima, Minima, Wendepunkt

Hesse Matrix: $$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Determinante der Hesse Matrix : $$\det H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Spur der Hesse Matrix: $$\mathrm{Tr}\, H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Regeln für Punkte mit $\delta F = 0$:

1. **Det H > 0 & Tr H > 0: lokales Minimum**
2. **Det H > 0 & Tr H < 0: lokales Maximum**
3. **Det H < 0 : Sattelpunkt**

Wiederholung: Beispiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

1. Ableitungen: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos x$ **und** $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos y$

verschwindet bei $x, y = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$

2. Ableitungen : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x$ **,** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin y$ **und** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$

Determinante $\det H = \sin x \sin y$

Spur **Tr** $H = -\sin x - \sin y$

Für den Punkt $x = \dfrac{\pi}{2}$ **,** $y = \dfrac{\pi}{2}$ **gilt mit** $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$: $\det H = +1$ **und tr** $H = -2$

1. **Det H > 0 & Tr H > 0: lokales Minimum**
2. **Det H > 0 & Tr H < 0: lokales Maximum**
3. **Det H < 0 : Sattelpunkt**

Wiederholung: Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Abgeleitete Kräfte

Reibungskräfte
- abgeleitet aus molekularen und atomaren Kräften

konstante Gravitationskraft
- genähert aus fundamentaler Gravitationskraft

Federkraft
- abgeleitet aus Festkörper-Wechselwirkungen

...

Fundamentale Kräfte

Gravitationskraft: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ $\quad G = 6.67430 \cdot 10^{-11} \dfrac{Nm^2}{kg^2}$

Coulombkraft: $F = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$ $\quad \epsilon_0 = 8.854187812 \cdot 10^{-12} \dfrac{As}{Vm}$

Wiederholung: Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1,\ldots,N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\overrightarrow{F}_i$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N)$

$$\overrightarrow{F}_l = \overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right)$$

Nach Newton gilt $\overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l\vec{a}_i = m_l\dfrac{d^2\vec{r}_l}{dt^2}$

oder in Komponentenform

$$(F_x)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l(a_x)_l = m_l\frac{d^2x_l}{dt^2}$$

$$(F_y)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l(a_y)_l = m_l\frac{d^2y_l}{dt^2}$$

$$(F_z)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l(a_z)_l = m_l\frac{d^2z_l}{dt^2}$$

D.h. es gibt $3N$ **Gleichungen, die der Weltgeist lösen muss**

Wiederholung: Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

4. Newton's Welt mit N Teilchen:
   $2N$ Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0), \dot{\vec{r}}_1(t_0), \ldots, \dot{\vec{r}}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N)$

   Pro Teilchen: 6 Dimensionen

   6 Gleichungen pro Teilchen: $m\dfrac{dv_i}{dt} = F_i$ und $\dfrac{dx_i}{dt} = v_i$

Wiederholung: Impuls und Energie

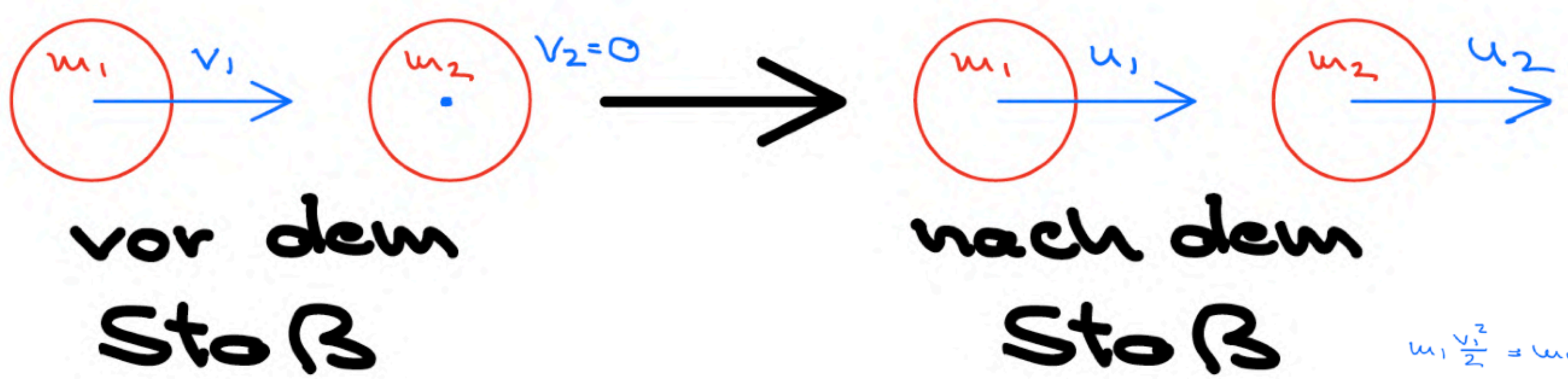
Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die “Wucht” durch zwei Größen dargestellt werden.

