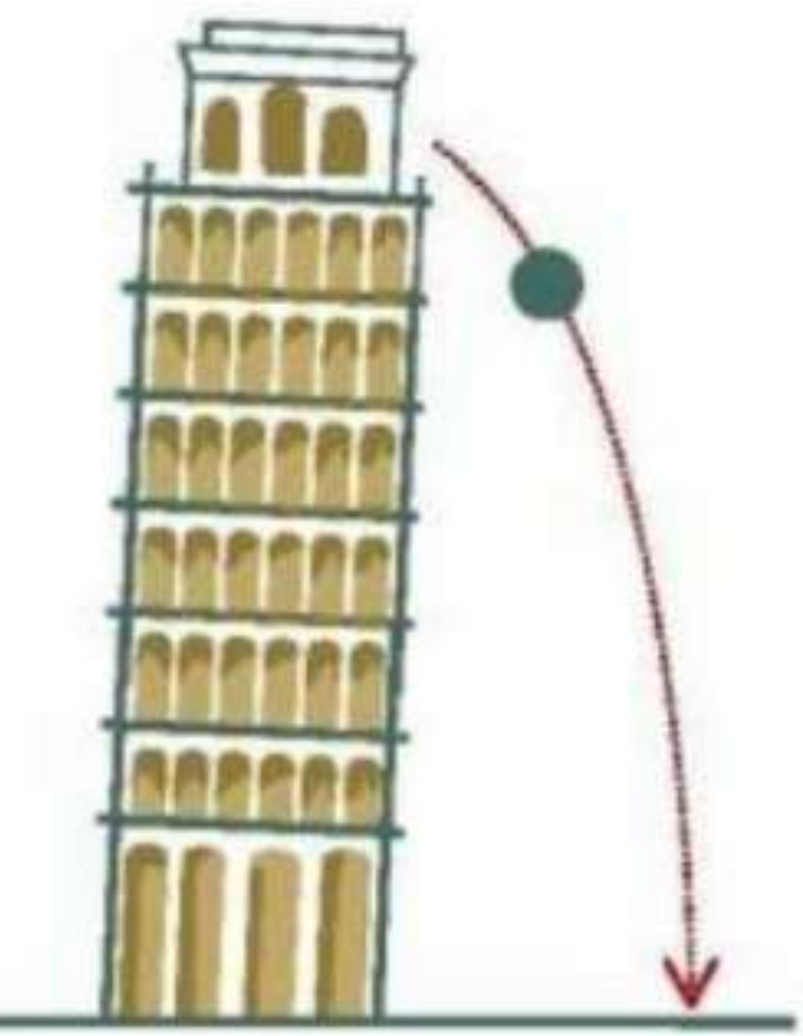
6. Vorlesung

Ein
gesundes und fröhliches
2025

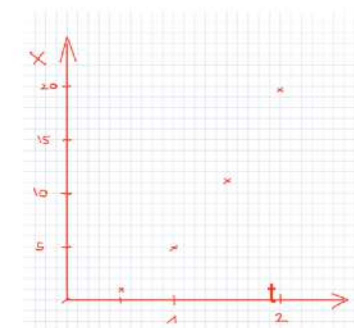
Wdh. 1. Vorlesung: Naturgesetze



Grundidee: Physik

i) Finde Gesetze

x	5 m	10m	20m
t	1s	1.5s	2s



ii) Formuliere diese mathematisch

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2x(t)}{g}}$$

Ableiten

$$v = gt \Leftrightarrow v = \sqrt{2gx}$$

iii) Führe Gesetze auf elementarere Prinzipien zurück

- **Energieerhaltung:** $E_{kin.} = E_{pot.} \Rightarrow v = \sqrt{2gx}$
- **Newtonsche Gesetze:** $F = ma \Rightarrow x = \frac{1}{2}gt^2$ **Integrieren**
- **Numerische Lösung**
- **Prinzip der kleinsten Wirkung**

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

System:= Menge von Objekten, z.B. Teilchen, Felder, Wellen…

Geschlossenes System:= völlig abgeschlossen von der Umwelt, keine Wechselwirkung

Zustand:= Objekte können in verschiedenen Zuständen sein, z.B. Objekt Münze kann in den Zuständen “Kopf” oder “Zahl” sein; Objekt Teilchen kann im Zustand x= 3.45m, v = 12.4 m/s sein

Zustandsraum:= Menge aller möglichen Zustände eine Objektes, z.B. Münze {Kopf, Zahl}; Teilchen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Dynamisches System:= System das sich mit der Zeit ändert, besteht aus Zustandsraum und dem Bewegungsgesetz oder dynamischen Gesetz. Zeit kann **kontinuierlich** ablaufen (Parameter $t \in \mathbb{R}$), oder in **diskreten** Schritten (Parameter $n \in \mathbb{N}$) .

Deterministisches dynamisches System:= ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen **zukünftigen** Zeitpunkt bestimmt werden.

Klassische Mechanik ist deterministisch und reversibel

Reversibles dynamisches System:= ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen vergangenen Zeitpunkt bestimmt werden.

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

Beispiel 2: System mit zwei Zuständen

Z. B. Münze: Kopf K oder Zahl Z zeigt nach oben

$\boxed{K}$ $\boxed{Z}$

Freiheitsgrad: Variable, die das System beschreibt, hier σ:

Kopf: $\sigma = +1$

Zahl: $\sigma = -1$

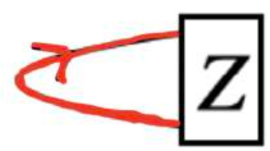
Dynamische Gesetze

Mathematische Formel: System zur Zeit n: $\sigma(n)$

A) Mache nichts:

$KKKKKKKKKKKKKK.......$

$ZZZZZZZZZZZZZZZZZ.....$

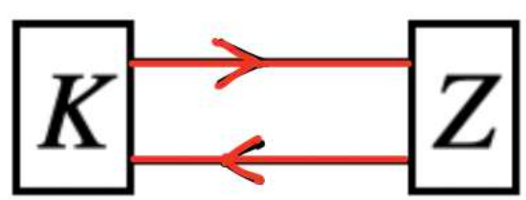


$$\sigma(n+1) = \sigma(n)$$

B) Ändere immer den Zustand:

$ZKZKZKZKZKZKZKZK...$

$KZKZKZKZKZKZKZKZ...$

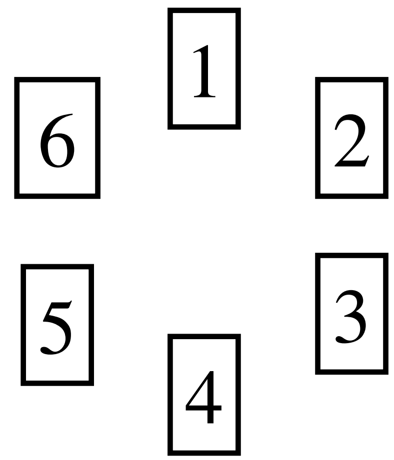


$$\sigma(n+1) = -\sigma(n)$$

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

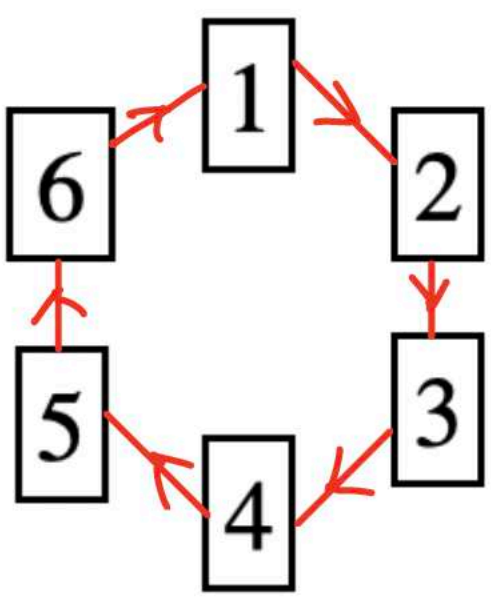
Beispiel 3: System mit sechs Zuständen

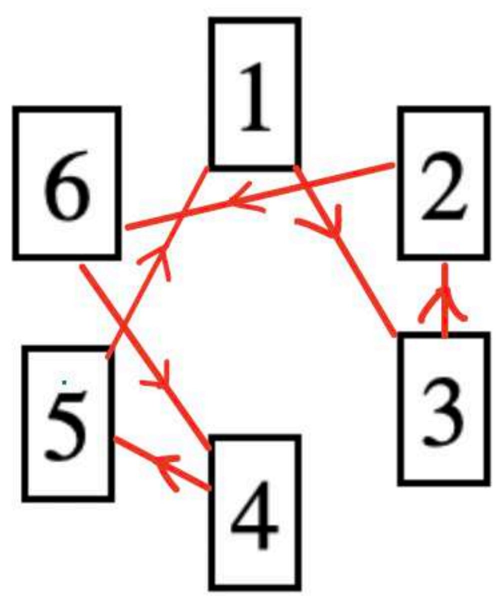
Z. B.Würfel:



Dynamische Gesetze

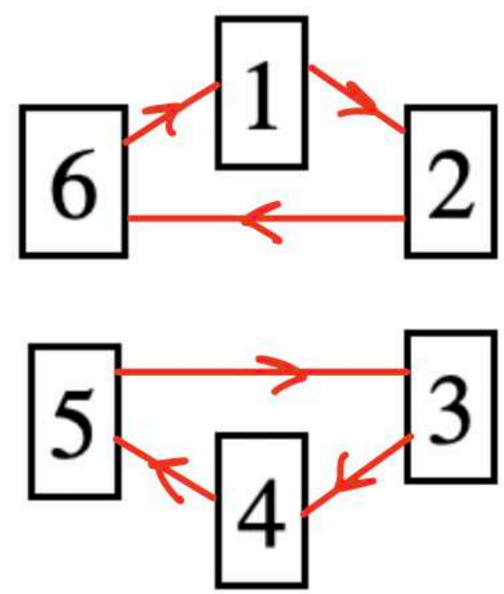
123456123456….
Deterministisch?
Reversibel?

