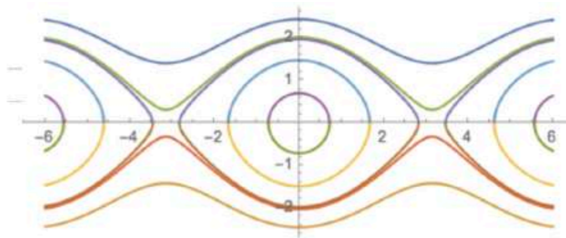
8. Vorlesung

Universität Siegen



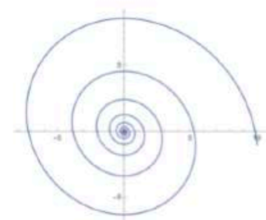
SUBATOMIC HEROES

Ankündigung für das Wintersemester 2024/25

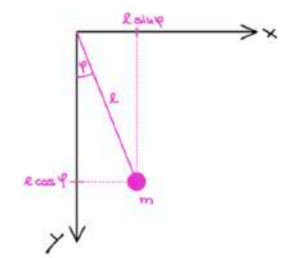
Das theoretische Minimum I

Mechanik - von Newton über Emmy Noether zu Heisenberg

Prof. Dr. Alexander Lenz, 4PHY00011V



$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}}}$$



Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundprinzipen der theoretischen Physik.

Im Wintersemester 2024/25 beschäftigen wir uns u.a. mit vermeintlich einfachen Problemen, wie dem Pendel oder dem Kepler-Problem (Planetenbahnen). Ausgehend von den **Newtonschen Axiomen** wird eine moderne und elegante Formulierung der theoretischen Mechanik vorgestellt, aus der später die Quantenmechanik direkt abgeleitet werden kann - dies wird der sogenannte **Lagrange-** und **Hamilton-Formalismus** sein. Weiter werden eingehend Symmetrieprinzipen diskutiert - insbesondere das zum Veranstaltungsort passende **Noether-Theorem** -, auf dessen Verallgemeinerung die heutige Elementarteilchenphysik und unser gesamtes Verständnis der Welt beruht.

$$L = L(x,\dot{x}) = E_{Kin} - E_{Pot} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)\,,$$

Die Vorlesung richtet sich an Mittwochsakademiker, Oberstufenschülerinnen und -schüler, Lehrkräfte, Physikenthusiasten mit einem großen Interesse an aktuellen Themen der Physik. Es werden mathematische Konzepte (auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe) eingeführt und benutzt. Die Vorlesung ist an die erfolgreiche Vorlesungs- und Buchreihe "**The theoretical Minimum**" von Leonard Susskind angelehnt, welche auf dieselbe Zielgruppe ausgerichtet war. Vom Niveau her wird sich die Veranstaltung auf dem schmalen Grat zwischen einer rein populärwissenschaftlichen Bildershow und einer theoretischen Physikvorlesung im Bachelorstudium bewegen.

9 Termine im Wintersemester 24/25:
20.11., 27.11., 4.12., 11.12, 18.12. ,8.1., 15.1., 22.1., 29.1.
Mittwochs 16-18
Emmy Noether Campus ENC-D-114
Infos unter: alexander.lenz@uni-siegen.de
https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/

Wdh.: Prinzip der kleinsten Wirkung

N **Teilchen, 3 Koordinaten pro Teilchen:** $x_i(t)$**,** $i = 1,\ldots,3N$

$$S = \int_{t_0}^{t_E} L\left[(x_i(t), \dot{x}_i(t)\right] dt$$

$$L = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2(t) - E_{pot.}(x_i(t))$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

Wdh.: Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

1) **Kompakte Schreibweise - alles in einer Funktion**
2) **Praktischer Vorteil beim Wechsel von Koordinatensystemen**

System 1: Koordinate x

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - E_{pot.}(x(t))$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dE_{pot.}(x)}{dx}$$

System 2: Bewegt, Koordinate $X = x - f(t)$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X} + \dot{f})^2(t) - E_{pot.}(X(t))$$

$$m\ddot{X} = -\frac{dE_{pot.}(X)}{dX} - \ddot{f}$$

Scheinkraft

Wdh.: Vorteile: Prinzip der kleinsten Wirkung

Zentrifugalkraft - Corioliskraft

System 1: Koordinaten x und y

System 2: Koordinaten X und Y

$$x = X\cos\omega t + Y\sin\omega t$$

$$y = -X\sin\omega t + Y\cos\omega t$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + m\omega(\dot{X}Y - \dot{Y}X)$$