1. **Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

2. **Impuls:** $\vec{p} = m\vec{v}$ **bzw.** $p_i = mv_i$

Sowohl die Energie, als auch der Impuls ist erhalten



$m_1\frac{v_1^2}{2} = m_1\frac{u_1^2}{2} + m_2\frac{u_2^2}{2}$

$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \Leftrightarrow v_1 = u_1 + \frac{m_2}{m_1}u_2$

$\cancel{m_1\frac{u_1^2}{2}} + m_1\frac{2u_1u_2}{2}\frac{\cancel{m_2}}{m_1} + \frac{m_1}{2}\frac{m_2^{\cancel{2}}}{m_1^2}u_2^2 = \cancel{m_1\frac{u_1^2}{2}} + \cancel{m_2}\frac{u_2^2}{2}$

$u_1u_2 + \frac{m_2}{2m_1}u_2^2 - \frac{u_2^2}{2} = 0$

$2m_1u_1u_2 + m_2u_2^2 - m_1u_2^2 = 0 \quad \rightarrow u_2 = 0$ ↯

$2m_1u_1 + (m_2 - m_1)u_2 = 0$

$\Rightarrow u_1 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}u_2$

$m_1 = m_2 \Rightarrow u_1 = 0$

$\Rightarrow u_2 = v_1$

Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

Impulserhaltung: $m_1v_1 + 0 = m_1u_1 + m_2u_2$

Wiederholung: Phasenraum

Statt dem Zustandsraum $\left\{\vec{r},\dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1,\ldots.,\vec{r}_N,\dot{\vec{r}}_1,\ldots.,\dot{\vec{r}}_N)$

kann man auch $\left\{\vec{r},\vec{p}\right\} = (\vec{r}_1,\ldots.,\vec{r}_N,\vec{p}_1,\ldots.,\vec{p}_N)$ verwenden, letzterer Zustandsraum wird auch **Phasenraum** genannt

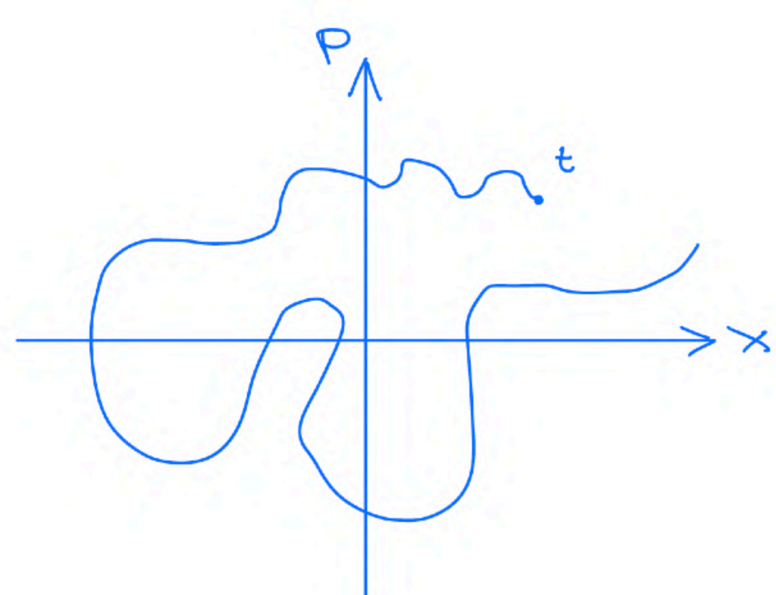
Phasenraum = Konfigurationsraum + Impulsraum