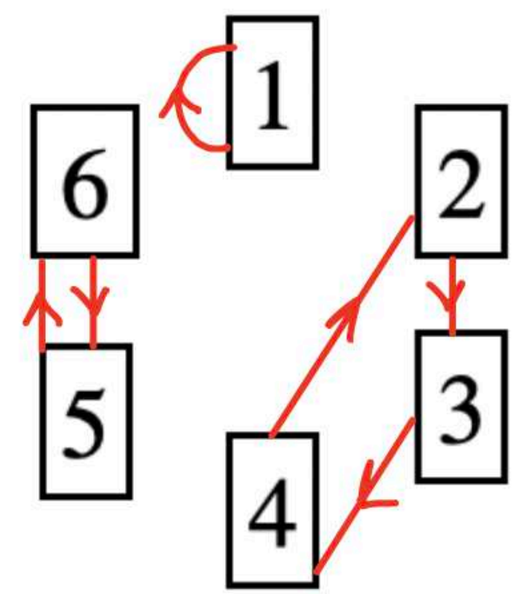




Wenn man die Seiten vom Würfel umenumeriert, dann ist das äquivalent zum 1. Fall

2 Zyklen: 612612…, 534534….
Deterministisch?
Reversibel?

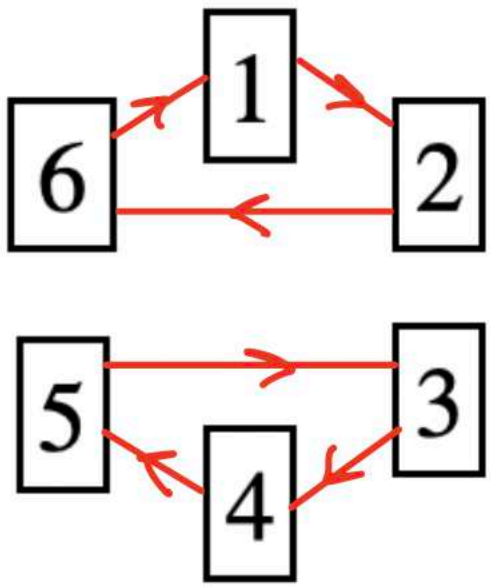




3 Zyklen:
111111…, 565656…, 234234….
Deterministisch? Reversibel?

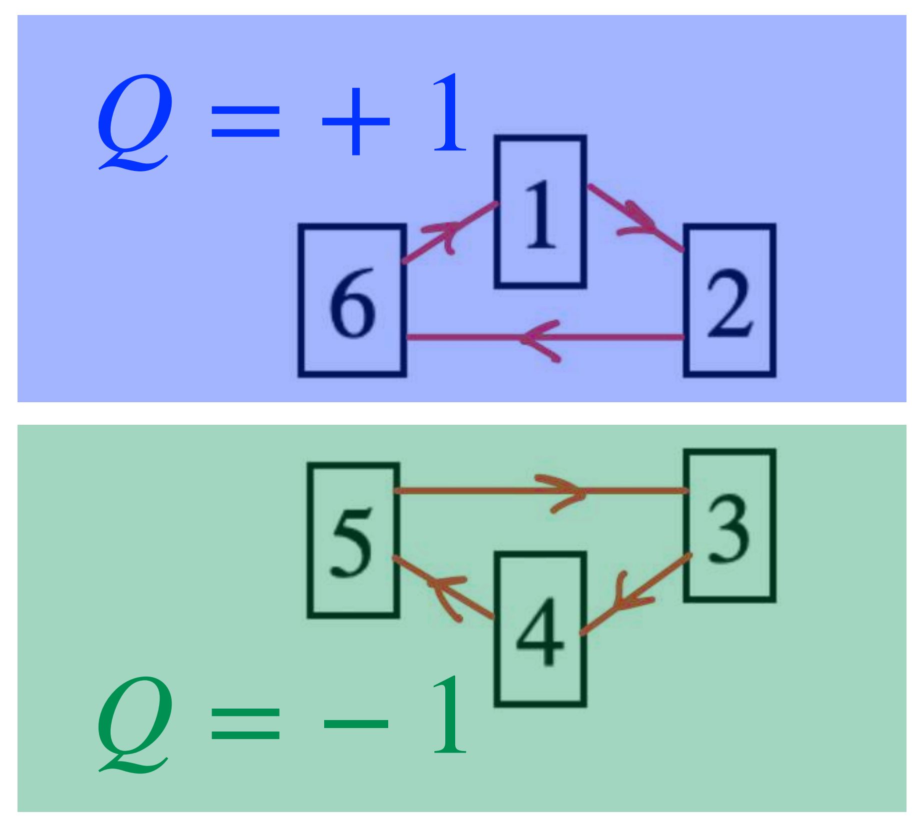
Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

Zyklen und Erhaltungssätze



Ist ein System in einem Zyklus, dann entkommt es diesem nicht mehr
oder
das System erinnert sich in welchem Zyklus es war

Ordnet man einem Zyklus eine Größe Q zu, dann ist diese Größe bei der dynamischen Zeitentwicklung erhalten



Genau das passiert z.B. bei der Energieerhaltung: es sind bei der Bewegung nur die Zustände erlaubt, die dieselbe Energie haben

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

Unendlich viele Zustände

$$\boxed{\ldots}\ \boxed{-3}\ \boxed{-2}\ \boxed{-1}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{\ldots}$$

Wert des Zustandes wird mit N **bezeichnet,** $N \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Wert des Zustandes zur Zeit n**:** $N(n)$

Weitere Gesetze:

$$N(n+1) = N(n) - 1$$

$$N(n+1) = N(n) + 2$$

Deterministisch?
Reversibel?
Gibt es verschiedene Zyklen?

$$N(n+1) = (N(n))^2$$

Wdh. 1. Vorlesung: Dynamische Systeme

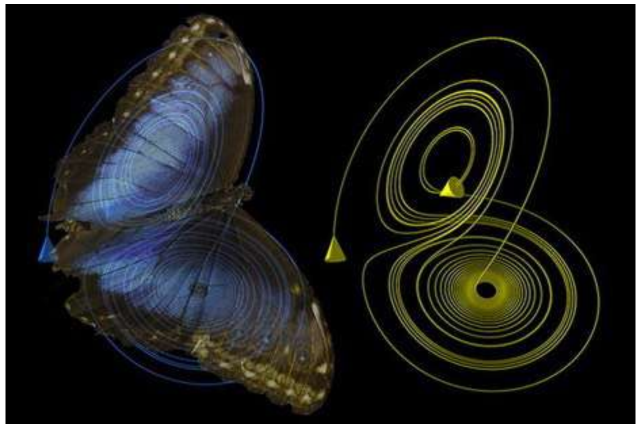
Grenzen der Präzision

Ist das System zum Anfangszeitpunkt exakt bekannt, dann kann auch die Zukunft exakt berechnet werden
z.B. Münze

Es kann aber auch unmöglich sein das System zum Anfangszeitpunkt exakt zu kennen:
z.B.: Teilchen mit Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit

Geringe Sensibilität,
lineare Dynamik

Hohe Sensibilität,
nicht-lineare Dynamik

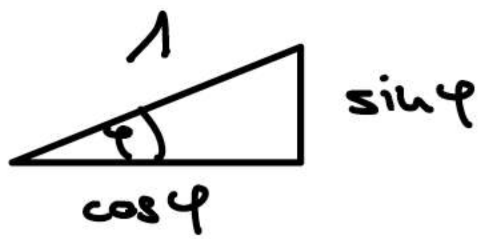


Zukunft kann näherungsweise berechnet werden

Zukunft kann nicht wirklich berechnet werden (Chaos)

