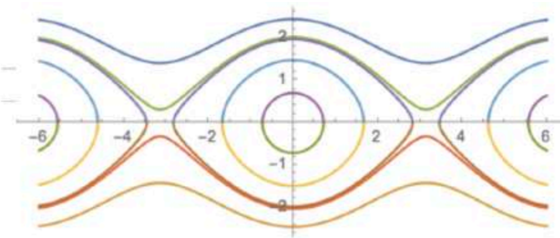
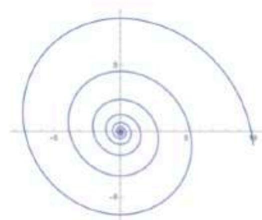
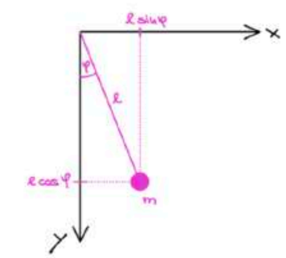
7. Vorlesung



Ankündigung für das Wintersemester 2024/25
Das theoretische Minimum I
Mechanik - von Newton über Emmy Noether zu Heisenberg
Prof. Dr. Alexander Lenz, 4PHY00011V



$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}}}$$



Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundprinzipien der theoretischen Physik.

Im Wintersemester 2024/25 beschäftigen wir uns u.a. mit vermeintlich einfachen Problemen, wie dem Pendel oder dem Kepler-Problem (Planetenbahnen). Ausgehend von den **Newtonschen Axiomen** wird eine moderne und elegante Formulierung der theoretischen Mechanik vorgestellt, aus der später die Quantenmechanik direkt abgeleitet werden kann - dies wird der sogenannte **Lagrange-** und **Hamilton-Formalismus** sein. Weiter werden eingehend Symmetrieprinzipen diskutiert - insbesondere das zum Veranstaltungsort passende **Noether-Theorem** -, auf dessen Verallgemeinerung die heutige Elementarteilchenphysik und unser gesamtes Verständnis der Welt beruht.

$$L = L(x, \dot{x}) = E_{Kin} - E_{Pot} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)\,,$$

Die Vorlesung richtet sich an Mittwochsakademiker, Oberstufenschülerinnen und -schüler, Lehrkräfte, Physikenthusiasten mit einem großen Interesse an aktuellen Themen der Physik. Es werden mathematische Konzepte (auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe) eingeführt und benutzt. Die Vorlesung ist an die erfolgreiche Vorlesungs- und Buchreihe "**The theoretical Minimum**" von Leonard Susskind angelehnt, welche auf dieselbe Zielgruppe ausgerichtet war. Vom Niveau her wird sich die Veranstaltung auf dem schmalen Grat zwischen einer rein populärwissenschaftlichen Bildershow und einer theoretischen Physikvorlesung im Bachelorstudium bewegen.

9 Termine im Wintersemester 24/25:
20.11., 27.11., 4.12., 11.12, 18.12. ,8.1., 15.1., 22.1., 29.1.
Mittwochs 16-18
Emmy Noether Campus ENC-D-114
Infos unter: alexander.lenz@uni-siegen.de
https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0$$

$\Rightarrow$ **Klassische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Relativistische Mechanik**

$\Rightarrow$ **Elektromagnetismus**

$\Rightarrow$ **Allgemeine Relativitätstheorie**

$\Rightarrow$ **Quantenmechanik (SS2025: 100 Jahre QM)**

$\Rightarrow$ **Quantenfeldtheorie**

$\Rightarrow$ **Chemie**

$\Rightarrow$ **...**

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Standard)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Anfangsbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0), \dot{\vec{r}}_i(t_0) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Integriere Bewegungsgleichungen 2-mal (2 Anfangsbedingungen)

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

Klassische Mechanik (Alternativ)

Geg.:

- N **Teilchen mit Massen** $m_i \quad i = 1,\ldots,N$
- $6N$ **Randbedingungen:** $\vec{r}_i(t_0)$ **und** $\vec{r}_i(t_E) \quad i = 1,\ldots,N$
- **Kräfte oder potentielle Energie**

Ges.: Trajektorie zu beliebigem Zeitpunkt t**:** $\vec{r}_i(t)$

Aus der Kenntnis von $\vec{r}(t_E)$ **kann** $\dot{\vec{r}}(t_0)$ **bestimmt werden**

Bsp.: $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$x_0 = x(0)$

$x_E = x(t_E) = x_0 + v_0 t_E - \frac{1}{2} g t_E^2 \Rightarrow v_0 = \frac{x_E - x_0}{t_E} + \frac{g t_E}{2}$

Ges.: Welche Bahnkurve verbindet den Anfangs-und den Endpunkt?

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel gerade Linie

A) Anfangspunkt und Anfangsrichtung vorgegeben

$\Rightarrow$ Schritt für Schritt nach rechts weitergehen

(entspricht Vorgehen via Newton'scher Gleichungen)

B) Anfangs- und Endpunkt vorgegeben

$\Rightarrow$ Suche kürzesten Abstand zwischen diesen Punkten

(entspricht Vorgehen via Prinzip der kleinsten Wirkung)

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.}\right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))\right] dt$$

Wir können nun eine beliebige, möglicherweise auch unphysikalische, Trajektorie $x(t)$ vorgeben und daraus die Wirkung bestimmen

Es wird sich rausstellen, dass die physikalische Trajektorie immer diejenige ist, für die die Wirkung extremal ist

Beachte: Anfangs- und Endpunkte der Trajektorien müssen übereinstimmen

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + mgx(t) \right) dt$$

Verschiedene Trajektorien:

1) $x(t) = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow \dot{x}(t) = gt \Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} g^2 t^2 + mg \frac{g}{2} t^2 \right) dt = \frac{mg^2}{3} T^3$

2) $x(t) = \frac{\alpha}{n} t^n \Rightarrow \dot{x}(t) = \alpha t^{n-1}$ **, n>1**

$$\Rightarrow S = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \alpha^2 t^{2n-2} + mg \frac{\alpha}{n} t^n \right) dt = \left(\frac{m\alpha^2}{2(2n-1)} T^{2n-1} + \frac{\alpha m g}{n(n+1)} T^{n+1} \right)$$

Gleicher Endpunkt: $x(T) = \frac{\alpha}{n} T^n = \frac{g}{2} T^2 \Rightarrow \alpha = \frac{n}{2} g T^{2-n}$

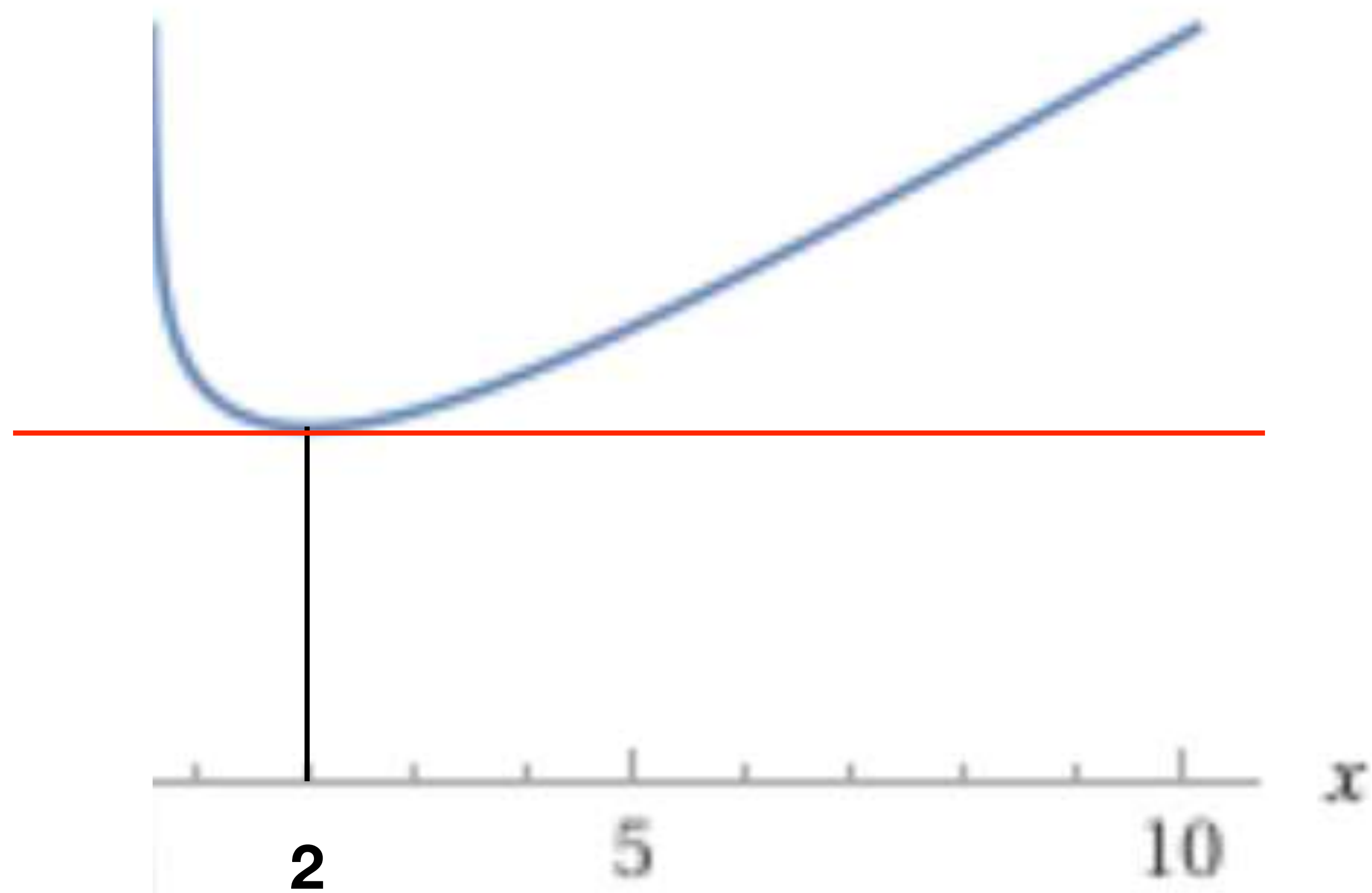
$$\Rightarrow S = mg^2 T^3 \left(\frac{n^2}{8(2n-1)} + \frac{1}{2(n+1)} \right) = \frac{mg^2}{2} T^3 \frac{n^3 + n^2 + 8n - 4}{4(n+1)(2n-1)}$$

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel: freier Fall mit $E_{pot} = -mgx$

$$\Rightarrow S = mg^2T^3\left(\frac{n^2}{8(2n-1)} + \frac{1}{2(n+1)}\right) = \frac{mg^2}{2}T^3\frac{n^3+n^2+8n-4}{4(n+1)(2n-1)}$$

plot	$\frac{x^3+x^2+8x-4}{(x+1)(2x-1)}$



Minimaler Wert bei $n = 2$

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

Definition der Wirkung S:

$$S = \int_{t_0}^{t_E} \left[E_{kin.} - E_{pot.}\right] dt = \int_{t_0}^{t_E} \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))\right] dt$$