Für ein Teilchen im 3 dimensionalen Raum

$$\mathbb{R}^6 \quad \equiv \quad \mathbb{R}^3 \quad + \quad \mathbb{R}^3$$

6 Gleichungen pro Teilchen: $\dot{p}_i = m_i \dfrac{dv_i}{dt} = F_i$ und $\dfrac{dx_i}{dt} = v_i = \dfrac{p_i}{m_i}$

Für ein Teilchen in 1 Dimension $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} + \mathbb{R}$



Für N Teilchen im 3 dimensionalen Raum: $\mathbb{R}^{6N}$

Wiederholung: Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$**:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

Annahme: $v_0 = 0$ $\quad \Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

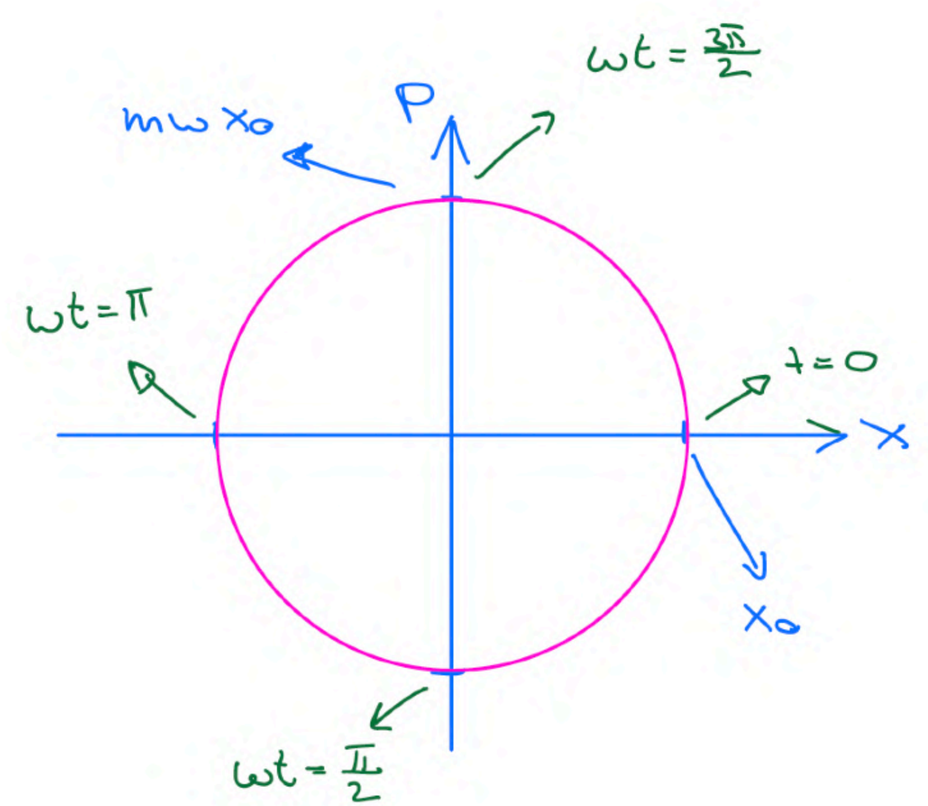
$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) \qquad \Rightarrow p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$