Zentrifugalkraft

$$\vec{F} = m\omega^2\vec{r}$$

Corioliskraft

$$F_X = -2m\omega\dot{Y}$$

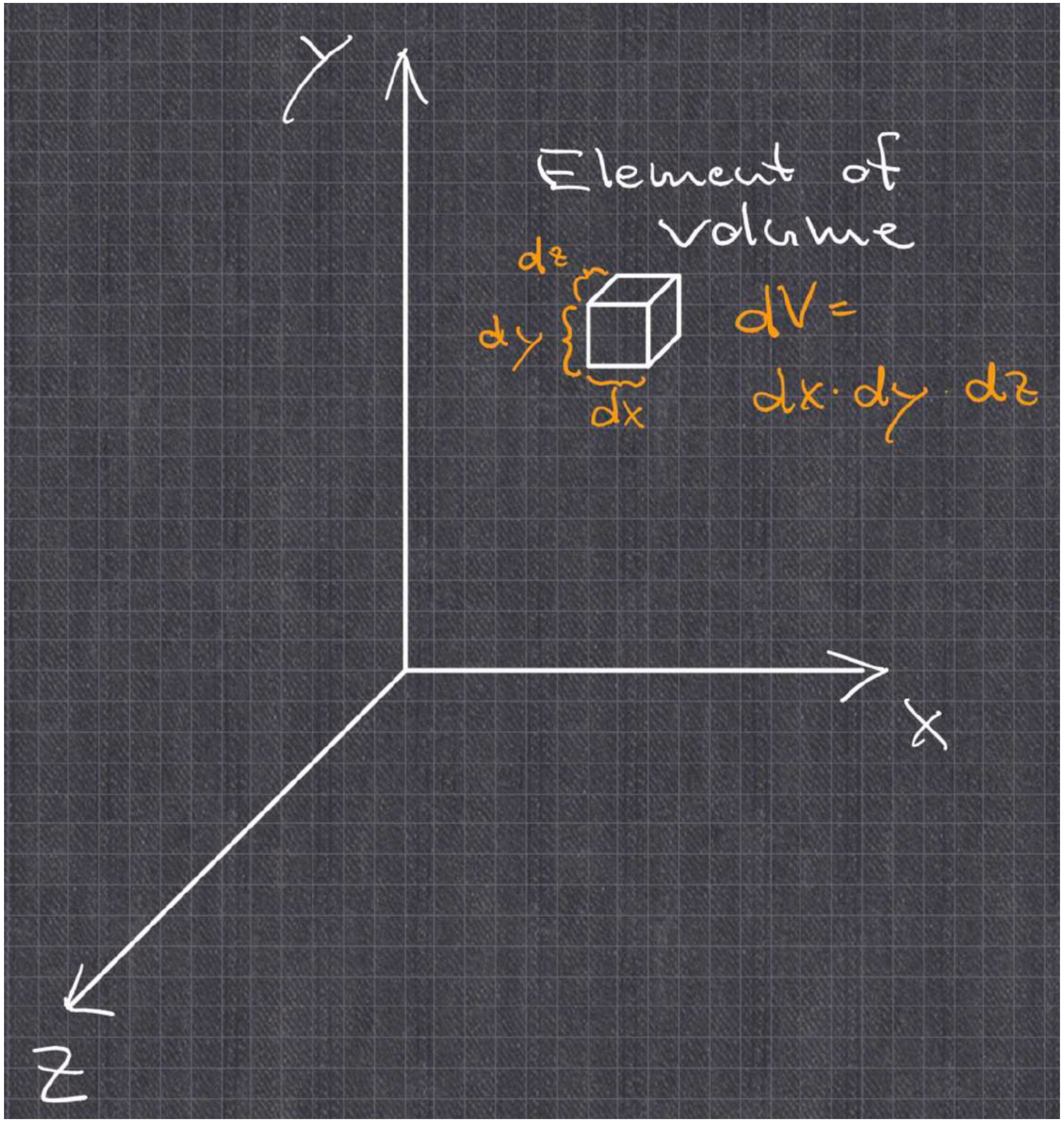
$$F_Y = +2m\omega\dot{X}$$

$$m\ddot{X} = m\omega^2 X - 2m\omega\dot{Y}$$

$$m\ddot{Y} = m\omega^2 Y + 2m\omega\dot{X}$$

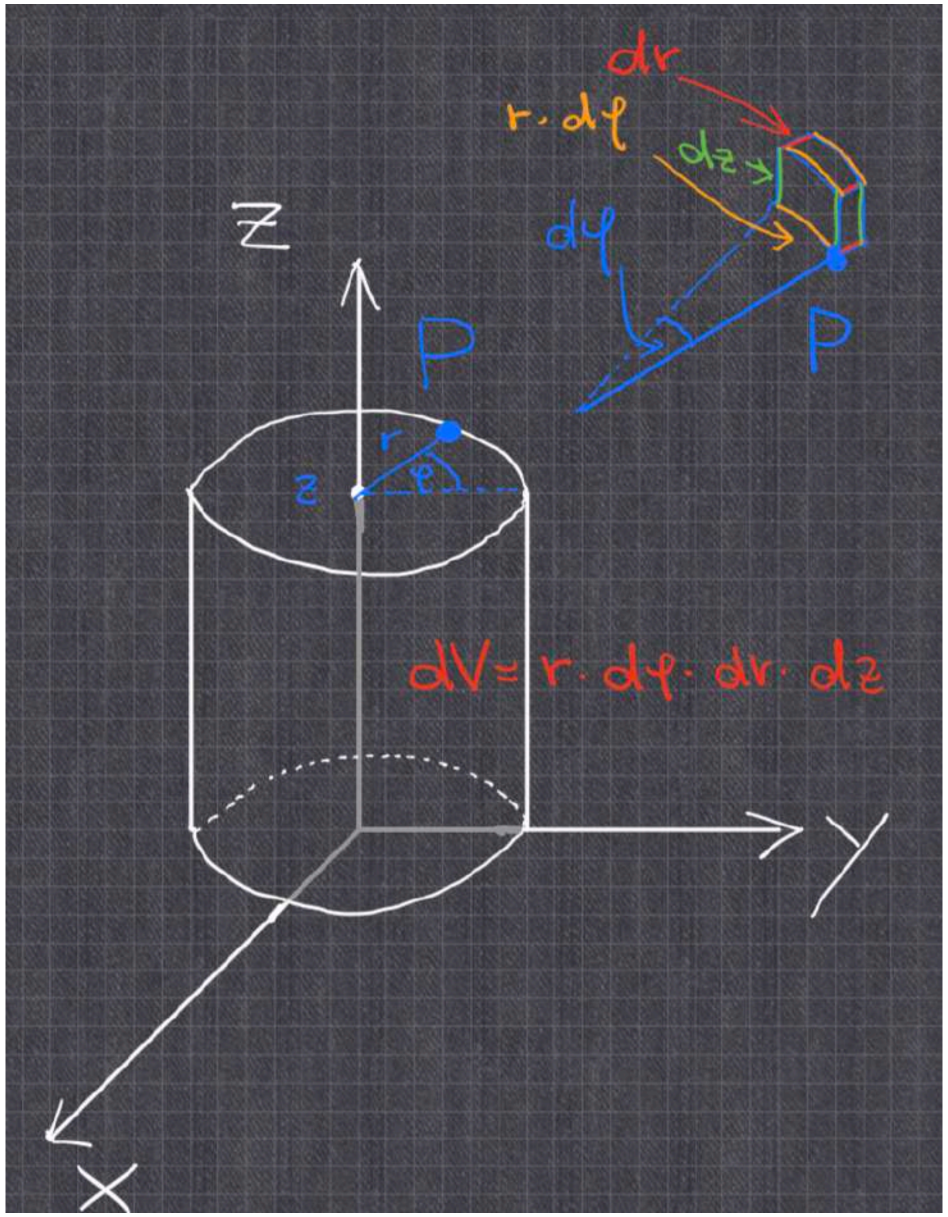