- **Die kinetische Energie ist eine Funktion von $\dot{x}(t)$**
- **Die potentielle Energie ist eine Funktion von $x(t)$**
- **Die Lagrange-Funktion L wird definiert als** $L = E_{kin.}\left[\dot{x}(t)\right] - E_{pot.}\left[x(t)\right]$
- L **ist eine Funktion von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ - in ihr steckt die gesamte Physik**

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x(t), \dot{x}(t)\right] dt$$

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

Man kann zeigen: Die Wirkung S

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x(t), \dot{x}(t)\right] dt$$

ist genau dann extremal, wenn gilt

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Beachte: Die Lagrange-Funktion muss partiell nach x **und** $\dot{x}$ **abgeleitet werden**

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

Beispiel:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = F$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow F = m\ddot{x}$$

D.h.: Das Prinzip der kleinsten Wirkung beinhaltet "Newton"

Prinzip der kleinsten Wirkung

N **Teilchen, 3 Koordinaten pro Teilchen:** $x_i(t)$**,** $i = 1,\ldots,3N$

Prinzip der kleinsten Wirkung

N **Teilchen, 3 Koordinaten pro Teilchen:** $x_i(t)$**,** $i = 1,\ldots,3N$

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x_i(t), \dot{x}_i(t)\right] dt$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

N **Teilchen, 3 Koordinaten pro Teilchen:** $x_i(t)$**,** $i = 1,\ldots,3N$

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x_i(t), \dot{x}_i(t)\right] dt$$

$$L = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2(t) - E_{pot.}(x_i(t))$$

Prinzip der kleinsten Wirkung

N **Teilchen, 3 Koordinaten pro Teilchen:** $x_i(t)$**,** $i = 1,\ldots,3N$

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x_i(t), \dot{x}_i(t)\right] dt$$

$$L = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2(t) - E_{pot.}(x_i(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**
2) **Praktischer Vorteil beim Wechsel von Koordinatensystemen**

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**
2) **Praktischer Vorteil beim Wechsel von Koordinatensystemen**

System 1: Koordinate x

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**
2) **Praktischer Vorteil beim Wechsel von Koordinatensystemen**

System 1: Koordinate x

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**
2) **Praktischer Vorteil beim Wechsel von Koordinatensystemen**

System 1: Koordinate x

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**
2) **Praktischer Vorteil beim Wechsel von Koordinatensystemen**

System 1: Koordinate x

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dE_{pot.}(x)}{dx}$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**
2) **Praktischer Vorteil beim Wechsel von Koordinatensystemen**

System 1: Koordinate x

System 2: Bewegt, Koordinate $X = x - f(t)$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dE_{pot.}(x)}{dx}$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**
2) **Praktischer Vorteil beim Wechsel von Koordinatensystemen**

System 1: Koordinate x

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dE_{pot.}(x)}{dx}$$

System 2: Bewegt, Koordinate $X = x - f(t)$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X} + \dot{f})^2(t) - E_{pot.}(X(t))$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**
2) **Praktischer Vorteil beim Wechsel von Koordinatensystemen**

System 1: Koordinate x

System 2: Bewegt, Koordinate $X = x - f(t)$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X} + \dot{f})^2(t) - E_{pot.}(X(t))$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dE_{pot.}(x)}{dx}$$

$$m\ddot{X} = -\frac{dE_{pot.}(X)}{dX} - \ddot{f}$$

Scheinkraft

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x **und** y

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x und y

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x **und** y

System 2: Koordinaten X **und** Y

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x **und** y

System 2: Koordinaten X **und** Y

$$x = X\cos\omega t + Y\sin\omega t$$

$$y = -X\sin\omega t + Y\cos\omega t$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x **und** y

System 2: Koordinaten X **und** Y

$$x = X\cos\omega t + Y\sin\omega t$$

$$y = -X\sin\omega t + Y\cos\omega t$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + m\omega(\dot{X}Y - \dot{Y}X)$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x und y

System 2: Koordinaten X und Y

$$x = X\cos\omega t + Y\sin\omega t$$

$$y = -X\sin\omega t + Y\cos\omega t$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + m\omega(\dot{X}Y - \dot{Y}X)$$

$$m\ddot{X} = m\omega^2 X - 2m\omega\dot{Y}$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x und y

System 2: Koordinaten X und Y

$$x = X\cos\omega t + Y\sin\omega t$$

$$y = -X\sin\omega t + Y\cos\omega t$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + m\omega(\dot{X}Y - \dot{Y}X)$$

$$m\ddot{X} = m\omega^2 X - 2m\omega\dot{Y}$$
$$m\ddot{Y} = m\omega^2 Y + 2m\omega\dot{X}$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x und y

System 2: Koordinaten X und Y

$$x = X\cos\omega t + Y\sin\omega t$$

$$y = -X\sin\omega t + Y\cos\omega t$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + m\omega(\dot{X}Y - \dot{Y}X)$$

Zentrifugalkraft

$$\vec{F} = m\omega^2\vec{r}$$

$$m\ddot{X} = m\omega^2 X - 2m\omega\dot{Y}$$

$$m\ddot{Y} = m\omega^2 Y + 2m\omega\dot{X}$$

Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x und y

System 2: Koordinaten X und Y

$$x = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$$

$$y = -X \sin \omega t + Y \cos \omega t$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + m\omega(\dot{X}Y - \dot{Y}X)$$