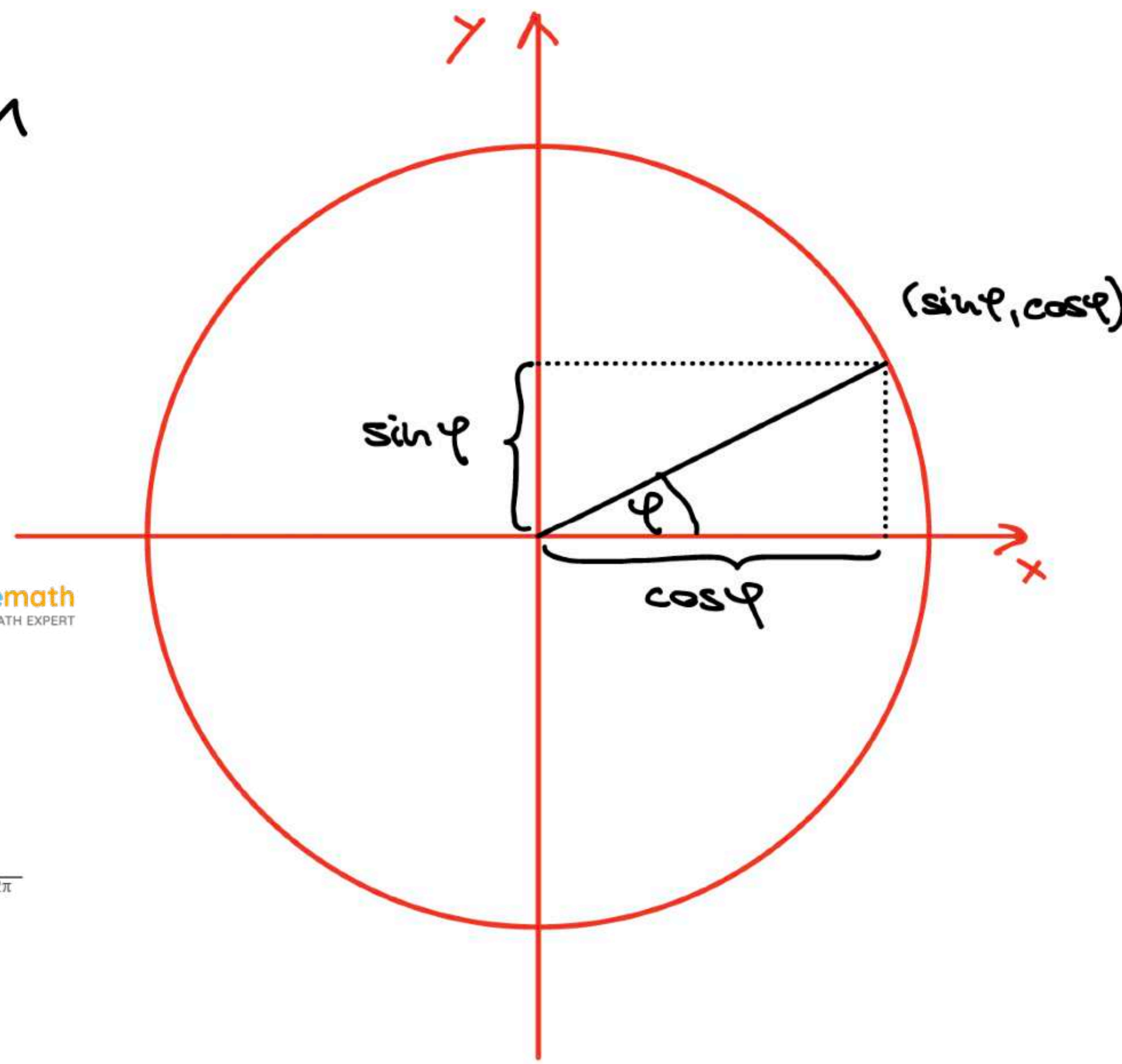
Wiederholung 2. Vorlesung

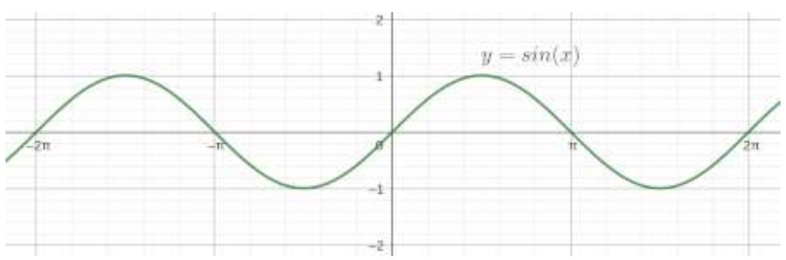
Trigonometrische Funktionen

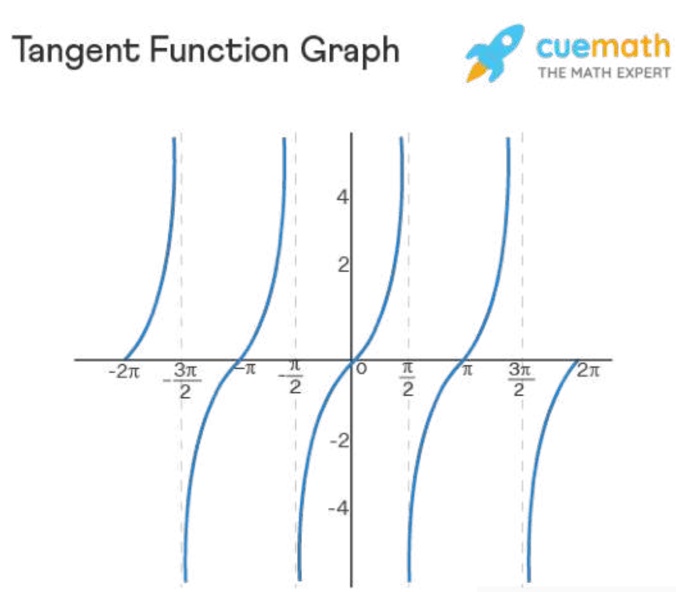


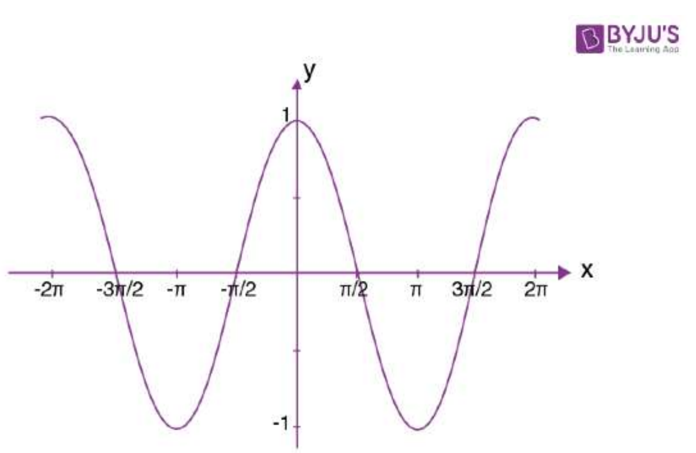
$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

φ beliebig



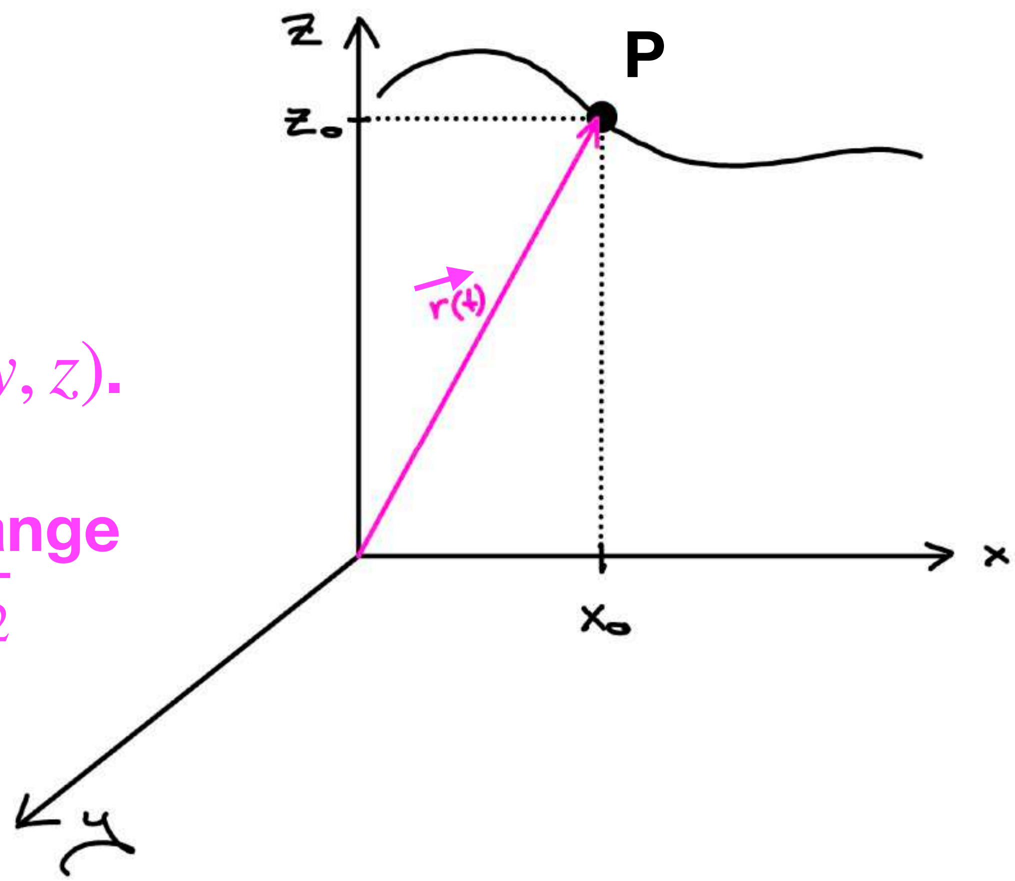






Wiederholung 2. Vorlesung: Vektoren,…

Der Punkt P hat die Koordinaten $(x_0, 0, z_0)$ - **die Linie vom Ursprung zum Punkt P nennt man auch den Vektor** $\vec{r}$



Man schreibt $\vec{r} = (x, y, z)$.

Ein Vektor hat eine Länge

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und eine Richtung.

Vektoren kann man mit normalen Zahlen multiplizieren

$a\vec{r} = (ax, ay, az)$.

Vektoren werden addiert indem man ihre Komponenten addiert

$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Man kann die Koordinatenachsen durch folgende Vektoren darstellen:

$\vec{e}_x = (1,0,0)$,

$\vec{e}_y = (0,1,0)$

$\vec{e}_z = (0,0,1)$

Damit gilt für einen beliebigen Vektor $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Wiederholung 2. Vorlesung: Grenzwert - Ableitung

Das Konzept Grenzwert kann auch auf Funktionen angewendet werden

Beispiel: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$

Betrachte eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$

Zum Zeitpunkt t **besitzt die Funktion den Wert** $f(t)$

Einen kleinen Zeitpunkt später bezeichnet wir mit $t + \Delta t$

Der Funktionswert zu diesem kleinen Zeitpunkt später lautet $f(t + \Delta t)$

Die Funktion hat sich im Zeitraum von t **nach** $t + \Delta t$ **um den Betrag**

$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ **geändert**

Die Rate dieser Änderung ist gegeben durch $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ **(sieht aus wie** $\frac{0}{0}$**!)**

Definition: Die Ableitung der Funktion $f(t)$ **lautet**

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Wiederholung: Ableitung

Beispiele:

1. $f(t) = t^2$ **und somit** $\dfrac{df(t)}{dt} = 2t$

2. $f(t) = t^n$ **und somit** $\dfrac{df(t)}{dt} = nt^{n-1}$

3. $\dfrac{d(t^3)}{dt} = 3t^2$, $\dfrac{d(1)}{dt} = \dfrac{d(t^0)}{dt} = 0$, $\dfrac{d(t^5)}{dt} = 5t^4$, $\dfrac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \dfrac{d(t^{-1})}{dt} = -t^{-2} = -\dfrac{1}{t^2}$

4. **Spezielle Funktionen:**

$$\frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t\,, \quad \frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t\,, \qquad \frac{d(e^t)}{dt} = e^t, \quad \frac{d(\log t)}{dt} = \frac{1}{t}$$

Wiederholung: Rechenregeln für Ableitungen

1. **Ableitung einer Konstanten c mal einer Funktion $f(t)$:**

$$\frac{d\left[cf(t)\right]}{dt} = c\frac{df(t)}{dt}$$

2. **Ableitung der Summe von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left[f(t) + g(t)\right]}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

3. **Ableitung des Produktes von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:**

$$\frac{d\left[f(t)g(t)\right]}{dt} = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

4. **Kettenregel:** $g = g(t)$ **und** $f = f(g)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}$$

Wiederholung 2. Vorlesung: Beispiel 1 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ sich wie folgt zu bewegen:

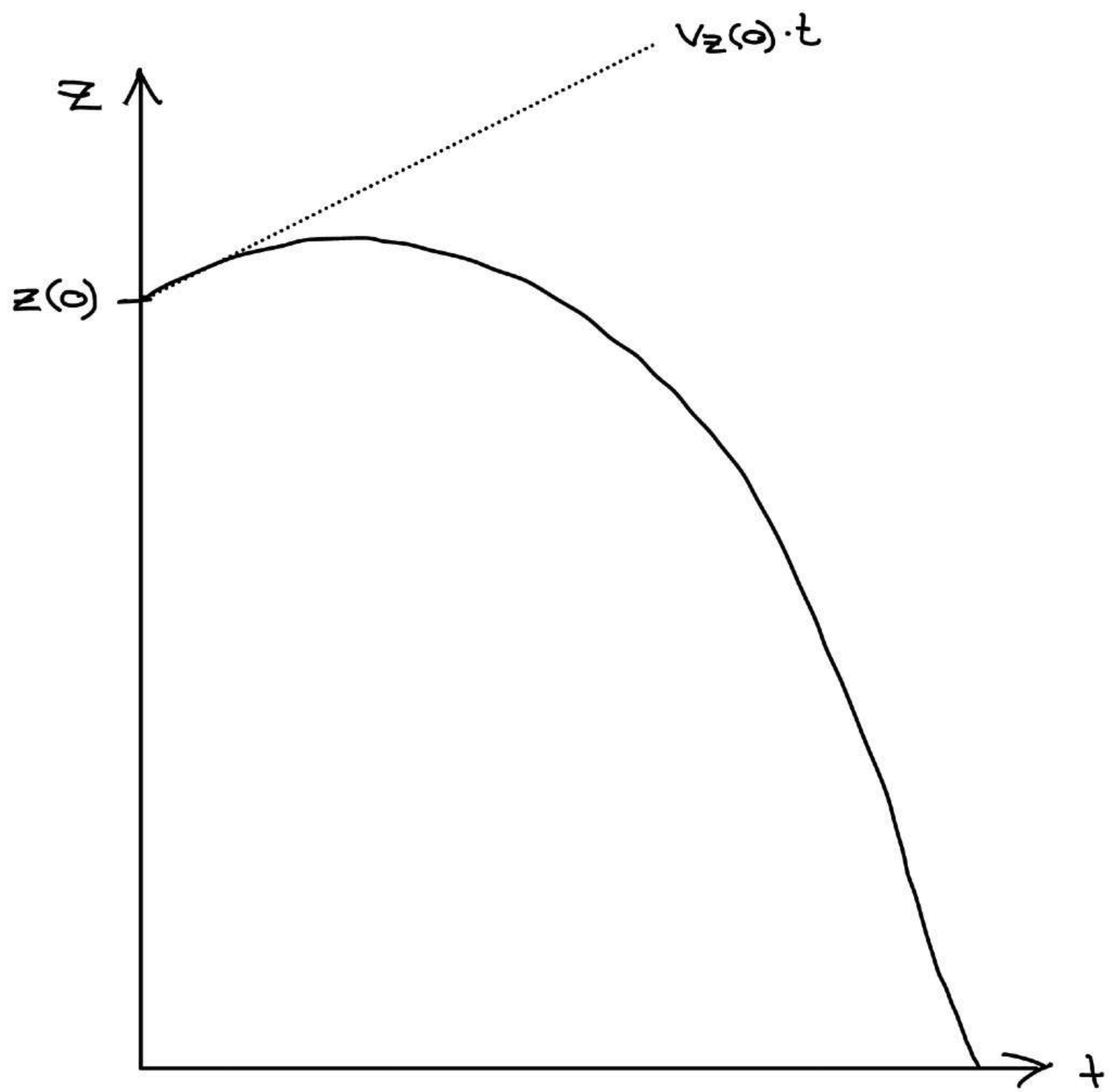
$$x(t) = 0\,,\ \ y(t) = 0\,,\ \ z(t) = z(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = 0\,,\ \ v_y(t) = 0\,,\ \ v_z(t) = v(0) - gt$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = 0\,,\ \ a_y(t) = 0\,,\ \ a_z(t) = -g$$