$\omega t = 0 \;\Rightarrow x = x_0\,,\, p = 0$

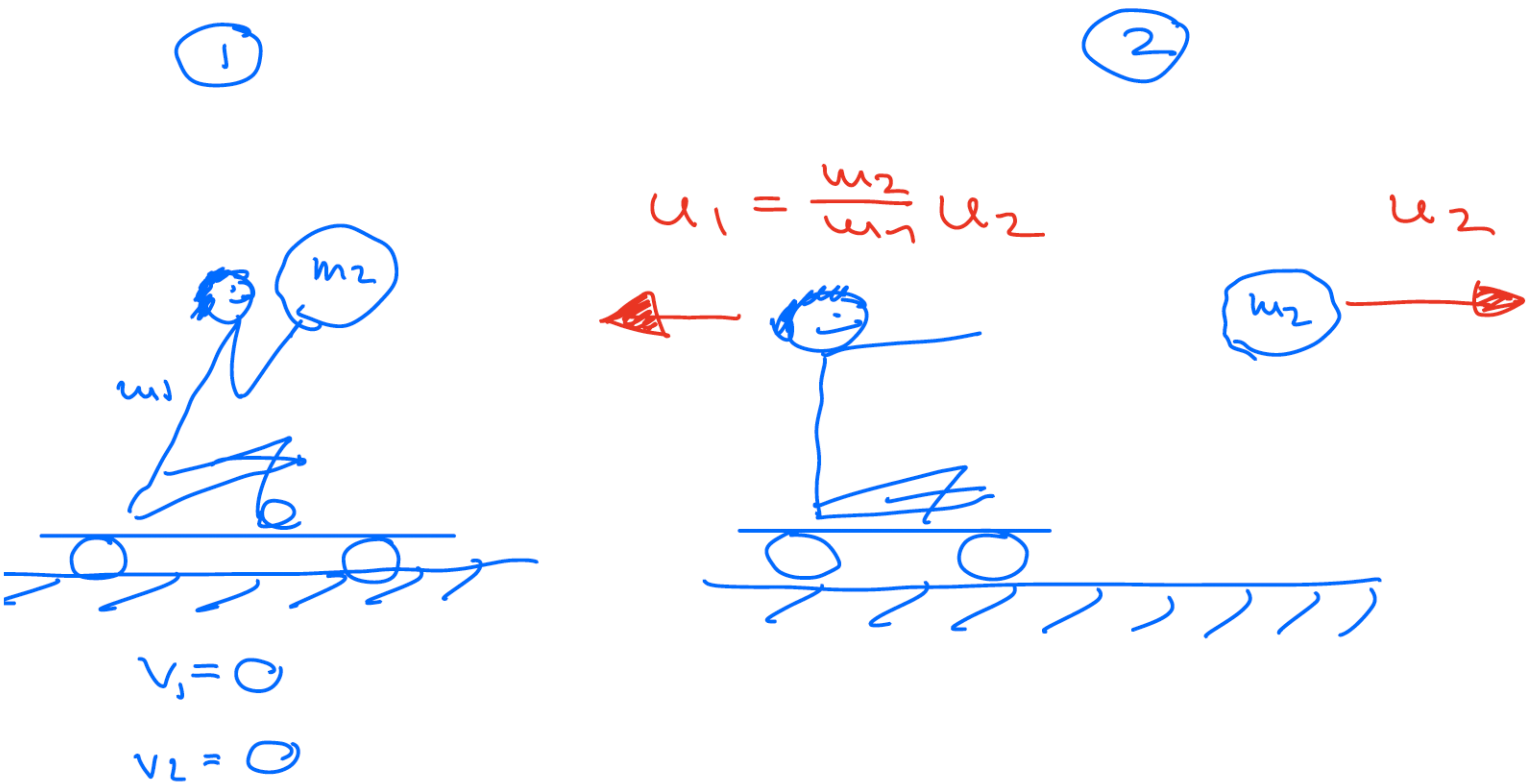
$\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0\,,\, p = -m\omega x_0$

$\omega t = \pi \Rightarrow x = -x_0\,,\, p = 0$

$\omega t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 0\,,\, p = +m\omega x_0$



Wiederholung: Impulserhaltung



Wiederholung: Impulserhaltung

Impulserhaltung kann aus der Invarianz der dynamischen Gesetze unter Raumtranslation hergeleitet werden (via Noether-Theorem)
oder
aus dem 3. Newtonschen Gesetz

Actio = Reactio

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen
Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Die Gesamtkraft auf das Teilchen i lautet $\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

2. Newtonsches Gesetz: $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ **des Systems ändert sich damit mit der Zeit, wie**

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{f}_{ij} = \underbrace{\vec{f}_{11}}_{=0} + \underbrace{\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}}_{=0} + \underbrace{\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}}_{=0} + \ldots .$$

$\dot{\vec{P}} = 0$, d.h. der Gesamtimpuls ist erhalten!