Zentrifugalkraft

$$\vec{F} = m\omega^2 \vec{r}$$

Corioliskraft

$$F_X = -2m\omega\dot{Y}$$

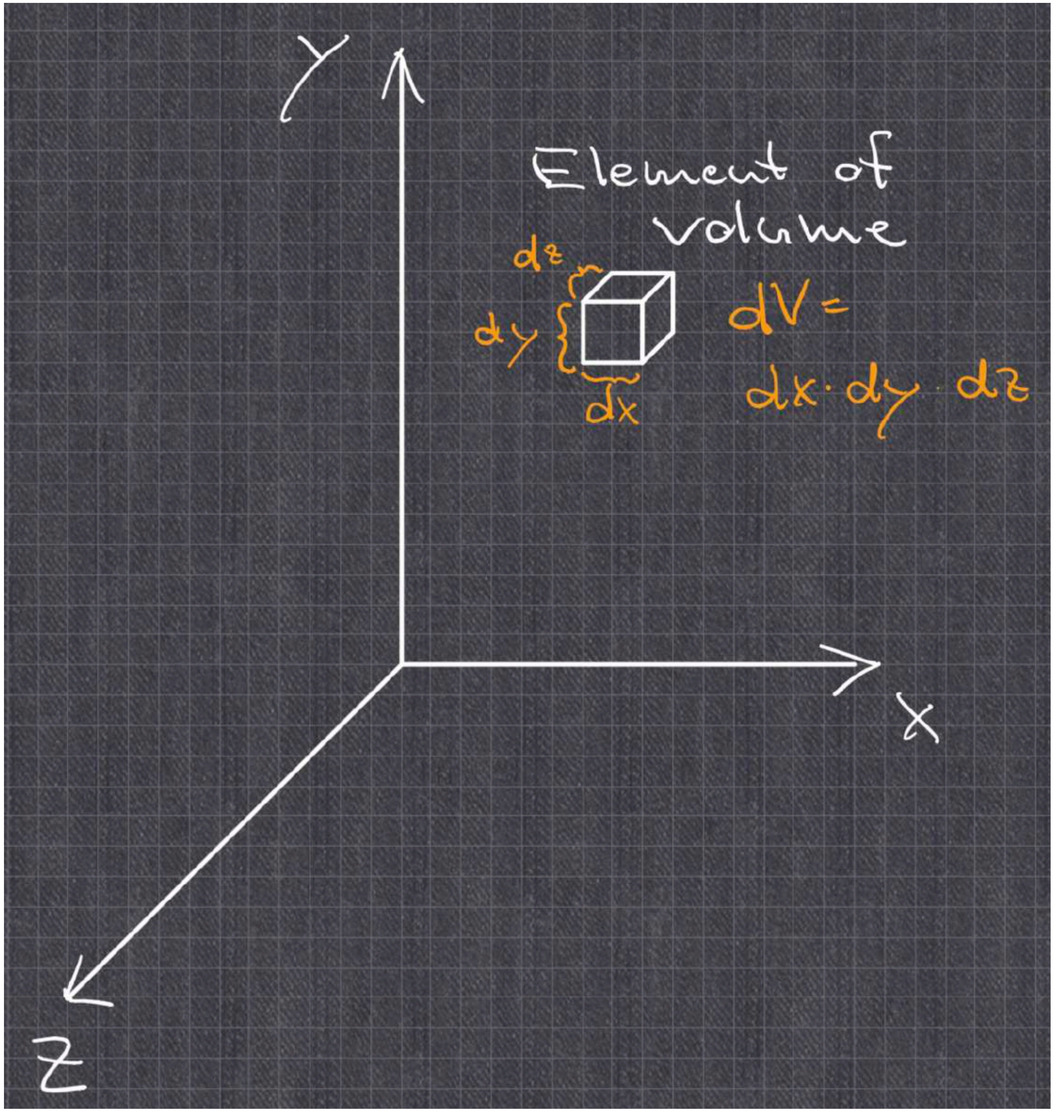
$$F_Y = +2m\omega\dot{X}$$

$$m\ddot{X} = m\omega^2 X - 2m\omega\dot{Y}$$