Wdh.: Verallgemeinerte Koordinaten

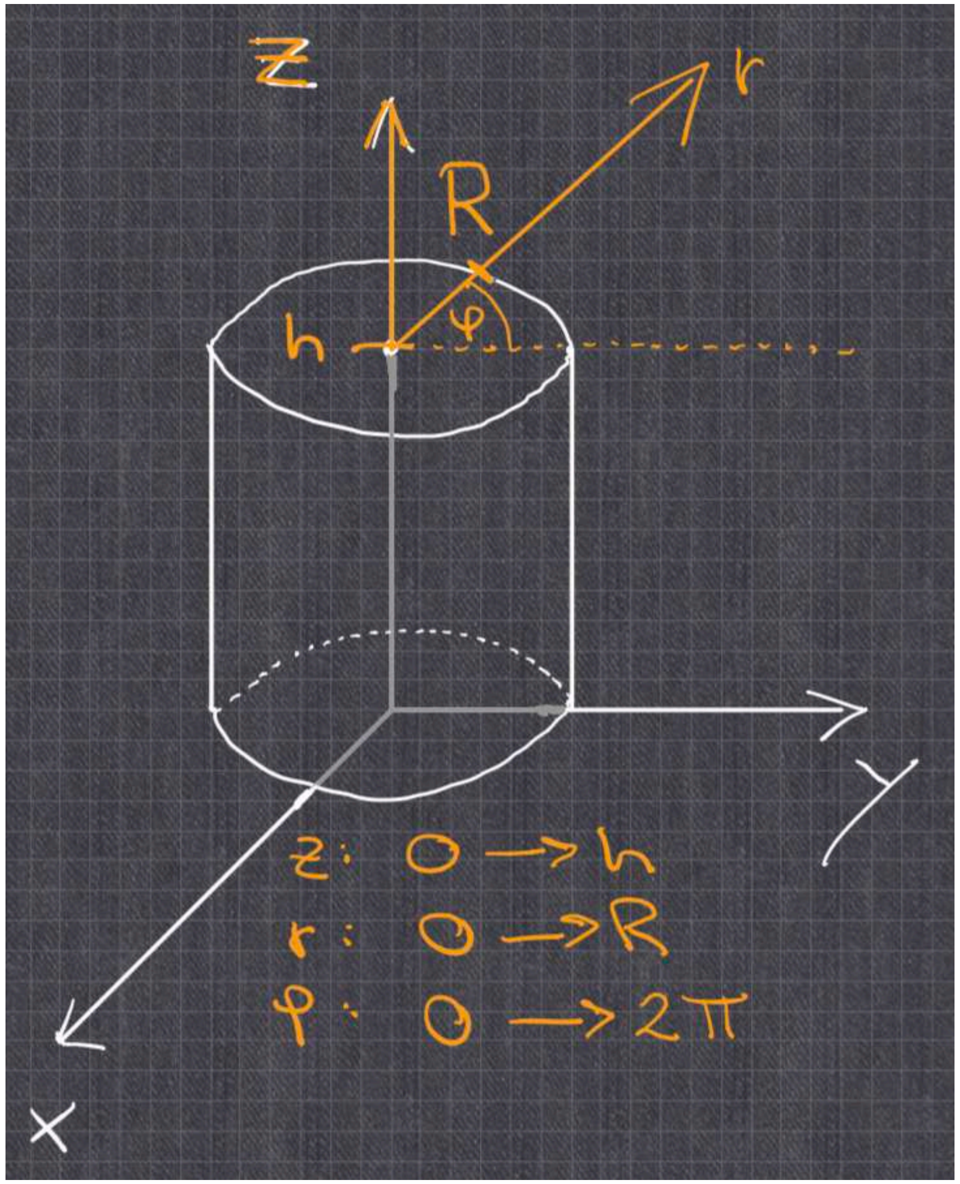
Kartesische Koordinaten, Zylinder Koordinaten, Kugelkoordinaten



Wdh.: Verallgemeinerte Koordinaten

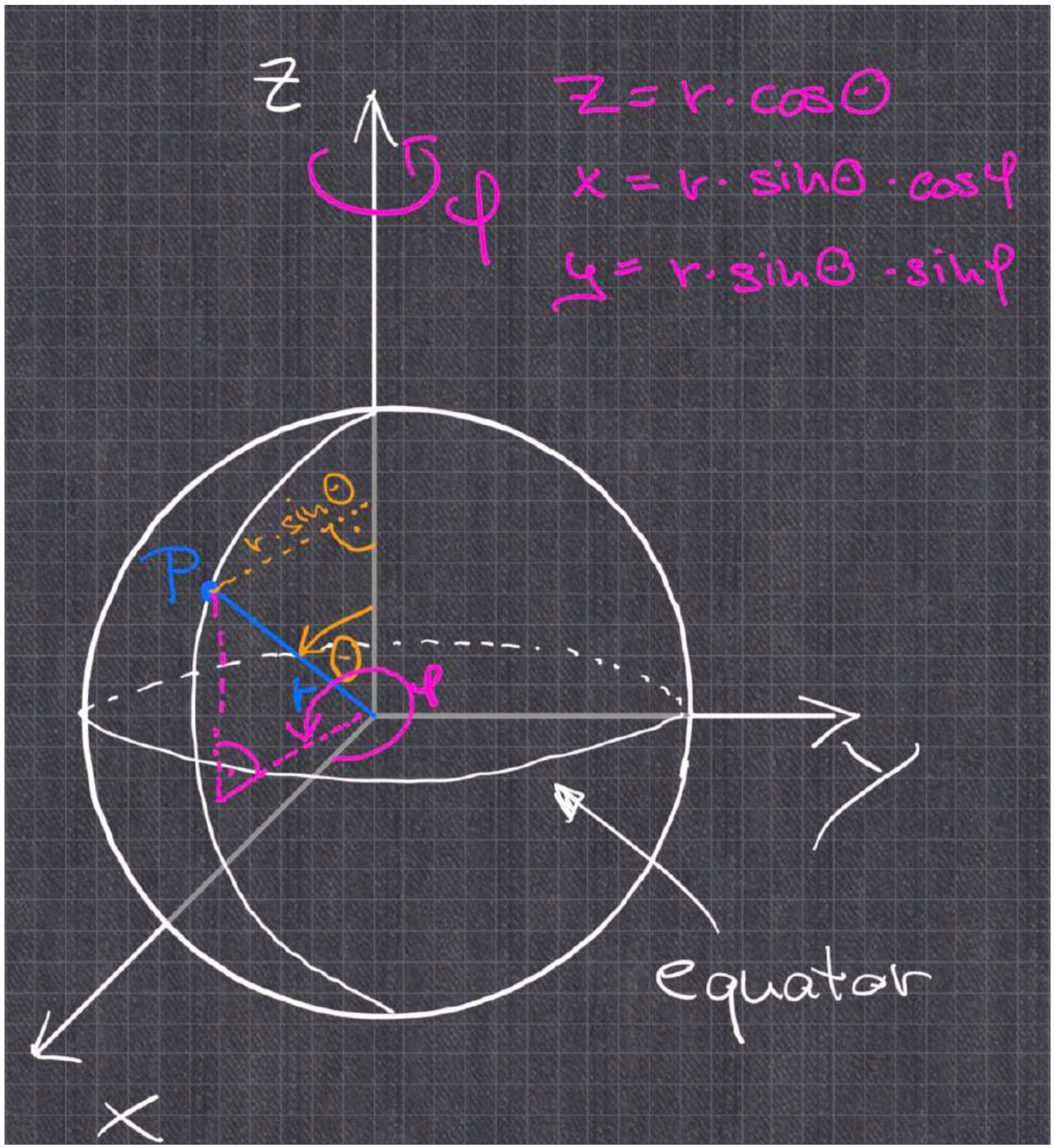
Kartesische Koordinaten, Zylinder Koordinaten, Kugelkoordinaten