Wiederholung: Impulserhaltung

Bei zwei Teilchen

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$$

d.h. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const.$

Vorher = $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$

Nachher = $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$

1

$v_1 = 0$

$v_2 = 0$

2

$u_1 = \frac{m_2}{m_1} u_2$

Wiederholung: Impulserhaltung

$\dot{\vec{P}} = 0$ **d.h. der Gesamtimpuls ist erhalten!**

Teilchen in einem abgeschlossen System
bewegen sich nur auf denjenigen Bahnen im Phasenraum
auf denen der Impuls und die Energie erhalten ist

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **…**

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Potentielle Energie:

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden:

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

Bsp: Gravitation $V(r) = G\frac{m_1 m_2}{r}$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

Bsp: Gravitation

$$V(r) = G\frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

Bsp: Gravitation

$$V(r) = G\frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Bsp: Coulombpotential - elektrische Kraft

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

Bsp: Gravitation

$$V(r) = G\frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Bsp: Coulombpotential - elektrische Kraft

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_1 m_2}{r}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- kinetische Energie
- potentielle Energie
- thermische Energie
- chemische Energie
- nukleare Energie
- ...

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

Bsp: Gravitation

$$V(r) = G\frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Bsp: Coulombpotential - elektrische Kraft

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

Bsp: Gravitation

$$V(r) = G\frac{m_1m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

Bsp: Coulombpotential - elektrische Kraft

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_1m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_1m_2}{r^2}$$

Potentielle Energie kann aus der Kraft bestimmt werden: $V(x) = -\int F(x)dx$

Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- **kinetische Energie**
- **potentielle Energie**
- **thermische Energie**
- **chemische Energie**
- **nukleare Energie**
- **...**

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

Bsp: Gravitation

$$V(r) = G\frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Bsp: Coulombpotential - elektrische Kraft

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Potentielle Energie kann aus der Kraft bestimmt werden: $V(x) = -\int F(x)dx$

Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x)\right)$$

Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x)\right)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{1}{2}m2v\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x)\right)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{1}{2}m2v\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}E = \left(m\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\right)v$$

Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x)\right)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{1}{2}m2v\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}E = \left(m\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\right)v$$

$$\frac{d}{dt}E = (ma - F)\,v$$

Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x)\right)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{1}{2}m2v\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}E = \left(m\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\right)v$$

$$\frac{d}{dt}E = (ma - F)\,v = 0$$

Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x)\right)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{1}{2}m2v\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}E = \left(m\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\right)v$$

$$\frac{d}{dt}E = (ma - F)\,v = 0$$

$F = ma$ **impliziert also die Energieerhaltung**

Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x)\right)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{1}{2}m2v\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}E = \left(m\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\right)v$$

$$\frac{d}{dt}E = (ma - F)\,v = 0$$

$F = ma$ **impliziert also die Energieerhaltung**

Impulserhaltung ist jetzt im Potential versteckt….

Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + V(x) \right)$$

$$\frac{d}{dt} E = \frac{1}{2} m 2 v \dot{v} + \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} E = \left(m \dot{v} + \frac{dV(x)}{dx} \right) v$$

$$\frac{d}{dt} E = (ma - F)\, v = 0$$

$F = ma$ **impliziert also die Energieerhaltung**
Impulserhaltung ist jetzt im Potential versteckt….
(Potential wird z.B. von der Erde erzeugt, wenn ein Körper fällt, dann ändert sich deren Impuls)

Energieerhaltung

Im Falle von 3 Dimensionen und N Teilchen gilt

$m_i \ddot{x}_i = F_i(\{x\})$ **mit** $i = 1,\ldots,3N$

Energieerhaltung

Im Falle von 3 Dimensionen und N Teilchen gilt

$m_i \ddot{x}_i = F_i(\{x\})$ **mit** $i = 1,\ldots,3N$

Die Kraft kann in diesem Fall auch aus einem Potential abgeleitet werden

Energieerhaltung

Im Falle von 3 Dimensionen und N Teilchen gilt

$m_i \ddot{x}_i = F_i(\{x\})$ **mit** $i = 1,\ldots,3N$

Die Kraft kann in diesem Fall auch aus einem Potential abgeleitet werden

$$F_i(\{x\}) = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Energieerhaltung

Im Falle von 3 Dimensionen und N Teilchen gilt

$m_i \ddot{x}_i = F_i(\{x\})$ **mit** $i = 1,\ldots,3N$

Die Kraft kann in diesem Fall auch aus einem Potential abgeleitet werden

$$F_i(\{x\}) = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Dies impliziert die Energieerhaltung!!!