$$m\ddot{Y} = m\omega^2 Y + 2m\omega\dot{X}$$

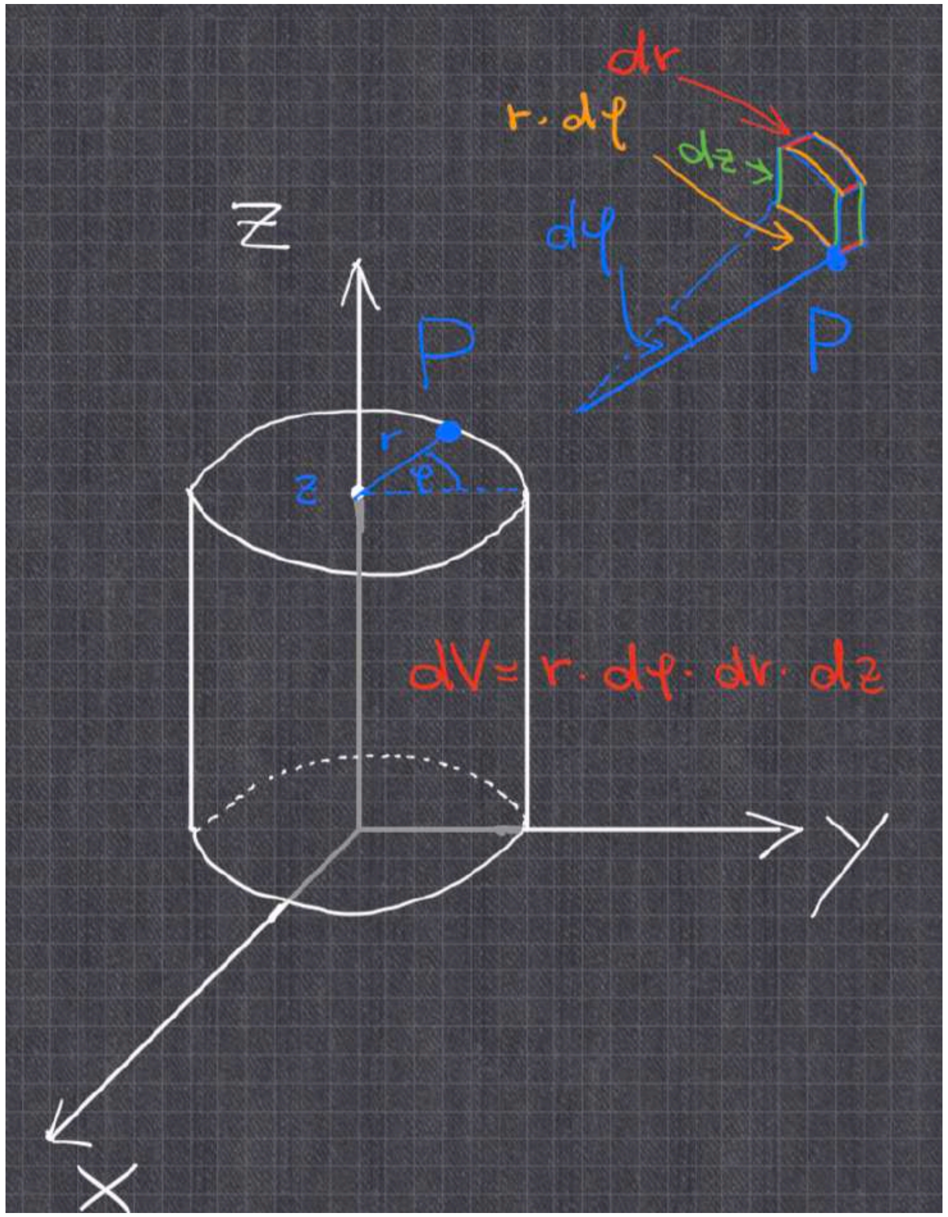
Verallgemeinerte Koordinaten

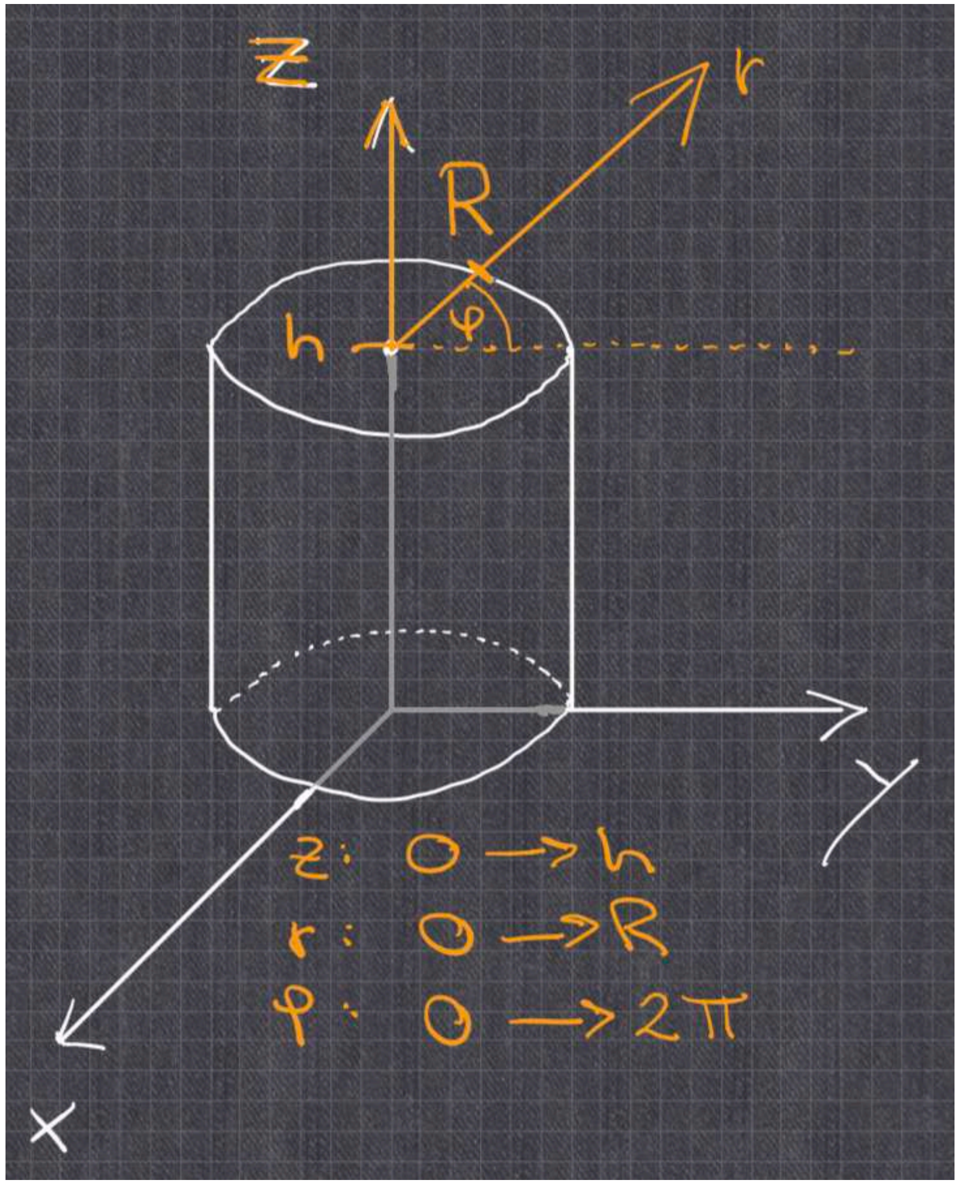
Kartesische Koordinaten, Zylinder Koordinaten, Kugelkoordinaten