Der Wurf

Wiederholung 2. Vorlesung: Beispiel 2 für Bewegung

Der Massenpunkt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ in der x-Achse zu oszillieren:

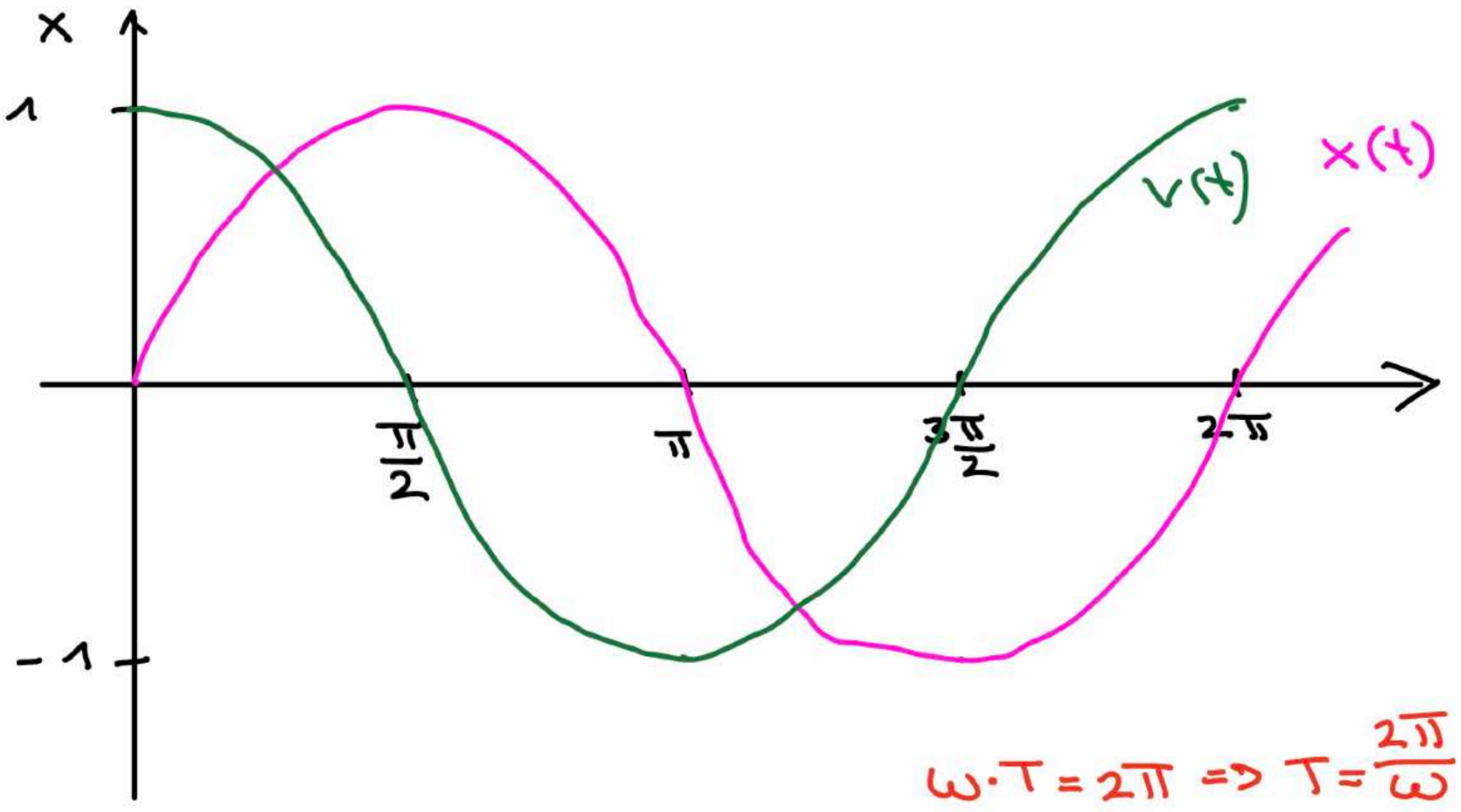
$$x(t) = \sin(\omega t) \, ,$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = \omega \cos(\omega t)$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = -\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$



Wiederholung 2. Vorlesung: Beispiel 3 für Bewegung

Der Massenpunkt bewegt sich in der (x, y)- Ebene auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius R:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt am Punkt $(R,0)$:

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

Daraus ergibt sich folgende Geschwindigkeit

$$v_x(t) = -\omega R\sin(\omega t)$$
$$v_y(t) = \omega R\cos(\omega t)$$

und folgende Beschleunigung

$$a_x(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$$
$$a_y(t) = -\omega^2 R\sin(\omega t)$$

d.h. $\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$

Wiederholung: Integrieren

Betrachte die Funktion $F(T)$:

$$F(T) = \int_a^T f(t)dt \qquad \textbf{schlampig:} \quad F(t) = \int f(t)dt$$

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Wiederholung: Integrieren

Beispiele für Integrale

1. $$\int a\,dt = at + c$$

2. $$\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c$$

3. $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

4. $$\int \sin t\,dt = -\cos t + c$$

5. $$\int \cos t\,dt = \sin t + c$$

6. $$\int e^t\,dt = e^t + c$$

7. $$\int \frac{dt}{t} = \ln t + c$$

8. $$\int af(t)dt = a\int f(t)dt$$

9. $$\int \left[f(t) \pm g(t)\right] dt = \int f(t)dt \pm \int g(t)dt$$

Wiederholung: Integrieren

Beispiel Partielle Integration

$$\int_a^b g(t)\frac{df(t)}{dt} = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\frac{d\sin x}{dx}\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Partielle Integration funktioniert erstaunlich oft!

Wiederholung: Dynamik

Was verursacht Bewegung?

Newton et al: Trägheit
“Ein Körper auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich geradlinig gleichförmig”
“Die Änderung der Geschwindigkeit eines Körpers ist proportional zu der Kraft, die auf ihn wirkt”

$$\frac{F(t)}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$F = 0$**:** $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) = v_0$ $\frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow x(t) = v_0 t + x_0$

$F = mg$**:** $\Rightarrow x(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$

Freier Fall

$F = -kx$**:** $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$ $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

Federpendel

Es gibt zwei Anfangs-bedingungen

Wiederholung: Partielle Ableitung

Betrachte Funktionen von mehreren Variablen: $V(x, y)$ **oder** $V(x, y, z)$

$V(x, y)$ **: z.B. 3-dimensionale Landschaft:** V **entspricht der Höhe**
$V(x, y, z)$**: z.B. Potential mit unterschiedlichen Werten an verschiedenen Raumpunkten**

Die Funktion $V(x, y, z)$ **kann nach jeder der 3 Variablen abgeleitet werden:**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta x} \quad \text{mit} \quad \Delta V_x = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta V_y}{\Delta y} \quad \text{mit} \quad \Delta V_y = V(x, y + \Delta y, z) - V(x, y, z)$$

Man kann auch mehrfach ableiten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} \equiv \partial_{x,x} V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \equiv \partial_{x,y} V$$

Man kann beweisen: $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$

Wiederholung: Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte:

$$\frac{dF}{dy} = 0$$

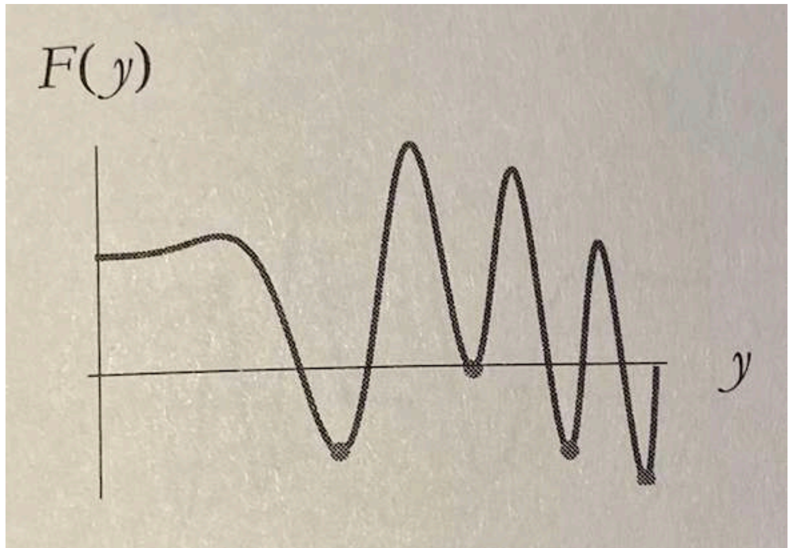


Figure 2: Local minima.

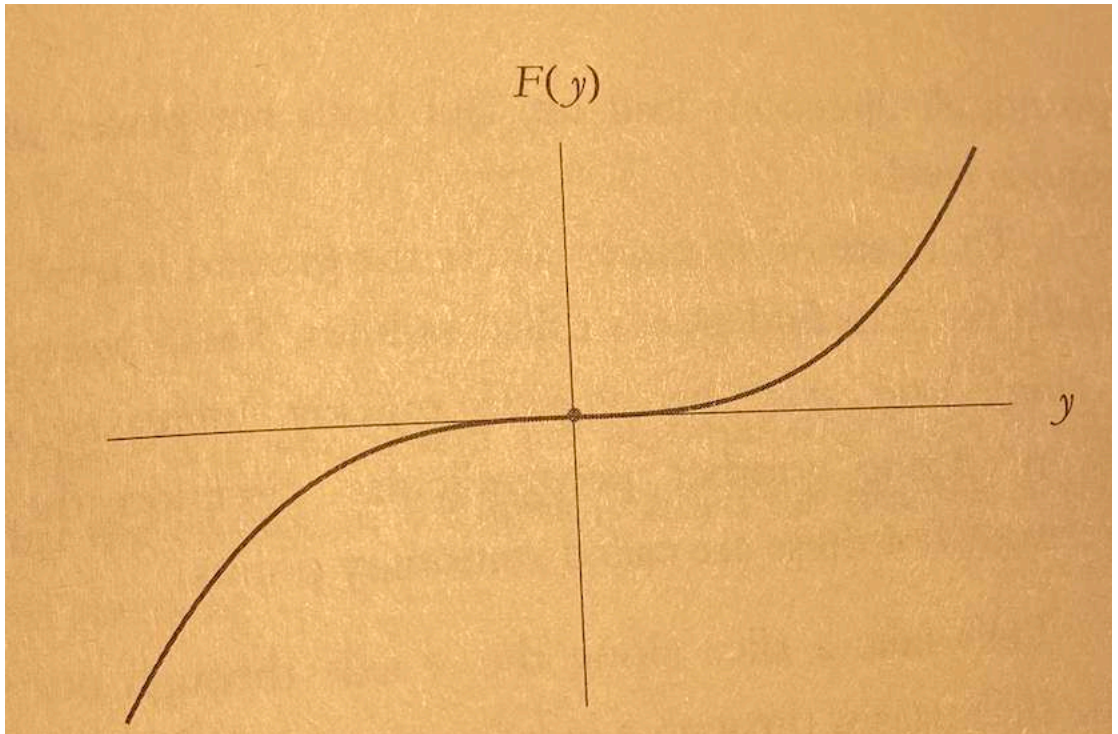


Figure 4: Point of inflection.