Energieerhaltung

Ausgehend von

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Energieerhaltung

Ausgehend von

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Können wir eine erhaltene Energie herleiten:

Energieerhaltung

Ausgehend von

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Können wir eine erhaltene Energie herleiten:

$$m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

Energieerhaltung

Ausgehend von

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Können wir eine erhaltene Energie herleiten:

$$m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = -\sum_i \frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

Energieerhaltung

Ausgehend von

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Können wir eine erhaltene Energie herleiten:

$$m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = -\sum_i \frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2}_{=:T} = -\frac{d}{dt} V$$

Energieerhaltung

Ausgehend von

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Können wir eine erhaltene Energie herleiten:

$$m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = -\sum_i \frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2}_{=:T} = -\frac{d}{dt} V$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

Energieerhaltung

• $V = \frac{k}{2}(x^2+y^2)$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2+y^2)$$

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -ky \Rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y$$

Allg:

$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

$y = C\sin\omega t + D\cos\omega t$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = A^2\sin^2 + 2AB\sin\cos + B^2\cos^2 + C^2\sin^2 + 2CD\sin\cos + D^2\cos^2$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2+\dot{y}^2 = \omega^2\left[A^2\cos^2 - 2AB\sin\cos + B^2\sin^2 + C^2\cos^2 - 2CD\sin\cos + D^2\sin^2\right]$$

E = const:

$$E = \frac{k}{2}\left[A^2 + 0 + B^2 + C^2 + D^2\right]$$

circular orbit:

z.B. $A=0;\ B=1$, $C=1;\ D=1$

$x = \cos\omega t$

$y = \sin\omega t$

$$x^2+y^2 = (A^2+C^2)\sin^2\omega t + 2(AB+CD)\sin\omega t\cos\omega t + (B^2+D^2)\cos^2\omega t$$

um mit Ellipse sein

• $V = \frac{k}{2(x^2+y^2)}$

Ansatz: $x = \cos\omega t,\ y = \sin\omega t \Rightarrow E = \frac{m}{2}\omega^2 + \frac{k}{2} = \text{const.}$ ⇒ das würde passen

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{k}{2}\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x = -\frac{kx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$F_y = -\frac{ky}{(x^2+y^2)^2}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{kx}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow -m\omega^2\cancel{\cos\omega t} = \frac{-k\cancel{\cos\omega t}}{1} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{ky}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow -m\omega^2\cancel{\sin\omega t} = \frac{-k\cancel{\sin\omega t}}{1} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Ansatz

$x = \cos\omega t$

$y = \sin\omega t$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 1$

Herleitung der konstanten Gravitationskraft

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = G\frac{m_1 m_2}{(r_E+\delta)^2} = G\frac{m_1}{r_E^2}\cdot m_2 \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{r_E}\right)^2} \quad ; \quad (1+x)^n \simeq 1+nx$$

$$\simeq \underbrace{G\frac{m_1}{r_E^2}}_{g}\cdot m_2 \cdot \left(1 - 2\frac{\delta}{r_E}\right)$$