Verallgemeinerte Koordinaten

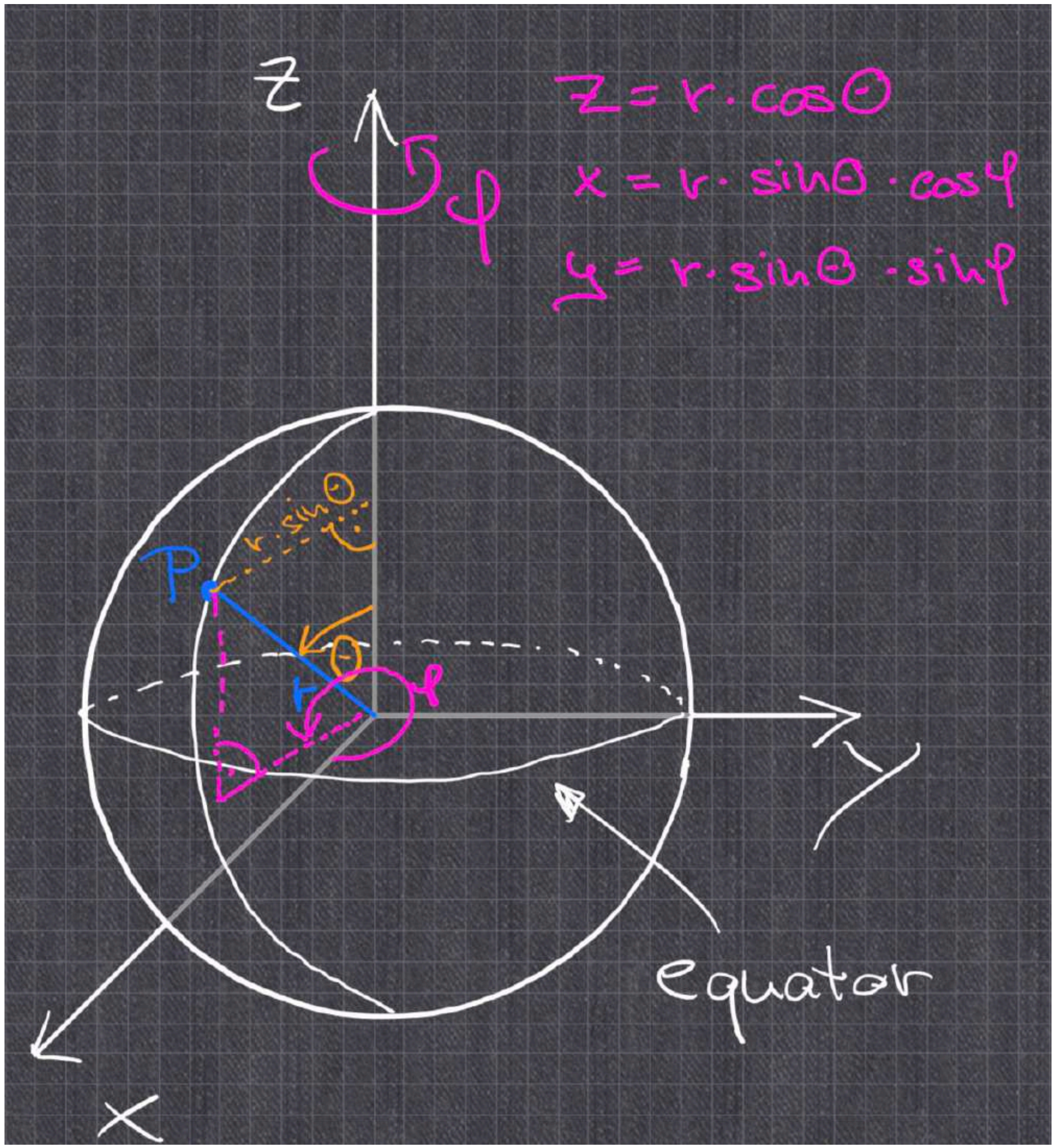
Kartesische Koordinaten, Zylinder Koordinaten, Kugelkoordinaten