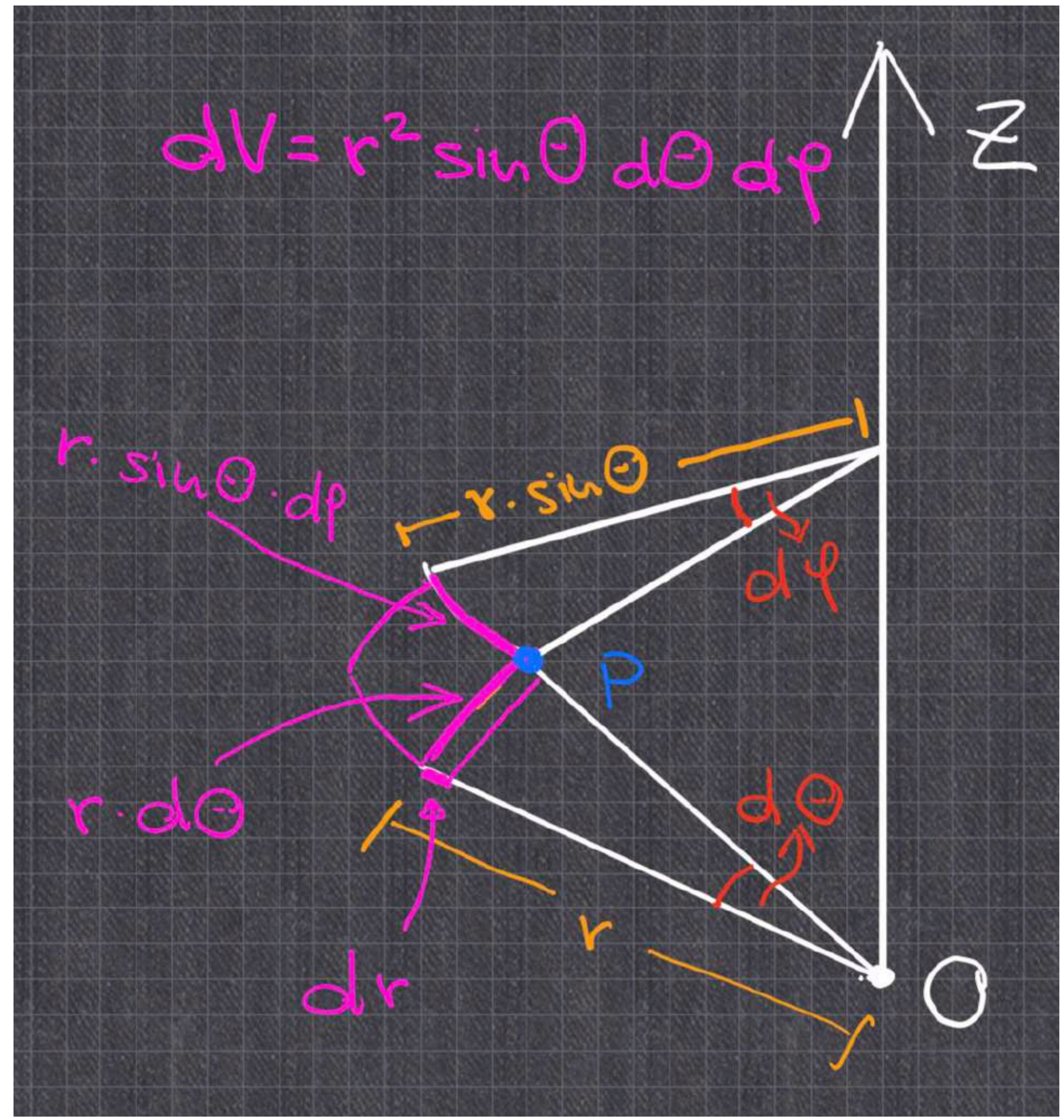




Wdh.: Verallgemeinerte Koordinaten

Kartesische Koordinaten, Zylinder Koordinaten, Kugelkoordinaten





Wdh.: Verallgemeinerte Koordinaten

(x, y, z) **oder** (r, z, ϕ) **oder** (r, θ, φ)**: allgemein** q_i

Verallgemeinerte Geschwindigkeit: $\dot{q}_i$

Lagrange-Funktion: $L = L(q_i, \dot{q}_i)$

Prinzip der kleinsten Wirkung: Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Definition: Verallgemeinerter Impuls $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ **oder**

zu q_i **konjugierter Impuls**

Euler-Lagrange: $\dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$

Wdh.: Verallgemeinerte Koordinaten

Beispiel: In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ **und** $\dot{y} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$

Und somit $L = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

Nun gibt es zwei generalisierte Impulse:

1. $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ **mit** $\dot{p}_r = \dfrac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2$**, d.h.** $\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2$

2. $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$ **mit** $\dot{p}_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$**, d.h.** $mr^2\dot{\varphi} =$ **konstant!**

Wdh.: Zyklische Koordinaten

Taucht eine Koordinate nicht explizit in der Lagrange-Funktion auf, dann ist der zugeordnete Impuls erhalten

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Beispiel 1 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$**:** x, y, z **sind zyklische Koordinaten**

$\Rightarrow$ **die Impulse** $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$ **sind erhalten**

Beispiel 2 : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - V(x_1 - x_2)$**: es gibt keine zyklische Koordinaten?**

Def.: $x_\pm = \frac{x_1 \pm x_2}{2} \Rightarrow \dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2 = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2}$ **und somit**

$$L = m\left(\dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2\right) - V(x_-)$$

Nun sieht man, dass x_+ **eine zyklische Koordinate ist, und, dass** $2m\dot{x}_+$ **erhalten ist**

Wdh.: Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen
Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -V'$$

$$\dot{p}_2 = +V'$$

d.h. $p_1 + p_2$ **ist erhalten**

Modifikation : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -aV'$$

$$\dot{p}_2 = +bV'$$

d.h. $bp_1 + ap_2$ **ist erhalten**

Wdh.: Erhaltungsgrößen

Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen

Zyklische Koordinate und zugehöriger Impuls

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Zurück zu Beispiel 2 : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Euler-Lagrange ergibt

$$\dot{p}_1 = -V'$$

$$\dot{p}_2 = +V'$$

d.h. $p_1 + p_2$ **ist erhalten**

Modifikation : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 + q_2^2)$

Euler-Lagrange ergibt keine Erhaltungsgröße!

Gibt es ein Prinzip, das bestimmt, wann es welche Erhaltungsgrößen gibt?

Wdh.: Noether Theorem

alte Koordinaten q_i **-> neue Koordinaten** $q_i' = q_i'(q_i)$

Eine Symmetrie ist eine aktive Koordinatentransformation, die den Wert der Lagrange-Funktion nicht ändert

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ **Koordinatentransformation:** $q \to q + \delta$ **ändert** L **nicht** $\delta L = 0$

$q \to q + \delta$ **ist in diesem Fall die Translationssymmetrie, die führt zur Impulserhaltung**

Beispiel: $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **ist nicht translationssymmetrisch => keine Impulserhaltung**

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

Beispiel : $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) + y\,(\delta - \ldots)$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) + y\,(\delta - \ldots) \approx x + y\delta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \dots\right) + y\,(\delta - \dots) \approx x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) + y\,(\delta - \ldots) \approx x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$$

$$y \to y\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) - x\,(\delta - \ldots)$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) + y\,(\delta - \ldots) \approx x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$$

$$y \to y\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) - x\,(\delta - \ldots) \approx y - x\delta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) + y\,(\delta - \ldots) \approx x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$$

$$y \to y\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) - x\,(\delta - \ldots) \approx y - x\delta \Rightarrow \dot{y} \approx \dot{y} - \dot{x}\delta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Gibt es da eine Symmetrie?