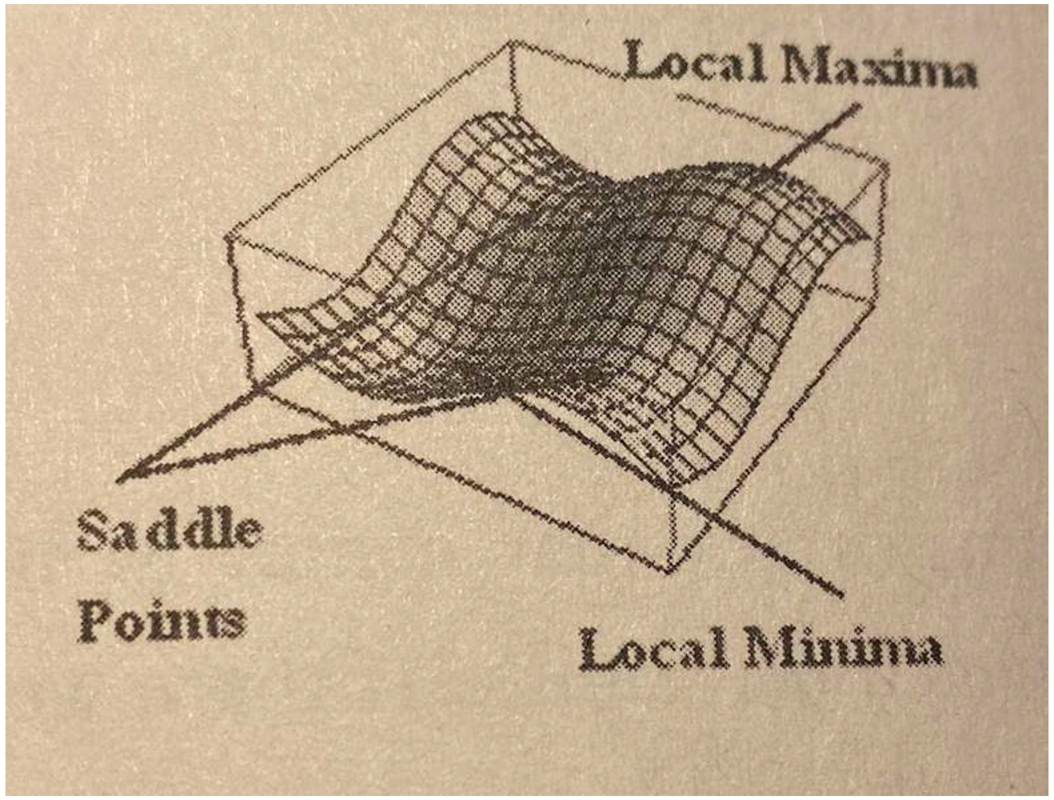
Lokales Maximum: $\frac{d^2F}{dy^2} < 0$

Lokales Minimum: $\frac{d^2F}{dy^2} > 0$

Wendepunkt: $\frac{d^2F}{dy^2} = 0$

Wiederholung: Maxima, Minima, Wendepunkt

Stationäre Punkte in mehreren Dimensionen:



Für ein Minimum, Maximum, Sattelpunkt braucht man: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}$

allgemein: $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \delta F = 0$ **Def.:** $\delta F = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i$

Betrachte die 2. Ableitungen in 2 Dimensionen: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

Wiederholung: Maxima, Minima, Wendepunkt

Hesse Matrix: $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

Determinante der Hesse Matrix : $\det H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

Spur der Hesse Matrix: **Tr** $H = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

Regeln für Punkte mit $\delta F = 0$:

1. **Det H > 0 & Tr H > 0: lokales Minimum**
2. **Det H > 0 & Tr H < 0: lokales Maximum**
3. **Det H < 0 : Sattelpunkt**

Wiederholung: Beispiel: Maxima, Minima, Wendepunkt

$$F(x, y) = \sin x + \sin y$$

1. Ableitungen: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \cos x$ **und** $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos y$

verschwindet bei $x, y = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$

2. Ableitungen : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x$ **,** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin y$ **und** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0$

Determinante $\det H = \sin x \sin y$

Spur **Tr** $H = -\sin x - \sin y$

Für den Punkt $x = \dfrac{\pi}{2}$ **,** $y = \dfrac{\pi}{2}$ **gilt mit** $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$**:** $\det H = +1$ **und tr** $H = -2$

1. **Det H > 0 & Tr H > 0: lokales Minimum**
2. **Det H > 0 & Tr H < 0: lokales Maximum**
3. **Det H < 0 : Sattelpunkt**

Wiederholung: Systeme mit mehreren Teilchen

Welt = System aus Teilchen, die dynamischen Gesetzen gehorchen

Wikipedia: ” Neben den Themen der *Théorie Analytique* beschrieb Laplace außerdem einen alles rational erfassenden „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dieses nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als Laplacescher Dämon bekannt

Welche Kräfte wirken auf diese Teilchen?

Abgeleitete Kräfte

Reibungskräfte
- abgeleitet aus molekularen und atomaren Kräften

konstante Gravitationskraft
- genähert aus fundamentaler Gravitationskraft

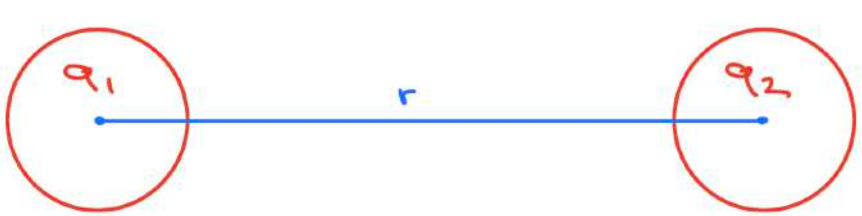
Federkraft
- abgeleitet aus Festkörper-Wechselwirkungen

...

Fundamentale Kräfte

Gravitationskraft: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ $G = 6.67430 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

Coulombkraft: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ $\epsilon_0 = 8.854187812 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$



Wiederholung: Systeme mit mehreren Teilchen

Betrachte ein abschlossenes System mit N Teilchen: $l = 1, \ldots, N$

Diese befinden sich an den Orten $\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l)$

Auf das Teilchen l **wirkt die Kraft** $\overrightarrow{F}_i$

diese Kraft hängt hängt von allen Orten ab $\{\vec{r}\} = (\vec{r}_1, \ldots., \vec{r}_N)$

$$\overrightarrow{F}_l = \overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right)$$

Nach Newton gilt $\overrightarrow{F}_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l \vec{a}_l = m_l \dfrac{d^2 \vec{r}_l}{dt^2}$

oder in Komponentenform

$$(F_x)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l (a_x)_l = m_l \frac{d^2 x_l}{dt^2}$$

$$(F_y)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l (a_y)_l = m_l \frac{d^2 y_l}{dt^2}$$

$$(F_z)_l\left(\{\vec{r}\}\right) = m_l (a_z)_l = m_l \frac{d^2 z_l}{dt^2}$$

D.h. es gibt $3N$ **Gleichungen, die der Weltgeist lösen muss**

Wiederholung: Systeme mit mehreren Teilchen

Zustandsraum = Alles was man wissen muss,
um die Zukunft vorherzusagen,
wenn man die dynamischen Gesetze kennt.

Beispiele:

1. Münze = {K,Z}

2. Würfel = {1,2,3,4,5,6}

3. Aristoteles' Welt mit N Teilchen: N Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

4. Newton's Welt mit N Teilchen:
   $2N$ Anfangsbedingungen $(\vec{r}_1(t_0), \ldots, \vec{r}_N(t_0), \dot{\vec{r}}_1(t_0), \ldots, \dot{\vec{r}}_N(t_0))$
   Zustandsraum = $\left\{\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N)$

   Pro Teilchen: 6 Dimensionen

   6 Gleichungen pro Teilchen: $m\frac{dv_i}{dt} = F_i$ und $\frac{dx_i}{dt} = v_i$

Wiederholung: Impuls und Energie

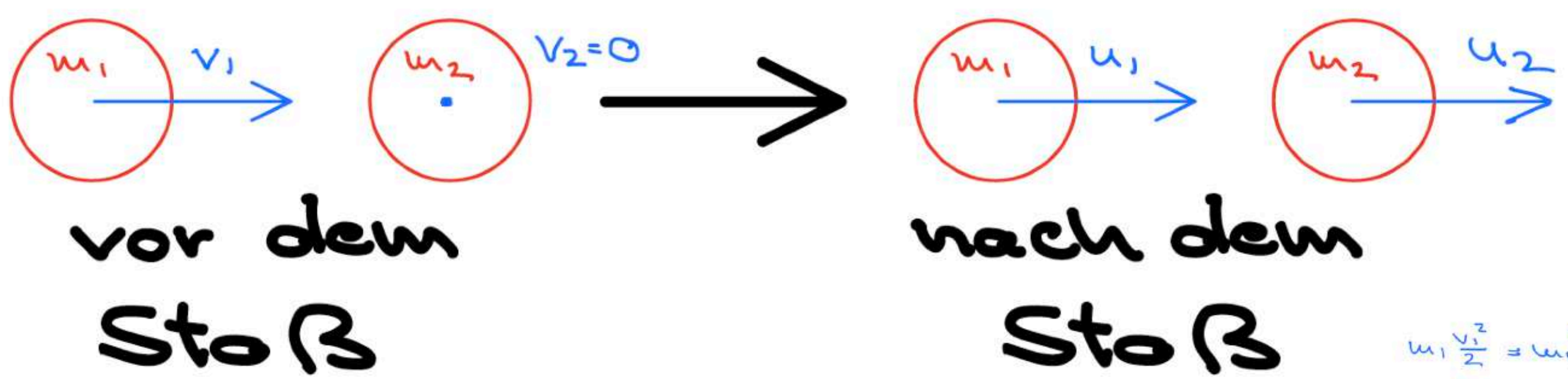
Wird man von einem Objekt getroffen, dann hängt die Wucht dieses Treffens nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse dieses Objektes ab

In der Physik kann die “Wucht” durch zwei Größen dargestellt werden.