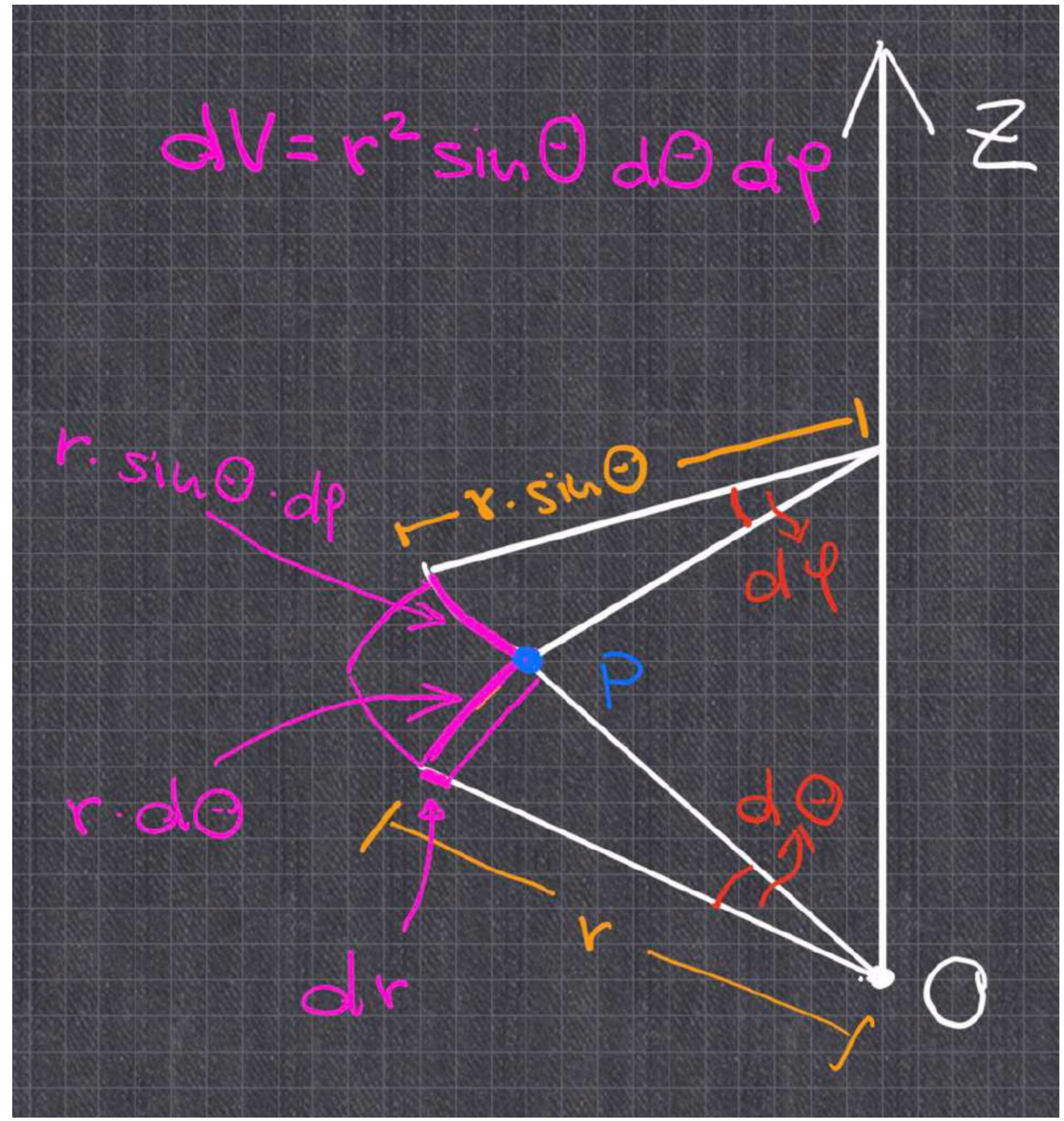




Verallgemeinerte Koordinaten

Kartesische Koordinaten, Zylinder Koordinaten, Kugelkoordinaten





Verallgemeinerte Koordinaten

(x, y, z) **oder** (r, z, ϕ) **oder** (r, θ, φ)

Verallgemeinerte Koordinaten

(x, y, z) **oder** (r, z, ϕ) **oder** (r, θ, φ)**: allgemein** q_i

Verallgemeinerte Koordinaten

(x, y, z) **oder** (r, z, ϕ) **oder** (r, θ, φ)**: allgemein** q_i

Verallgemeinerte Geschwindigkeit: $\dot{q}_i$

Verallgemeinerte Koordinaten

(x, y, z) **oder** (r, z, ϕ) **oder** (r, θ, φ)**: allgemein** q_i

Verallgemeinerte Geschwindigkeit: $\dot{q}_i$

Lagrange-Funktion: $L = L(q_i, \dot{q}_i)$

Verallgemeinerte Koordinaten

(x, y, z) **oder** (r, z, ϕ) **oder** (r, θ, φ)**: allgemein** q_i
Verallgemeinerte Geschwindigkeit: $\dot{q}_i$

Lagrange-Funktion: $L = L(q_i, \dot{q}_i)$

Prinzip der kleinsten Wirkung: Euler-Lagrange-Gleichung

Verallgemeinerte Koordinaten

(x, y, z) **oder** (r, z, ϕ) **oder** (r, θ, φ)**: allgemein** q_i

Verallgemeinerte Geschwindigkeit: $\dot{q}_i$

Lagrange-Funktion: $L = L(q_i, \dot{q}_i)$

Prinzip der kleinsten Wirkung: Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Verallgemeinerte Koordinaten

(x, y, z) **oder** (r, z, ϕ) **oder** (r, θ, φ)**: allgemein** q_i

Verallgemeinerte Geschwindigkeit: $\dot{q}_i$

Lagrange-Funktion: $L = L(q_i, \dot{q}_i)$

Prinzip der kleinsten Wirkung: Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Definition: Verallgemeinerter Impuls $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ **oder**

zu q_i **konjugierter Impuls**

Verallgemeinerte Koordinaten

(x, y, z) **oder** (r, z, ϕ) **oder** (r, θ, φ)**: allgemein** q_i

Verallgemeinerte Geschwindigkeit: $\dot{q}_i$

Lagrange-Funktion: $L = L(q_i, \dot{q}_i)$

Prinzip der kleinsten Wirkung: Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Definition: Verallgemeinerter Impuls $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ **oder**

zu q_i **konjugierter Impuls**

Euler-Lagrange: $\dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r \sin \varphi$ **und** $y = r \cos \varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

Und somit $L = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

Und somit $L = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r \sin \varphi$ **und** $y = r \cos \varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}$

Und somit $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

Nun gibt es zwei generalisierte Impulse:

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

Und somit $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

Nun gibt es zwei generalisierte Impulse:

1. $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

Und somit $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

Nun gibt es zwei generalisierte Impulse:

1. $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ **mit** $\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

Und somit $L = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

Nun gibt es zwei generalisierte Impulse:

1. $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ **mit** $\dot{p}_r = \dfrac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2$**, d.h.** $\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

Und somit $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

Nun gibt es zwei generalisierte Impulse:

1. $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ **mit** $\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2$**, d.h.** $\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2$