Hängt nur vom Abstand zum Ursprung ab - nicht von der Richtung

In Zylinderkoordinaten gilt $x = r\sin\varphi$ **und** $y = r\cos\varphi$

Daraus folgt: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$

Wir sehen: φ **ist eine zyklische Koordinate!**

Was findet man in kartesischen Koordinaten?

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) + y\,(\delta - \ldots) \approx x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$$

$$y \to y\left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \ldots\right) - x\,(\delta - \ldots) \approx y - x\delta \Rightarrow \dot{y} \approx \dot{y} - \dot{x}\delta$$

Wir entwickeln nur in linearen Termen in δ **- 1. Ordnung in** δ

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x + y\delta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$ **d.h.** $\delta x = +y\delta$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$ **d.h.** $\delta x = +y\delta$

$$y \to y - x\delta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$ **d.h.** $\delta x = +y\delta$

$$y \to y - x\delta \Rightarrow \dot{y} \approx \dot{y} - \dot{x}\delta$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$ **d.h.** $\delta x = +y\delta$

$y \to y - x\delta \Rightarrow \dot{y} \approx \dot{y} - \dot{x}\delta$ **d.h.** $\delta y = -x\delta$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$ **d.h.** $\delta x = + y\delta$

$y \to y - x\delta \Rightarrow \dot{y} \approx \dot{y} - \dot{x}\delta$ **d.h.** $\delta y = - x\delta$

Damit ändert sich die Lagrangedichte zu

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta \text{ \textbf{d.h.} } \delta x = +y\delta$$

$$y \to y - x\delta \Rightarrow \dot{y} \approx \dot{y} - \dot{x}\delta \text{ \textbf{d.h.} } \delta y = -x\delta$$

Damit ändert sich die Lagrangedichte zu

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\delta + \delta^2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{y}\dot{x}\delta + \delta^2\dot{y}^2\right) - V(x^2 + 2xy\delta + y^2\delta^2 + y^2 - 2xy\delta + x^2\delta^2)$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$ **d.h.** $\delta x = +y\delta$

$y \to y - x\delta \Rightarrow \dot{y} \approx \dot{y} - \dot{x}\delta$ **d.h.** $\delta y = -x\delta$

Damit ändert sich die Lagrangedichte zu

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\delta + \delta^2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{y}\dot{x}\delta + \delta^2\dot{y}^2\right) - V(x^2 + 2xy\delta + y^2\delta^2 + y^2 - 2xy\delta + x^2\delta^2)$$

Hier heben sich alle linearen Terme in δ **weg**

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \rightarrow x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \rightarrow -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \rightarrow x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$ **d.h.** $\delta x = +y\delta$

$y \rightarrow y - x\delta \Rightarrow \dot{y} \approx \dot{y} - \dot{x}\delta$ **d.h.** $\delta y = -x\delta$

Damit ändert sich die Lagrangedichte zu

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\delta + \delta^2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{y}\dot{x}\delta + \delta^2\dot{y}^2\right) - V(x^2 + 2xy\delta + y^2\delta^2 + y^2 - 2xy\delta + x^2\delta^2)$$

Hier heben sich alle linearen Terme in δ weg

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)(1+\delta^2) - V\left((x^2 + y^2)(1+\delta^2)\right)$$

Noether Theorem

Beispiel : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation:

$$x \to x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta \Rightarrow \dot{x} \approx \dot{x} + \dot{y}\delta$ **d.h.** $\delta x = +y\delta$

$y \to y - x\delta \Rightarrow \dot{y} \approx \dot{y} - \dot{x}\delta$ **d.h.** $\delta y = -x\delta$

Damit ändert sich die Lagrangedichte zu

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\delta + \delta^2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{y}\dot{x}\delta + \delta^2\dot{y}^2\right) - V(x^2 + 2xy\delta + y^2\delta^2 + y^2 - 2xy\delta + x^2\delta^2)$$

Hier heben sich alle linearen Terme in δ **weg**

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)(1 + \delta^2) - V\left((x^2 + y^2)(1 + \delta^2)\right)$$

Und man findet

$$\delta L = 0 + O(\delta^2)$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **i**

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \rightarrow q_1 + \delta$ **und** $q_2 \rightarrow q_2 + \delta$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \rightarrow q_1 + \delta$ **und** $q_2 \rightarrow q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \rightarrow q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \rightarrow q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

d.h. $f_1 = b$**,** $f_2 = a$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

d.h. $f_1 = b$**,** $f_2 = a$

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

d.h. $f_1 = b$**,** $f_2 = a$

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation: $x \to x\cos\theta + y\sin\theta$**.** $\quad y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1, f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

d.h. $f_1 = b, f_2 = a$

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation: $x \to x\cos\theta + y\sin\theta$**.** $\quad y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

d.h. $f_1 = b$**,** $f_2 = a$

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation: $x \to x\cos\theta + y\sin\theta$**.** $\quad y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$$x \to x + y\delta$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

d.h. $f_1 = b$**,** $f_2 = a$

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation: $x \to x\cos\theta + y\sin\theta$**.** $\quad y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta$ **d.h.** $f_x = +y$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

d.h. $f_1 = b$**,** $f_2 = a$

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation: $x \to x\cos\theta + y\sin\theta$**.** $y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta$ **d.h.** $f_x = +y$

$y \to y - x\delta$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + \delta$ **und** $q_2 \to q_2 + \delta$ **=> Impulserhaltung** $p_1 + p_2$

d.h. $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

$q_1 \to q_1 + b\delta$ **und** $q_2 \to q_2 + a\delta$ **=> Impulserhaltung** $bp_1 + ap_2$

d.h. $f_1 = b$**,** $f_2 = a$

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Betrachte eine Rotation: $x \to x\cos\theta + y\sin\theta$**.** $y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$

Betrachte eine infinitesimale Rotation um den kleinen Winkel δ

$x \to x + y\delta$ **d.h.** $f_x = +y$

$y \to y - x\delta$ **d.h.** $f_y = -x$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition:

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten,

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q, \dot{q})$ bei obiger Transformation?

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q, \dot{q})$ **bei obiger Transformation?**

$$\delta L$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet**

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q, \dot{q})$ **bei obiger Transformation?**

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{dq_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q,\dot{q})$ bei obiger Transformation?

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{dq_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)$$

$$\Rightarrow \delta L = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i + \dots \right)$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q, \dot{q})$ bei obiger Transformation?

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{dq_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)$$

$$\Rightarrow \delta L = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) \right)$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q, \dot{q})$ bei obiger Transformation?