1. **Kinetische Energie:** $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

2. **Impuls:** $\vec{p} = m\vec{v}$ **bzw.** $p_i = mv_i$

Sowohl die Energie, als auch der Impuls ist erhalten



Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

Impulserhaltung: $m_1v_1 + 0 = m_1u_1 + m_2u_2$

$m_1\frac{v_1^2}{2} = m_1\frac{u_1^2}{2} + m_2\frac{u_2^2}{2}$

$m_1V_1 = m_1u_1 + m_2u_2 \Rightarrow V_1 = u_1 + \frac{m_2}{m_1}u_2$

$\cancel{m_1\frac{u_1^2}{2}} + m_1\frac{2u_1u_2}{2}\frac{m_2}{m_1} + \frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{m_1^2}u_2^2 = \cancel{m_1\frac{u_1^2}{2}} + m_2\frac{u_2^2}{2}$

$u_1u_2 + \frac{m_2}{2m_1}u_2^2 - \frac{u_2^2}{2} = 0$

$2m_1u_1u_2 + m_2u_2^2 - m_1u_2^2 = 0 \quad \rightarrow u_2 = 0$ ↯

$2m_1u_1 + (m_2 - m_1)u_2 = 0$

$\Rightarrow u_1 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}u_2$

$m_1 = m_2 \Rightarrow u_1 = 0$

$\Rightarrow u_2 = V_1$

Wiederholung: Phasenraum

Statt dem Zustandsraum $\left\{\vec{r},\dot{\vec{r}}\right\} = (\vec{r}_1,\ldots.,\vec{r}_N,\dot{\vec{r}}_1,\ldots.,\dot{\vec{r}}_N)$

kann man auch $\left\{\vec{r},\vec{p}\right\} = (\vec{r}_1,\ldots.,\vec{r}_N,\vec{p}_1,\ldots.,\vec{p}_N)$ verwenden, letzterer Zustandsraum wird auch **Phasenraum** genannt

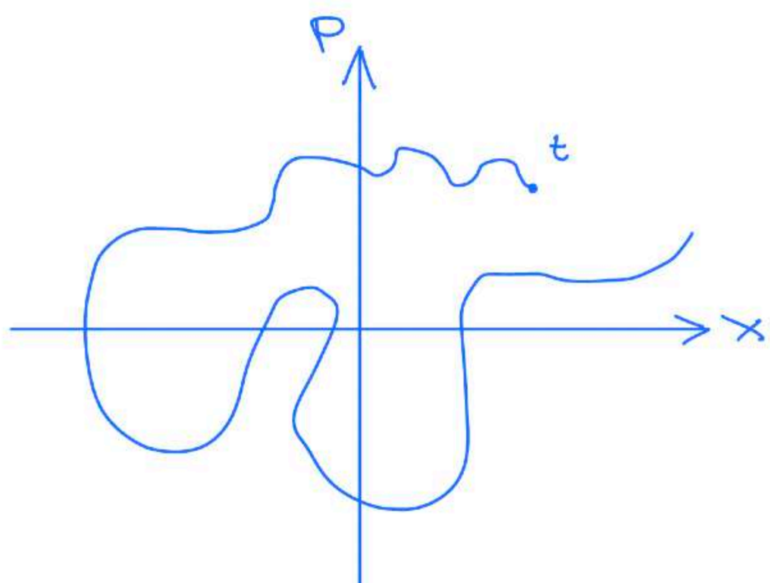
Phasenraum = Konfigurationsraum + Impulsraum

Für ein Teilchen im 3 dimensionalen Raum

$$\mathbb{R}^6 \quad \equiv \quad \mathbb{R}^3 \quad + \quad \mathbb{R}^3$$

6 Gleichungen pro Teilchen: $\dot{p}_i = m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i$ und $\frac{dx_i}{dt} = v_i = \frac{p_i}{m_i}$

Für ein Teilchen in 1 Dimension $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} + \mathbb{R}$



Für N Teilchen im 3 dimensionalen Raum: $\mathbb{R}^{6N}$

Wiederholung: Beispiel: Federpendel

Federpendel: $F = -kx$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \equiv -\omega^2 x$$

Allgemeinste Lösung: $\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$

Annahme: $v_0 = 0$ $\quad \Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

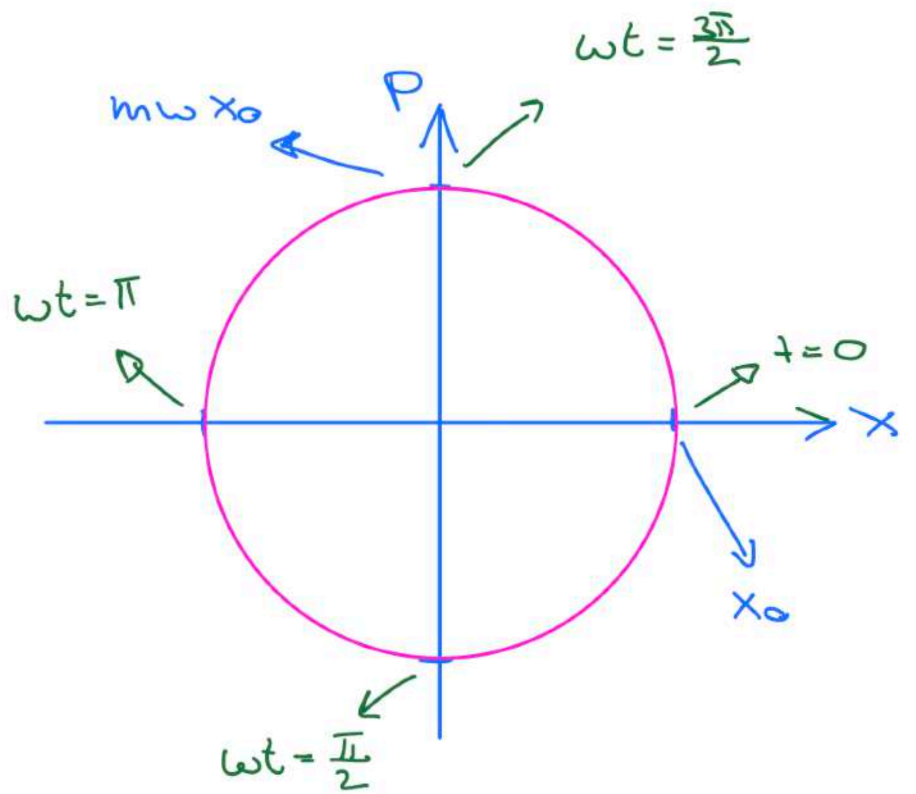
$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) \qquad \Rightarrow p(t) = m\dot{x}(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$

$$\omega t = 0 \;\Rightarrow x = x_0\,,\; p = 0$$

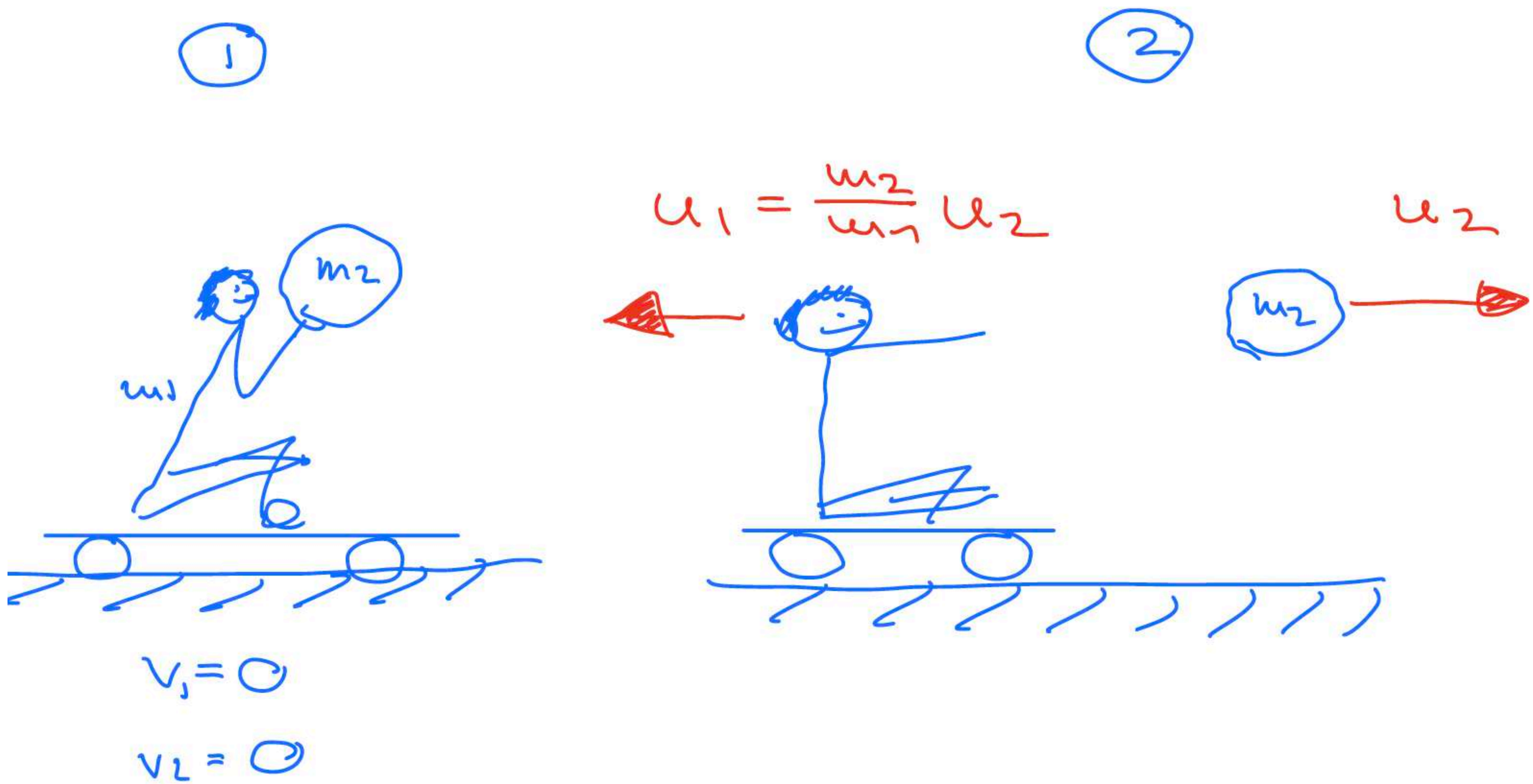
$$\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0\,,\; p = -m\omega x_0$$

$$\omega t = \pi \Rightarrow x = -x_0\,,\; p = 0$$

$$\omega t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 0\,,\; p = +m\omega x_0$$



Wiederholung: Impulserhaltung



Wiederholung: Impulserhaltung

Impulserhaltung kann aus der Invarianz der dynamischen Gesetze unter Raumtranslation hergeleitet werden (via Noether-Theorem)
oder
aus dem 3. Newtonschen Gesetz

Actio = Reactio

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Wiederholung: Impulserhaltung

Betrachte ein abgeschlossenes System von N Teilchen

Jedes Teilchen j übt eine Kraft $\vec{f}_{ij}$ auf das Teilchen i aus

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

Die Gesamtkraft auf das Teilchen i lautet $\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

2. Newtonsches Gesetz: $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{ij}$

Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ **des Systems ändert sich damit mit der Zeit, wie**

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{f}_{ij} = \underbrace{\vec{f}_{11}}_{=0} + \underbrace{\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}}_{=0} + \underbrace{\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}}_{=0} + \ldots .$$