2. $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

Und somit $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

Nun gibt es zwei generalisierte Impulse:

1. $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ **mit** $\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2$**, d.h.** $\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2$

2. $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$ **mit** $\dot{p}_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

Und somit $L = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

Nun gibt es zwei generalisierte Impulse:

1. $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ **mit** $\dot{p}_r = \dfrac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2$**, d.h.** $\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2$

2. $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$ **mit** $\dot{p}_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$**, d.h.** $mr^2\dot{\varphi} =$ **konstant!**

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$**:** x, y, z **sind zyklische Koordinaten**

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$**:** x, y, z **sind zyklische Koordinaten**

$\Rightarrow$ **die Impulse** $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$ **sind erhalten**

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$**:** x, y, z **sind zyklische Koordinaten**

$\Rightarrow$ **die Impulse** $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$ **sind erhalten**

Beispiel 2 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - V(x_1 - x_2)$

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$**:** x, y, z **sind zyklische Koordinaten**

$\Rightarrow$ **die Impulse** $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$ **sind erhalten**

Beispiel 2 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - V(x_1 - x_2)$**: es gibt keine zyklische Koordinaten?**

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$**:** x, y, z **sind zyklische Koordinaten**

$\Rightarrow$ **die Impulse** $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$ **sind erhalten**

Beispiel 2 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - V(x_1 - x_2)$**: es gibt keine zyklische Koordinaten?**

Def.: $x_\pm = \dfrac{x_1 \pm x_2}{2}$

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$**:** x, y, z **sind zyklische Koordinaten**

$\Rightarrow$ **die Impulse** $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$ **sind erhalten**

Beispiel 2 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - V(x_1 - x_2)$**: es gibt keine zyklische Koordinaten?**

Def.: $x_\pm = \frac{x_1 \pm x_2}{2} \Rightarrow \dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2 = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2}$

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$**:** x, y, z **sind zyklische Koordinaten**

$\Rightarrow$ **die Impulse** $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$ **sind erhalten**

Beispiel 2 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - V(x_1 - x_2)$**: es gibt keine zyklische Koordinaten?**

Def.: $x_\pm = \frac{x_1 \pm x_2}{2} \Rightarrow \dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2 = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2}$ **und somit**

$$L = m\left(\dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2\right) - V(x_-)$$

Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$**:** x, y, z **sind zyklische Koordinaten**

$\Rightarrow$ **die Impulse** $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$ **sind erhalten**

Beispiel 2 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - V(x_1 - x_2)$**: es gibt keine zyklische Koordinaten?**

Def.: $x_\pm = \frac{x_1 \pm x_2}{2} \Rightarrow \dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2 = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2}$ **und somit**

$$L = m\left(\dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2\right) - V(x_-)$$

Nun sieht man, dass x_+ **eine zyklische Koordinate ist, und, dass** $2m\dot{x}_+$ **erhalten ist**

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = - V'$$

$$\dot{p}_2 = + V'$$

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -V'$$

$$\dot{p}_2 = +V'$$

d.h. $p_1 + p_2$ **ist erhalten**

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -V'$$

$$\dot{p}_2 = +V'$$

d.h. $p_1 + p_2$ **ist erhalten**

Modifikation : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -V'$$

$$\dot{p}_2 = +V'$$

d.h. $p_1 + p_2$ **ist erhalten**

Modifikation : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -aV'$$

$$\dot{p}_2 = +bV'$$

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -V'$$

$$\dot{p}_2 = +V'$$

d.h. $p_1 + p_2$ **ist erhalten**

Modifikation : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -aV'$$

$$\dot{p}_2 = +bV'$$

d.h. $bp_1 + ap_2$ **ist erhalten**

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -V'$$

$$\dot{p}_2 = +V'$$

d.h. $p_1 + p_2$ **ist erhalten**

Modifikation : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 + q_2^2)$

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -V'$$

$$\dot{p}_2 = +V'$$

d.h. $p_1 + p_2$ **ist erhalten**

Modifikation : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 + q_2^2)$

Euler-Lagrange ergibt keine Erhaltungsgröße!

Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -V'$$

$$\dot{p}_2 = +V'$$

d.h. $p_1 + p_2$ **ist erhalten**

Modifikation : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 + q_2^2)$

Euler-Lagrange ergibt keine Erhaltungsgröße!

Gibt es ein Prinzip, das bestimmt, wann es welche Erhaltungsgrößen gibt?

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \rightarrow q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \to q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \to q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie,**

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \rightarrow q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \rightarrow q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i -> neue Koordinaten $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \rightarrow q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \rightarrow q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \to q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \to q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **ist nicht translationssymmetrisch**

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \rightarrow q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \rightarrow q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **ist nicht translationssymmetrisch => keine Impulserhaltung**

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q'_i = q'_i(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \to q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \to q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **ist nicht translationssymmetrisch => keine Impulserhaltung**

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \to q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \to q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **ist nicht translationssymmetrisch => keine Impulserhaltung**

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \to q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \to q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **ist nicht translationssymmetrisch => keine Impulserhaltung**

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \rightarrow q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \rightarrow q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **ist nicht translationssymmetrisch => keine Impulserhaltung**

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \rightarrow q_1 + \delta$ **und** $q_2 \rightarrow q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \to q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \to q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **ist nicht translationssymmetrisch => keine Impulserhaltung**

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$

Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \to q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \to q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **ist nicht translationssymmetrisch => keine Impulserhaltung**

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

Ende 7. Vorlesung

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nor vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

Notes: 7. Vorlesung

Eigenheiten von Lagrange

Herleitung von Euler-Lagrange

Teilchen bewegen sich im Phasenraum auf Bahnen mit konstanter Energie
Simon Schmidt - auf Unisono