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{d q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)$$

$$\Rightarrow \delta L = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{d \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) \right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial L}{d \dot{q}_i}\delta q_i \right)$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q, \dot{q})$ bei obiger Transformation?

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{dq_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)$$

$$\Rightarrow \delta L = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) \right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i \right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(p_i f_i(q) \right) \delta$$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q, \dot{q})$ bei obiger Transformation?

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{dq_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)$$

$$\Rightarrow \delta L = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) \right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i \right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(p_i f_i(q)\right)\delta$$

D.h. wenn $\delta L = 0$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q, \dot{q})$ bei obiger Transformation?

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{dq_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)$$

$$\Rightarrow \delta L = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) \right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i \right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(p_i f_i(q) \right) \delta$$

D.h. wenn $\delta L = 0$, dann ist die Größe $Q = \sum_i p_i f_i(q)$

Noether Theorem

Etwas allgemeiner:

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet

$$\delta q_i = f_i(q)\delta$$

Man kann zeigen, dass

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta$$

Definition: Eine kontinuierliche Symmetrie ist eine infinitesimale Transformation der Koordinaten, welche die Lagrangefunktion nicht ändert

Also, wie ändert sich $L(q, \dot{q})$ bei obiger Transformation?

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{dq_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)$$

$$\Rightarrow \delta L = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) \right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial L}{d\dot{q}_i}\delta q_i \right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(p_i f_i(q) \right) \delta$$

D.h. wenn $\delta L = 0$, dann ist die Größe $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ zeitlich konstant

Noether Theorem

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet** $\delta q_i = f_i(q)\delta$

und somit $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta \quad \Rightarrow \delta L = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \left(p_i f_i(q)\right)}_{Q} \delta$

Noether-Theorem

Noether Theorem

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i **lautet** $\delta q_i = f_i(q)\delta$

und somit $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta \quad \Rightarrow \delta L = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \left(p_i f_i(q)\right)}_{Q} \delta$

Noether-Theorem

Amalie Emmy Noether
23 March 1882 Erlangen - 14 April 1935Bryn Mawr, Pennsylvania

Noether Theorem

Die infinitesimale Transformation der Koordinate q_i lautet $\delta q_i = f_i(q)\delta$

und somit $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \dot{f}_i(q)\delta \quad \Rightarrow \delta L = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \left(p_i f_i(q)\right)}_{Q} \delta$

Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

Noether-Theorem

Amalie Emmy Noether

23 March 1882 Erlangen - 14 April 1935Bryn Mawr, Pennsylvania

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$ **ist** $Q = p_1 + p_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$ **ist** $Q = p_1 + p_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$ **ist** $Q = p_1 + p_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$ **ist** $Q = p_1 + p_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = b$**,** $f_2 = a$

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$ **ist** $Q = p_1 + p_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = b$**,** $f_2 = a$ **ist** $Q = bp_1 + ap_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$ **ist** $Q = p_1 + p_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = b$**,** $f_2 = a$ **ist** $Q = bp_1 + ap_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$ **ist** $Q = p_1 + p_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = b$**,** $f_2 = a$ **ist** $Q = bp_1 + ap_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

mit $f_x = +y$ **und** $f_y = -x$

Noether Theorem

Beispiele für die Noetherladung $Q = \sum_i p_i f_i(q)$ $\quad$ **(**$\delta q_i = f_i(q)\delta$**)**

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(q_1 - q_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = 1$**,** $f_2 = 1$ **ist** $Q = p_1 + p_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 2: $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - V(aq_1 - bq_2)$ **ist translationssymmetrisch**

mit $f_1 = b$**,** $f_2 = a$ **ist** $Q = bp_1 + ap_2$ **= Impulserhaltung :-)**

Beispiel 3: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2)$

mit $f_x = +y$ **und** $f_y = -x$ **ist** $Q = p_x y - p_y x$ **= Drehimpulserhaltung :-)**