$\dot{\vec{P}} = 0$, **d.h. der Gesamtimpuls ist erhalten!**

Wiederholung: Impulserhaltung

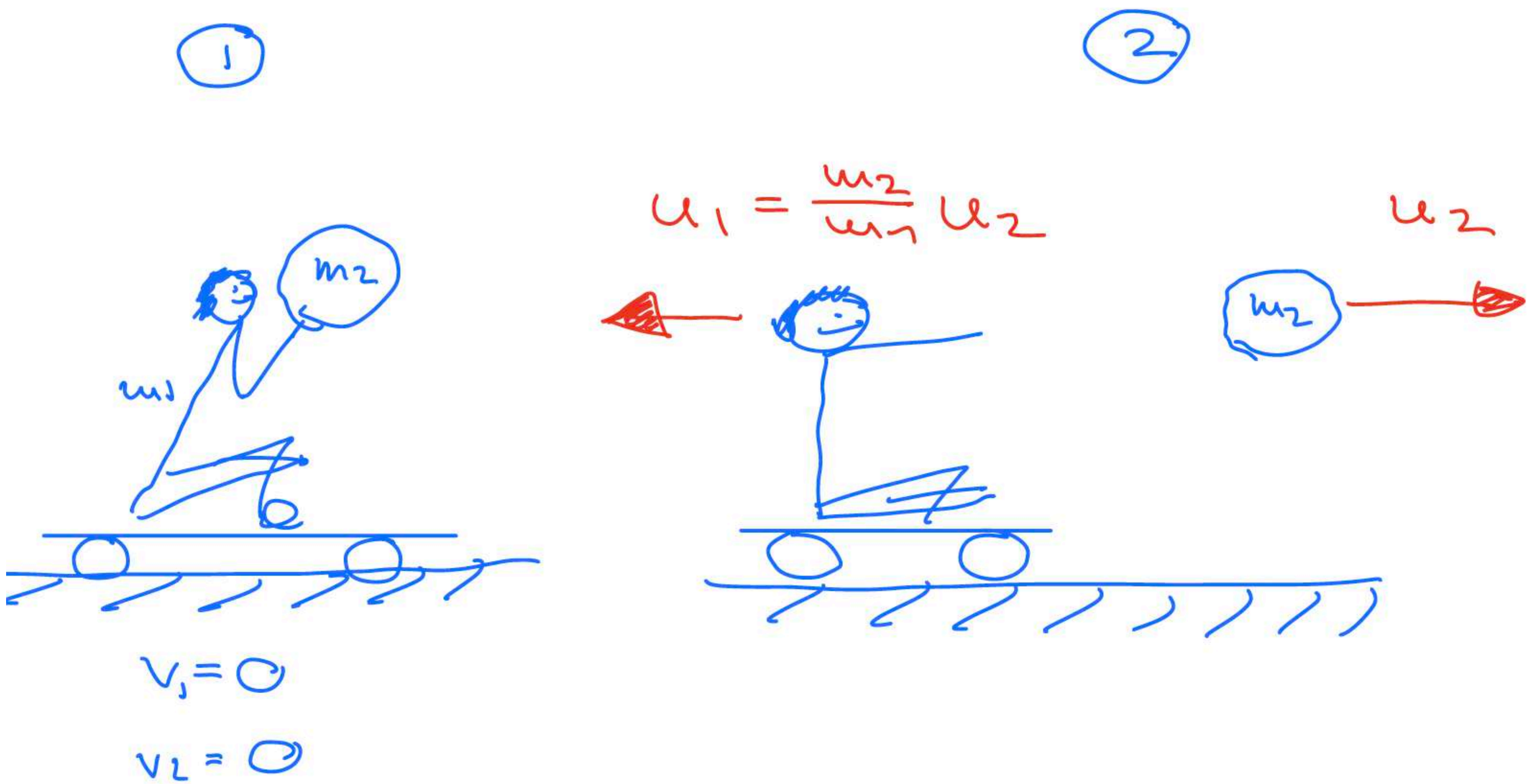
Bei zwei Teilchen

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$$

d.h. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const.$

Vorher = $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$

Nachher = $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$



Wiederholung: Energieerhaltung

Es gibt viele Arten von Energie:

- kinetische Energie
- potentielle Energie
- thermische Energie
- chemische Energie
- nukleare Energie
- ...

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Potentielle Energie:

Kräfte können aus einer potentiellen Energie abgeleitet werden: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

Bsp: Gravitation

$$V(r) = G\frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Bsp: Coulombpotential - elektrische Kraft

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_1 m_2}{r} \Rightarrow F = -\frac{dV(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Potentielle Energie kann aus der Kraft bestimmt werden: $V(x) = -\int F(x)dx$

Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

Wiederholung: Energieerhaltung

Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x)\right)$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{1}{2}m2v\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}E = \left(m\dot{v} + \frac{dV(x)}{dx}\right)v$$

$$\frac{d}{dt}E = (ma - F)\,v = 0$$

$F = ma$ **impliziert also die Energieerhaltung**
Impulserhaltung ist jetzt im Potential versteckt….
(Potential wird z.B. von der Erde erzeugt, wenn ein Körper fällt, dann ändert sich deren Impuls)

Wiederholung: Energieerhaltung

Im Falle von 3 Dimensionen und N Teilchen gilt

$m_i \ddot{x}_i = F_i(\{x\})$ **mit** $i = 1,\ldots,3N$

Die Kraft kann in diesem Fall auch aus einem Potential abgeleitet werden

$$F_i(\{x\}) = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Dies impliziert die Energieerhaltung!!!

Wiederholung: Energieerhaltung

Ausgehend von

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}$$

Können wir eine erhaltene Energie herleiten:

$$m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = -\sum_i \frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2}_{=:T} = -\frac{d}{dt} V$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

$\Rightarrow$ **Klassische Mechanik**

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

$\Rightarrow$ **Klassische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Relativistische Mechanik**

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

$\Rightarrow$ **Klassische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Relativistische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Elektromagnetismus**

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

$\Rightarrow$ **Klassische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Relativistische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Elektromagnetismus**

$\Rightarrow$ **Allgemeine Relativitätstheorie**

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

$\Rightarrow$ **Klassische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Relativistische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Elektromagnetismus**

$\Rightarrow$ **Allgemeine Relativitätstheorie**

$\Rightarrow$ **Quantenmechanik (SS2025: 100 Jahre QM)**

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

$\Rightarrow$ **Klassische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Relativistische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Elektromagnetismus**

$\Rightarrow$ **Allgemeine Relativitätstheorie**

$\Rightarrow$ **Quantenmechanik (SS2025: 100 Jahre QM)**

$\Rightarrow$ **Quantenfeldtheorie**

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

$\Rightarrow$ **Klassische Mechanik**
$\Rightarrow$ **Relativistische Mechanik**
$\Rightarrow$ **Elektromagnetismus**
$\Rightarrow$ **Allgemeine Relativitätstheorie**
$\Rightarrow$ **Quantenmechanik (SS2025: 100 Jahre QM)**
$\Rightarrow$ **Quantenfeldtheorie**
$\Rightarrow$ **Chemie**

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

$\Rightarrow$ **Klassische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Relativistische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Elektromagnetismus**

$\Rightarrow$ **Allgemeine Relativitätstheorie**

$\Rightarrow$ **Quantenmechanik (SS2025: 100 Jahre QM)**

$\Rightarrow$ **Quantenfeldtheorie**

$\Rightarrow$ **Chemie**

$\Rightarrow$ **…**

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Standard)

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Standard)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Standard)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Anfangsbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0) \quad i = 1,\ldots,N$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Standard)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Anfangsbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Standard)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Anfangsbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Standard)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Anfangsbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Integriere Bewegungsgleichungen 2-mal (2 Anfangsbedingungen)

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Alternativ)

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Alternativ)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Randbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0)$ **und** $\vec{r}_i(t_E) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Alternativ)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Randbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0)$ **und** $\vec{r}_i(t_E) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Alternativ)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Randbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0)$ **und** $\vec{r}_i(t_E) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Aus der Kenntnis von $\vec{r}(t_E)$ **kann** $\dot{\vec{r}}(t_0)$ **bestimmt werden**

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Alternativ)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Randbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0)$ **und** $\vec{r}_i(t_E) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Aus der Kenntnis von $\vec{r}(t_E)$ **kann** $\dot{\vec{r}}(t_0)$ **bestimmt werden**

Bsp.: $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Alternativ)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Randbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0)$ **und** $\vec{r}_i(t_E) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Aus der Kenntnis von $\vec{r}(t_E)$ **kann** $\dot{\vec{r}}(t_0)$ **bestimmt werden**

Bsp.: $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$x_0 = x(0)$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Alternativ)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Randbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0)$ **und** $\vec{r}_i(t_E) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Aus der Kenntnis von $\vec{r}(t_E)$ **kann** $\dot{\vec{r}}(t_0)$ **bestimmt werden**

Bsp.: $x(t) = x_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2$

$$x_0 = x(0)$$

$$x_E = x(t_E) = x_0 + v_0 t_E - \frac{1}{2} g t_E^2 \Rightarrow v_0 = \frac{x_E - x_0}{t_E} + \frac{g t_E}{2}$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Alternativ)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Randbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0)$ **und** $\vec{r}_i(t_E) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Aus der Kenntnis von $\vec{r}(t_E)$ **kann** $\dot{\vec{r}}(t_0)$ **bestimmt werden**

Bsp.: $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$$x_0 = x(0)$$

$$x_E = x(t_E) = x_0 + v_0 t_E - \frac{1}{2} g t_E^2 \Rightarrow v_0 = \frac{x_E - x_0}{t_E} + \frac{g t_E}{2}$$

Ges.: Welche Bahnkurve verbindet den Anfangs-und den Endpunkt?