$$= mg - mg\,2\frac{\delta}{r_E}$$

$2\frac{\delta}{r_E}$

1 m : $2\frac{\delta}{r_E}$ 0.00000031

10 m 0.0000031

100 m 0.000031

$$E = V(x+\delta) - V(x)$$

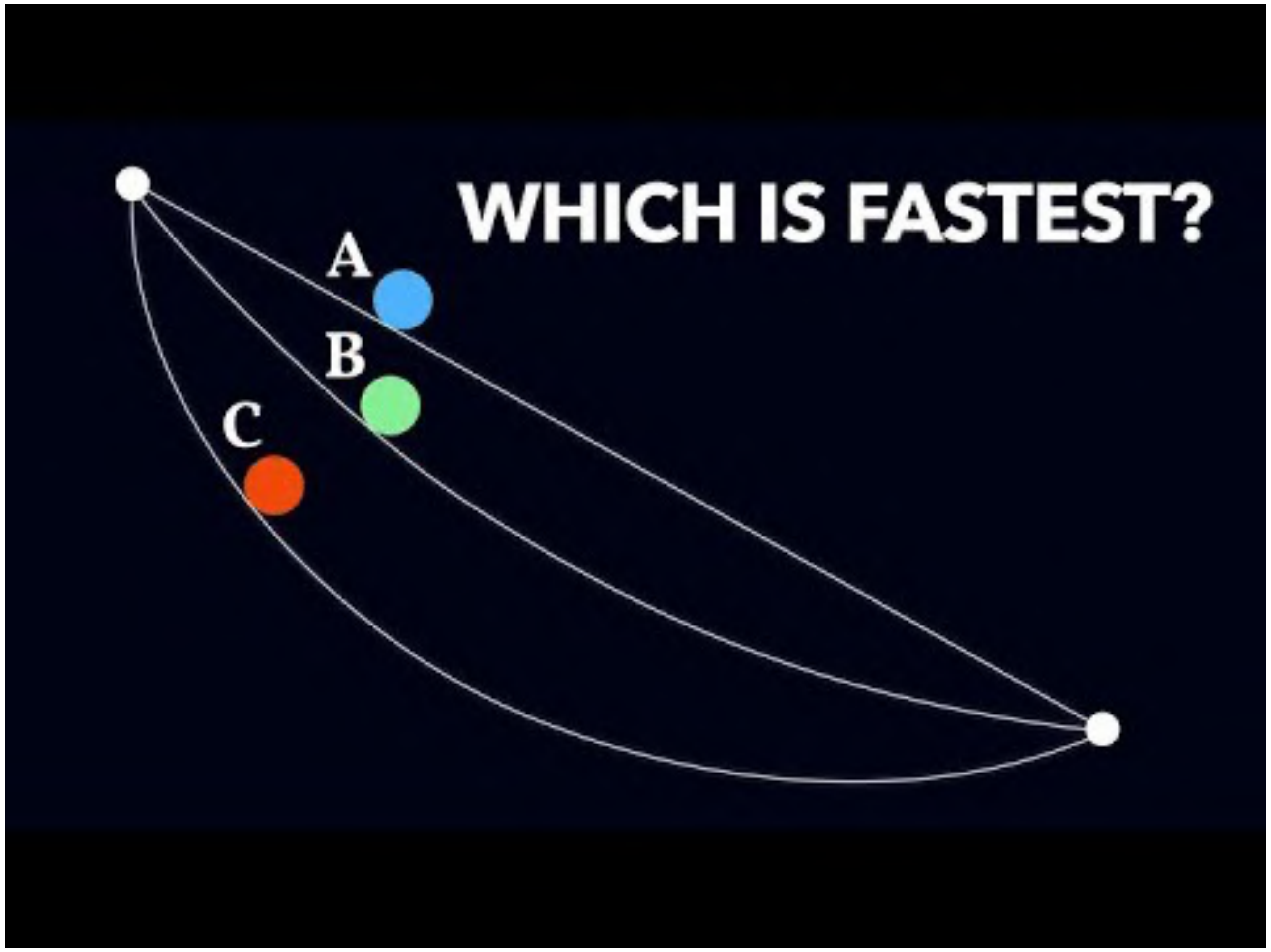
$$= -\left[G\frac{m_1 m_2}{x+\delta} - G\frac{m_1 m_2}{x}\right]$$

$$= -G\frac{m_1 m_2}{x}\left\{\frac{1}{1+\frac{\delta}{x}} - \frac{1}{x}\right\}$$

$$\simeq -G\frac{m_1 m_2}{x}\left\{1 - \frac{\delta}{x} - 1\right\}$$

$$= G\frac{m_1 m_2}{r_E^2}\,\delta = mgh$$

Prinzip der kleinsten Wirkung



https://www.youtube.com/watch?v=Q10_srZ-pbs

Noch was für die Ferien

https://www.youtube.com/watch?v=qyYEfPFtgmY

Ende 5. Vorlesung