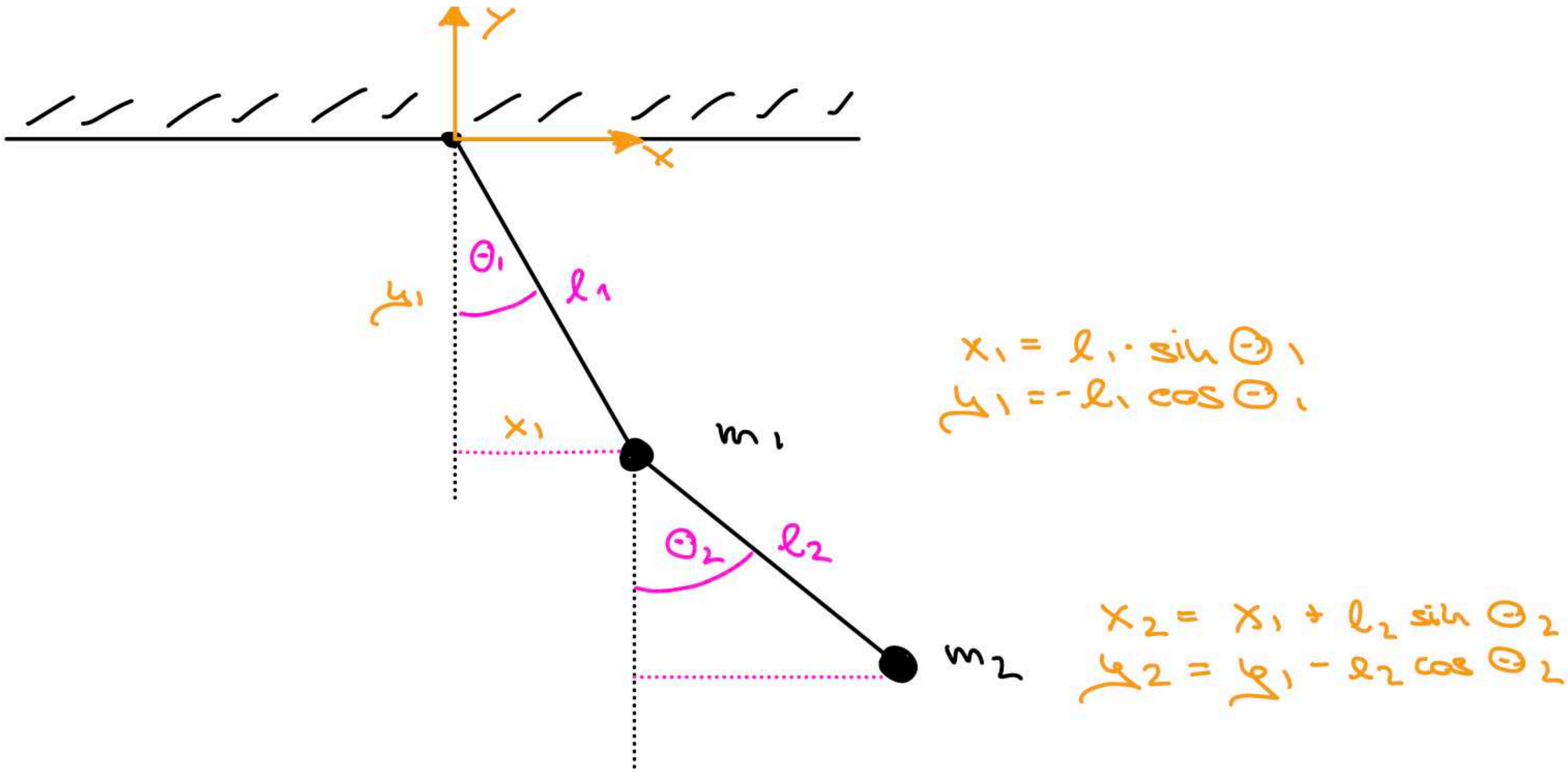
Noether Theorem

Translationssymmetrie im Raum führt zur Impulserhaltung

Rotationssymmetrie im Raum führt zur Drehimpulserhaltung

Stärke des Lagrange-Formalismus am Beispiel des Doppelpendels

Doppelpendel



$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$V = V_1 + V_2 = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt
$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt
$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt
$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt
$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

$$\frac{dL}{dt} =$$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt
$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)$$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt
$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt
$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt

$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Mit Euler-Lagrange wird dies zu

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt

$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Mit Euler-Lagrange wird dies zu

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt

$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Mit Euler-Lagrange wird dies zu

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\sum_i p_i\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt

$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Mit Euler-Lagrange wird dies zu

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

oder

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right)$$

Zeittranslationsinvarianz

Bisher Symmetrien in den Koordinate q_i untersucht
Was passiert bei Zeittranslationen?

Im allgemeinen gilt

$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **also z.B.** $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V(q_i, t)$

Gibt es keine explizite Zeitabhängigkeit der Lagrange-Funktion, dann heisst das System invariant unter Zeittranslationen

Wie sieht die Zeitabhängigkeit von $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ **aus?**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Mit Euler-Lagrange wird dies zu

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

oder

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right)}_{=:H}$$

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **mit** $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **mit** $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

damit lautet die Hamilton-Funktion

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **mit** $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

damit lautet die Hamilton-Funktion $H = p\dot{q} - L$

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **mit** $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

damit lautet die Hamilton-Funktion $H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)$

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **mit** $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

damit lautet die Hamilton-Funktion $H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)$

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **mit** $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

damit lautet die Hamilton-Funktion $H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)$

Dies entspricht der gesamten Energie!!!!

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **mit** $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

damit lautet die Hamilton-Funktion $H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)$

Dies entspricht der gesamten Energie!!!!
Zeittranslationsinvarianz bedeutet also Energieerhaltung

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **mit** $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

damit lautet die Hamilton-Funktion $H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)$

Dies entspricht der gesamten Energie!!!!
Zeittranslationsinvarianz bedeutet also Energieerhaltung

Anstatt von $H = H(\dot{q}, q)$ **kann die Hamilton-Funktion auch durch die Impulse und die Koordinaten ausgedrückt werden:**

Zeittranslationsinvarianz

Wir definieren nun die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

und finden, dass diese zeitlich konstant ist, wenn die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} H$$

Beispiel: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ **mit** $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

damit lautet die Hamilton-Funktion $H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)$

Dies entspricht der gesamten Energie!!!!
Zeittranslationsinvarianz bedeutet also Energieerhaltung

Anstatt von $H = H(\dot{q}, q)$ **kann die Hamilton-Funktion auch durch die Impulse und die Koordinaten ausgedrückt werden:** $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ **und** $\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ **und** $\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ **und** $\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Beispiel: harmonischer Oszillator

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \text{ und } \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \text{ und } \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \text{ und } \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q$$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \text{ und } \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q$$

$$\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \text{ und } \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q$$

$$\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \text{ und } \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q$$

$$\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

Damit folgt: $\ddot{p} = -m\omega^2 \dot{q}$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \text{ und } \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q$$

$$\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

Damit folgt: $\ddot{p} = -m\omega^2 \dot{q} = -\omega^2 p$

Zeittranslationsinvarianz

Hamilton-Funktion $H = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Man kann nun zeigen, dass aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgende Gleichungen für die Hamilton-Funktion folgen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \text{ und } \dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Diese Gleichungen heissen kanonische Gleichungen

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q$$

$$\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

Damit folgt: $\ddot{p} = -m\omega^2 \dot{q} = -\omega^2 p$ **welches wieder durch sin und cos gelöst wird!**