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel gerade Linie

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel gerade Linie

A) Anfangspunkt und Anfangsrichtung vorgegeben

$\Rightarrow$ Schritt für Schritt nach rechts weitergehen

(entspricht Vorgehen via Newton'scher Gleichungen)

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel gerade Linie

A) Anfangspunkt und Anfangsrichtung vorgegeben

⇒ Schritt für Schritt nach rechts weitergehen

(entspricht Vorgehen via Newton'scher Gleichungen)

B) Anfangs- und Endpunkt vorgegeben

⇒Suche kürzesten Abstand zwischen diesen Punkten

(entspricht Vorgehen via Prinzip der kleinsten Wirkung)

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.} \right] dt$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.} \right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t)) \right] dt$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.}\right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))\right] dt$$

Wir können nun eine beliebige, möglicherweise auch unphysikalische, Trajektorie $x(t)$ vorgeben und daraus die Wirkung bestimmen

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.}\right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))\right] dt$$

Wir können nun eine beliebige, möglicherweise auch unphysikalische, Trajektorie $x(t)$ vorgeben und daraus die Wirkung bestimmen

Es wird sich rausstellen, dass die physikalische Trajektorie immer diejenige ist, für die die Wirkung extremal ist

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.}\right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))\right] dt$$

Wir können nun eine beliebige, möglicherweise auch unphysikalische, Trajektorie $x(t)$ vorgeben und daraus die Wirkung bestimmen

Es wird sich rausstellen, dass die physikalische Trajektorie immer diejenige ist, für die die Wirkung extremal ist

Beachte: Anfangs- und Endpunkte der Trajektorien müssen übereinstimmen

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2}t^2$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} g^2 t^2 + mg \frac{g}{2} t^2 \right) dt$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} g^2 t^2 + mg \frac{g}{2} t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3} T^3$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}g^2t^2 + mg\frac{g}{2}t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3}T^3$

2) $x(t) = \frac{\alpha}{n}t^n$ **, n>1**

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}g^2t^2 + mg\frac{g}{2}t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3}T^3$

2) $x(t) = \frac{\alpha}{n}t^n \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha t^{n-1}$ **, n>1**

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} g^2 t^2 + mg \frac{g}{2} t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3} T^3$

2) $x(t) = \frac{\alpha}{n} t^n \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha t^{n-1}$ **, n>1**

$$\Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \alpha^2 t^{2n-2} + mg \frac{\alpha}{n} t^n \right) dt$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} g^2 t^2 + mg \frac{g}{2} t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3} T^3$

2) $x(t) = \frac{\alpha}{n} t^n \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha t^{n-1}$ **, n>1**

$$\Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \alpha^2 t^{2n-2} + mg \frac{\alpha}{n} t^n \right) dt = \left(\frac{m\alpha^2}{2(2n-1)} T^{2n-1} + \frac{\alpha mg}{n(n+1)} T^{n+1} \right)$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $$x(t) = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}g^2t^2 + mg\frac{g}{2}t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3}T^3$$

2) $x(t) = \frac{\alpha}{n}t^n \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha t^{n-1}$ **, n>1**

$$\Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\alpha^2 t^{2n-2} + mg\frac{\alpha}{n}t^n \right) dt = \left(\frac{m\alpha^2}{2(2n-1)}T^{2n-1} + \frac{\alpha mg}{n(n+1)}T^{n+1} \right)$$

Gleicher Endpunkt:

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} g^2 t^2 + mg \frac{g}{2} t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3} T^3$

2) $x(t) = \frac{\alpha}{n} t^n \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha t^{n-1}$ **, n>1**

$$\Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \alpha^2 t^{2n-2} + mg \frac{\alpha}{n} t^n \right) dt = \left(\frac{m\alpha^2}{2(2n-1)} T^{2n-1} + \frac{\alpha mg}{n(n+1)} T^{n+1} \right)$$

Gleicher Endpunkt: $x(T) = \frac{\alpha}{n} T^n = \frac{g}{2} T^2 \Rightarrow \alpha = \frac{n}{2} g T^{2-n}$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}g^2t^2 + mg\frac{g}{2}t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3}T^3$

2) $x(t) = \frac{\alpha}{n}t^n \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha t^{n-1}$ **, n>1**

$$\Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\alpha^2 t^{2n-2} + mg\frac{\alpha}{n}t^n \right) dt = \left(\frac{m\alpha^2}{2(2n-1)}T^{2n-1} + \frac{\alpha mg}{n(n+1)}T^{n+1} \right)$$

Gleicher Endpunkt: $x(T) = \frac{\alpha}{n}T^n = \frac{g}{2}T^2 \Rightarrow \alpha = \frac{n}{2}gT^{2-n}$

$$\Rightarrow S = mg^2T^3 \left(\frac{n^2}{8(2n-1)} + \frac{1}{2(n+1)} \right)$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}g^2t^2 + mg\frac{g}{2}t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3}T^3$

2) $x(t) = \frac{\alpha}{n}t^n \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha t^{n-1}$ **, n>1**

$$\Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\alpha^2 t^{2n-2} + mg\frac{\alpha}{n}t^n \right) dt = \left(\frac{m\alpha^2}{2(2n-1)}T^{2n-1} + \frac{\alpha mg}{n(n+1)}T^{n+1} \right)$$

Gleicher Endpunkt: $x(T) = \frac{\alpha}{n}T^n = \frac{g}{2}T^2 \Rightarrow \alpha = \frac{n}{2}gT^{2-n}$

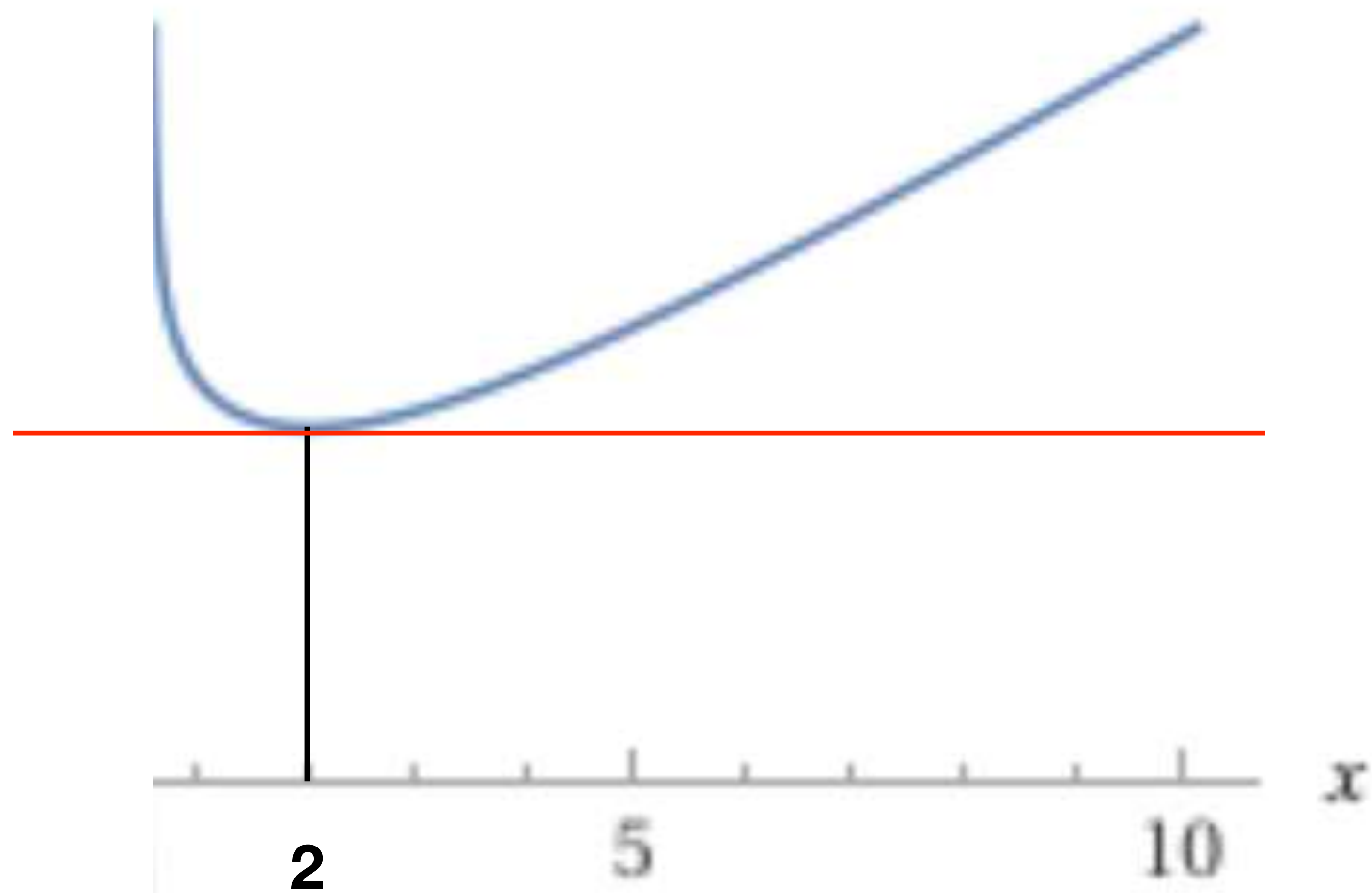
$$\Rightarrow S = mg^2T^3 \left(\frac{n^2}{8(2n-1)} + \frac{1}{2(n+1)} \right) = \frac{mg^2}{2}T^3 \frac{n^3 + n^2 + 8n - 4}{4(n+1)(2n-1)}$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$\Rightarrow S = mg^2T^3\left(\frac{n^2}{8(2n-1)} + \frac{1}{2(n+1)}\right) = \frac{mg^2}{2}T^3\frac{n^3+n^2+8n-4}{4(n+1)(2n-1)}$$

plot	$\frac{x^3+x^2+8x-4}{(x+1)(2x-1)}$



Minimaler Wert bei $n = 2$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.} \right] dt$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.} \right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t)) \right] dt$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.}\right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))\right] dt$$

- **Die kinetische Energie ist eine Funktion von $\dot{x}(t)$**

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.} \right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t)) \right] dt$$

- **Die kinetische Energie ist eine Funktion von $\dot{x}(t)$**
- **Die potentielle Energie ist eine Funktion von $x(t)$**

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.} \right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t)) \right] dt$$

- **Die kinetische Energie ist eine Funktion von $\dot{x}(t)$**
- **Die potentielle Energie ist eine Funktion von $x(t)$**
- **Die Lagrange-Funktion L wird definiert als** $L = E_{kin.} \left[\dot{x}(t) \right] - E_{pot.} \left[x(t) \right]$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.}\right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))\right] dt$$

- **Die kinetische Energie ist eine Funktion von $\dot{x}(t)$**
- **Die potentielle Energie ist eine Funktion von $x(t)$**
- **Die Lagrange-Funktion L wird definiert als** $L = E_{kin.}\left[\dot{x}(t)\right] - E_{pot.}\left[x(t)\right]$
- L **ist eine Funktion von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ - in ihr steckt die gesamte Physik**

Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.}\right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))\right] dt$$

- **Die kinetische Energie ist eine Funktion von** $\dot{x}(t)$
- **Die potentielle Energie ist eine Funktion von** $x(t)$
- **Die Lagrange-Funktion** L **wird definiert als** $L = E_{kin.}\left[\dot{x}(t)\right] - E_{pot.}\left[x(t)\right]$
- L **ist eine Funktion von** $x(t)$ **und** $\dot{x}(t)$ **- in ihr steckt die gesamte Physik**

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x(t), \dot{x}(t)\right] dt$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Man kann zeigen: Die Wirkung S

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x(t), \dot{x}(t)\right] dt$$

ist genau dann extremal, wenn gilt

Prinzip der kleinsten Wirkung

Man kann zeigen: Die Wirkung S

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x(t), \dot{x}(t)\right] dt$$

ist genau dann extremal, wenn gilt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Man kann zeigen: Die Wirkung S

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x(t), \dot{x}(t)\right] dt$$

ist genau dann extremal, wenn gilt

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Man kann zeigen: Die Wirkung S

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x(t), \dot{x}(t)\right] dt$$

ist genau dann extremal, wenn gilt

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Beachte: Die Lagrange-Funktion muss partiell nach x und $\dot{x}$ abgeleitet werden

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: $$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: $$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: $$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: $$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = F$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: $$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = F$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: $$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = F$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow F = m\ddot{x}$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = F$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow F = m\ddot{x}$$

D.h.: Das Prinzip der kleinsten Wirkung beinhaltet “Newton”

Ende 6. Vorlesung

Notes: 6. Vorlesung

Eigenheiten von Lagrange

Herleitung von Euler-Lagrange

Teilchen bewegen sich im Phasenraum auf Bahnen mit konstanter Energie
Simon Schmidt - auf Unisono