Phasenraum

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

Phasenraum

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

setze $m = \frac{1}{2}$ **und** $\omega = 2$ **und erhalte**

Phasenraum

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

setze $m = \frac{1}{2}$ **und** $\omega = 2$ **und erhalte**

$$H(p,q) = p^2 + q^2$$

Phasenraum

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

setze $m = \frac{1}{2}$ **und** $\omega = 2$ **und erhalte**

$$H(p,q) = p^2 + q^2$$

Im Phasenraum (p,q)**-Ebene ist dies ein Kreis!**

Phasenraum

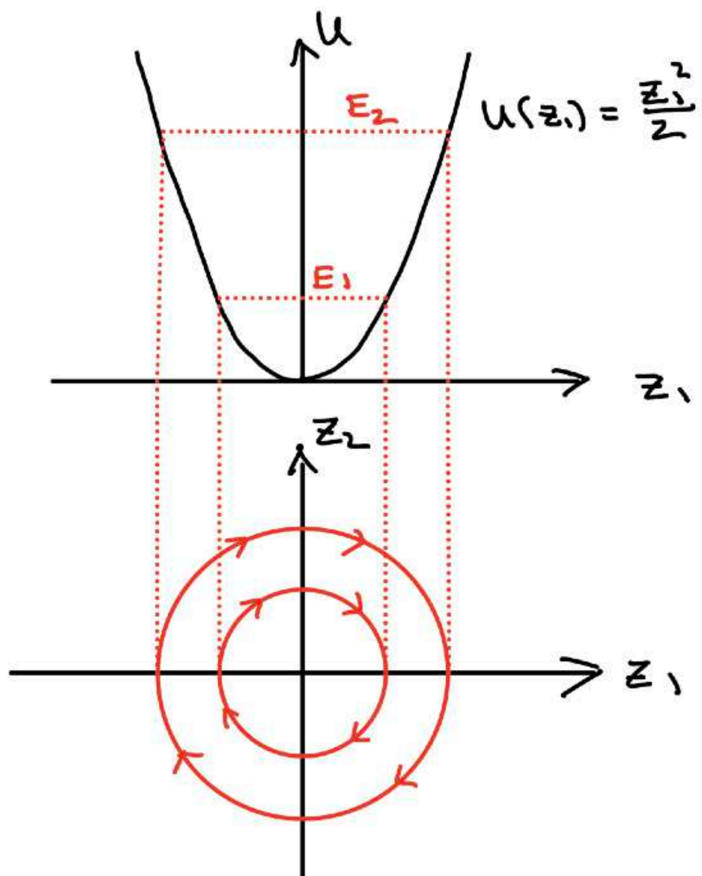
Beispiel: harmonischer Oszillator

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

setze $m = \frac{1}{2}$ **und** $\omega = 2$ **und erhalte**

$$H(p,q) = p^2 + q^2$$

Im Phasenraum (p,q)**-Ebene ist dies ein Kreis!**

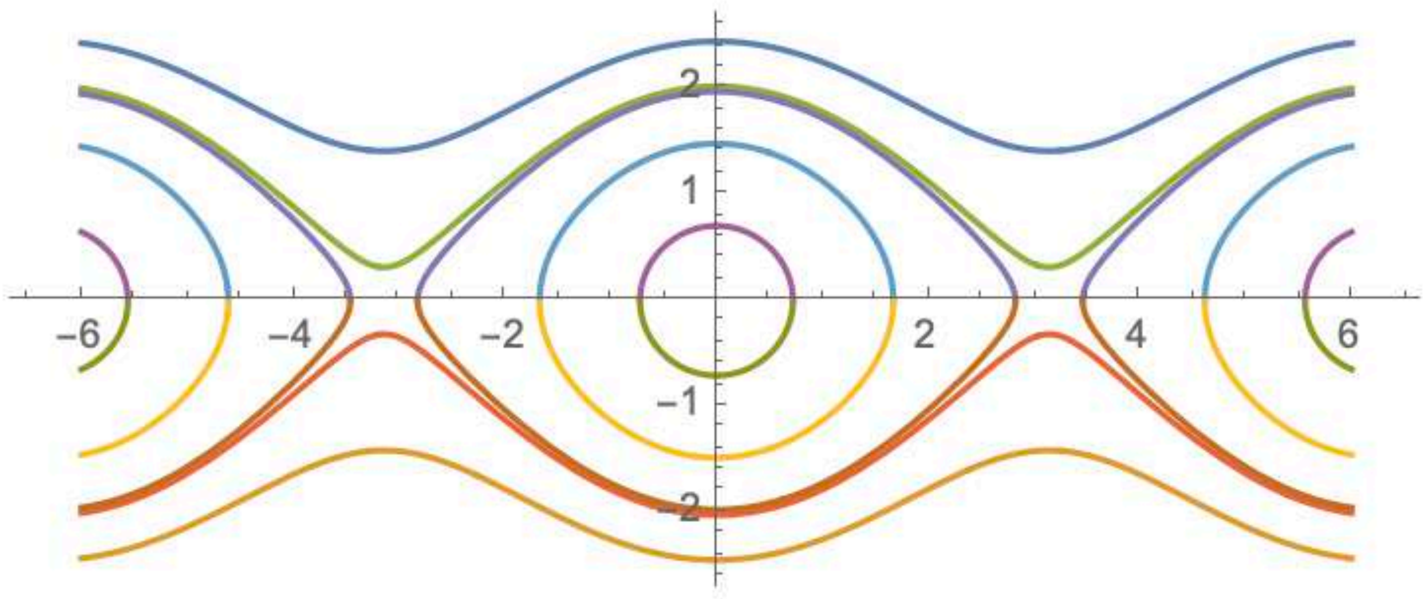


Phasenraum

Beispiel: harmonischer Oszillator ohne Näherung $\sin\phi \approx \phi$

```
ParametricPlot[{
  {phi,  Sqrt[2 (3. - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, -Sqrt[2 (3. - 1 + Cos[phi])]},
  {phi,  Sqrt[2 (2.05 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, -Sqrt[2 (2.05 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi,  Sqrt[2 (1.95 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, -Sqrt[2 (1.95 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi,  Sqrt[2 (1.1 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, -Sqrt[2 (1.1 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi,  Sqrt[2 (0.25 - 1 + Cos[phi])]},
  {phi, -Sqrt[2 (0.25 - 1 + Cos[phi])]}}, {phi, -6, 6}]
```

Out[53]=



Ende 8. Vorlesung

Universität Siegen

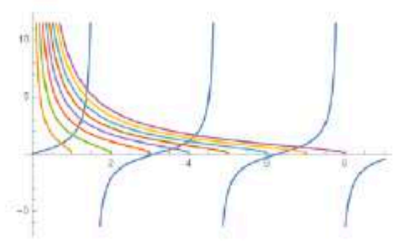
Schrödinger's Katze am Emmy Noether Campus: sie lebt!

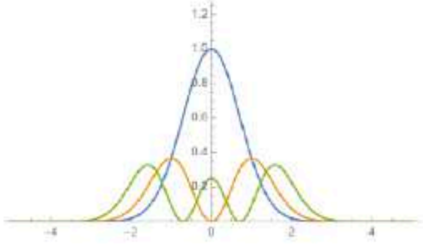
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

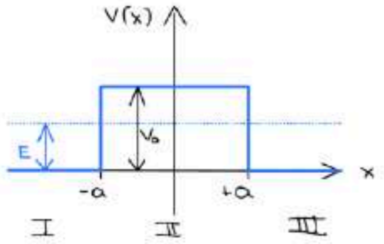
Ankündigung für das Sommersemester 2025

Das theoretische Minimum II

Quantenmechanik - Prof. Dr. Alexander Lenz, 4PHY00011V







Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundprinzipen der theoretischen Physik.

2025 wird weltweit das 100 jährige Jubiläum der Entdeckung der Quantenmechanik gefeiert. Ursprünglich war dies über viele Jahrzehnte lang reinste Grundlagenforschung ohne jegliche Hinweise auf potentielle Anwendungen. 100 Jahre später finden wir, dass ein Großteil der technologischen Errungenschaften der Menschheit im letzten Jahrhundert auf der Quantenmechanik basiert - zuletzt gipfelte dies in den ersten Quantencomputern.

Im Sommersemester 2025 beschäftigen wir uns daher mit einer Einführung in die Grundprinzipien der Quantenmechanik:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x},t)$$

Die Vorlesung richtet sich an Mittwochsakademiker, Oberstufenschülerinnen und -schüler, Lehrkräfte und Physikenthusiasten mit einem großen Interesse an aktuellen Themen der Physik. Es werden mathematische Konzepte (auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe) eingeführt und benutzt. Die Vorlesung ist an die erfolgreiche Vorlesungs- und Buchreihe **"The theoretical Minimum"** von Leonard Susskind angelehnt, welche auf dieselbe Zielgruppe ausgerichtet war. Vom Niveau her wird sich die Veranstaltung auf dem schmalen Grat zwischen einer rein populärwissenschaftlichen Bildershow und einer theoretischen Physikvorlesung im Bachelorstudium bewegen.

11 Termine im Sommersemester 25:
7.5., 14.5., 21.5., 28.5., 4.6., 11.6., 18.6., 25.6., 2.7., 9.7., 16.7.
Mittwochs 16-18
Emmy Noether Campus ENC-D-114
Infos unter: alexander.lenz@uni-siegen.de
https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/

SUBATOMIC HEROES