2Q25
Quantum2025

Universität Siegen

Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

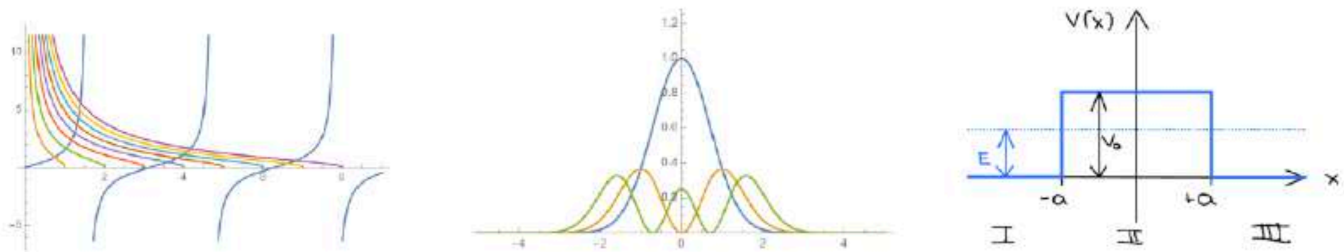
Schrödinger's Katze am Emmy Noether Campus: sie lebt!

https://www.quantum2025.de

Ankündigung für das Sommersemester 2025

Das theoretische Minimum II

Quantenmechanik - Prof. Dr. Alexander Lenz, 4PHY00011V



Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundprinzipen der theoretischen Physik.

2025 wird weltweit das 100 jährige Jubiläum der Entdeckung der Quantenmechanik gefeiert. Ursprünglich war dies über viele Jahrzehnte lang reinste Grundlagenforschung ohne jegliche Hinweise auf potentielle Anwendungen. 100 Jahre später finden wir, dass ein Großteil der technologischen Errungenschaften der Menschheit im letzten Jahrhundert auf der Quantenmechanik basiert - zuletzt gipfelte dies in den ersten Quantencomputern.

Im Sommersemester 2025 beschäftigen wir uns daher mit einer Einführung in die Grundprinzipien der Quantenmechanik:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x},t)$$

Die Vorlesung richtet sich an Mittwochsakademiker, Oberstufenschülerinnen und -schüler, Lehrkräfte und Physikenthusiasten mit einem großen Interesse an aktuellen Themen der Physik. Es werden mathematische Konzepte (auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe) eingeführt und benutzt. Die Vorlesung ist an die erfolgreiche Vorlesungs- und Buchreihe "**The theoretical Minimum**" von Leonard Susskind angelehnt, welche auf dieselbe Zielgruppe ausgerichtet war. Vom Niveau her wird sich die Veranstaltung auf dem schmalen Grat zwischen einer rein populärwissenschaftlichen Bildershow und einer theoretischen Physikvorlesung im Bachelorstudium bewegen.

11 Termine im Sommersemester 25:
7.5., 14.5., 21.5., 28.5., 4.6., 11.6., 18.6., 25.6., 2.7., 9.7., 16.7.
Mittwochs 16-18
Emmy Noether Campus ENC-D-114
Infos unter: alexander.lenz@uni-siegen.de
https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/

SUBATOMIC HEROES

Termine:

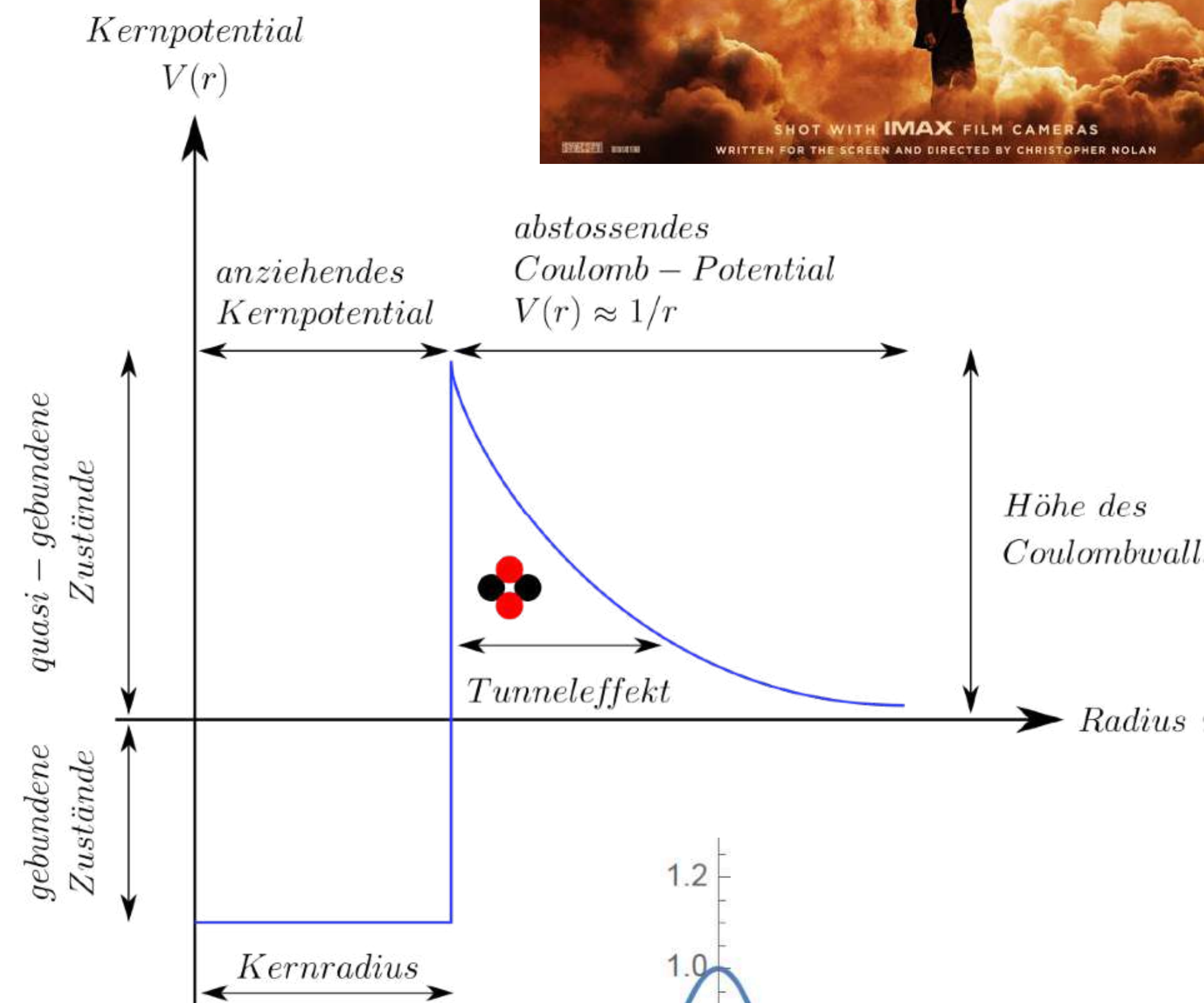
7.5:
14.5:
21.5:
28.5: Vertretung
4.6:
11.6:
18.6:
25.6: Prof. Tao Han
2.7:
9.7:
+ Oppenheimer
16.7:

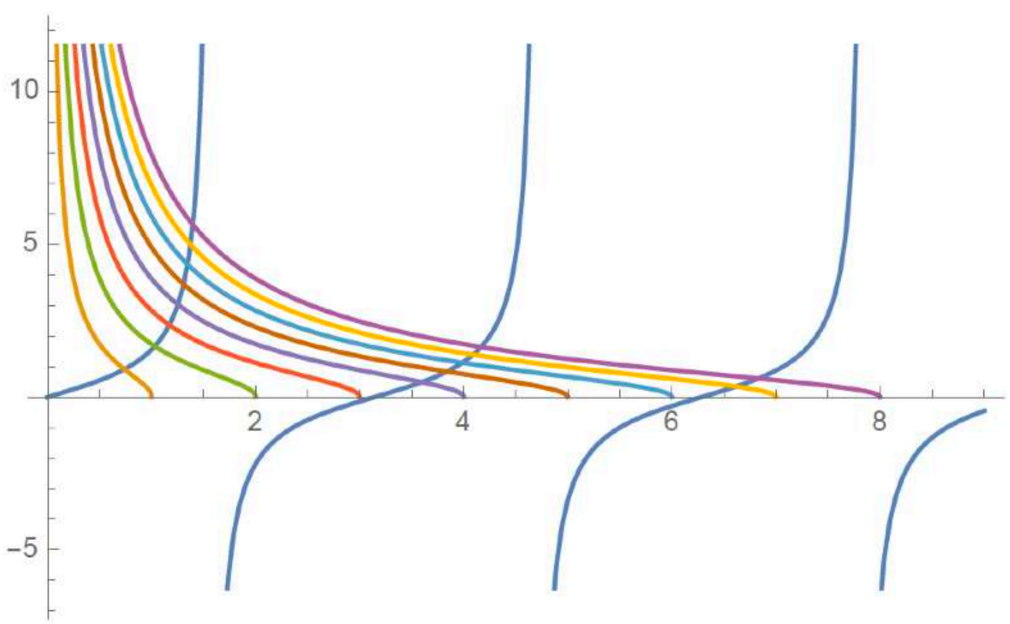
Prof. Dr. Tao Han forscht mit Unterstützung der Humboldt-Stiftung an der Uni Siegen.

Vorlesung: Das theoretische Minimum
Mittwochsakademie

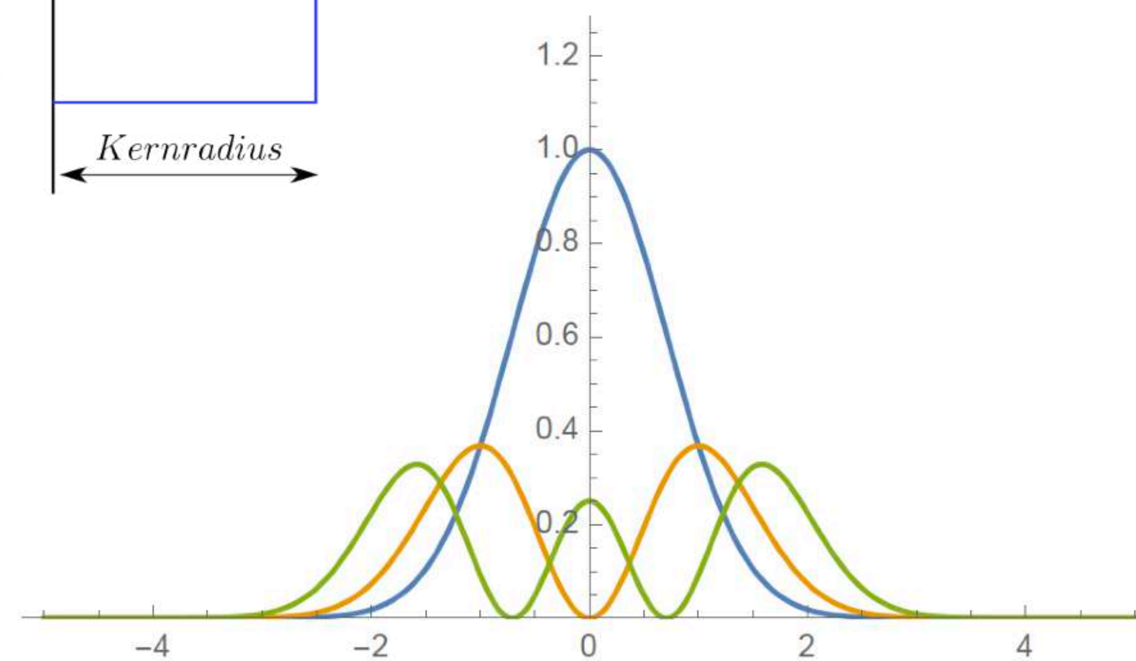
Ablauf

7.5.: Einführung
14.5.: Zustände, Vektorräume
21.5.: Grundprinzipien der QM
28.5.: Vertretung - Zeitentwicklung
4.6.: Unschärferelation
11.6.: Verschränklung
18.6.: Verschränklung II
25.6.: **Festkolloquium: Prof. Tao Han**
2.7.: Teilchen und Wellen
9.7.: Dynamik **+ Film: Oppenheimer**
16.7.: Harmonischer Oszillator



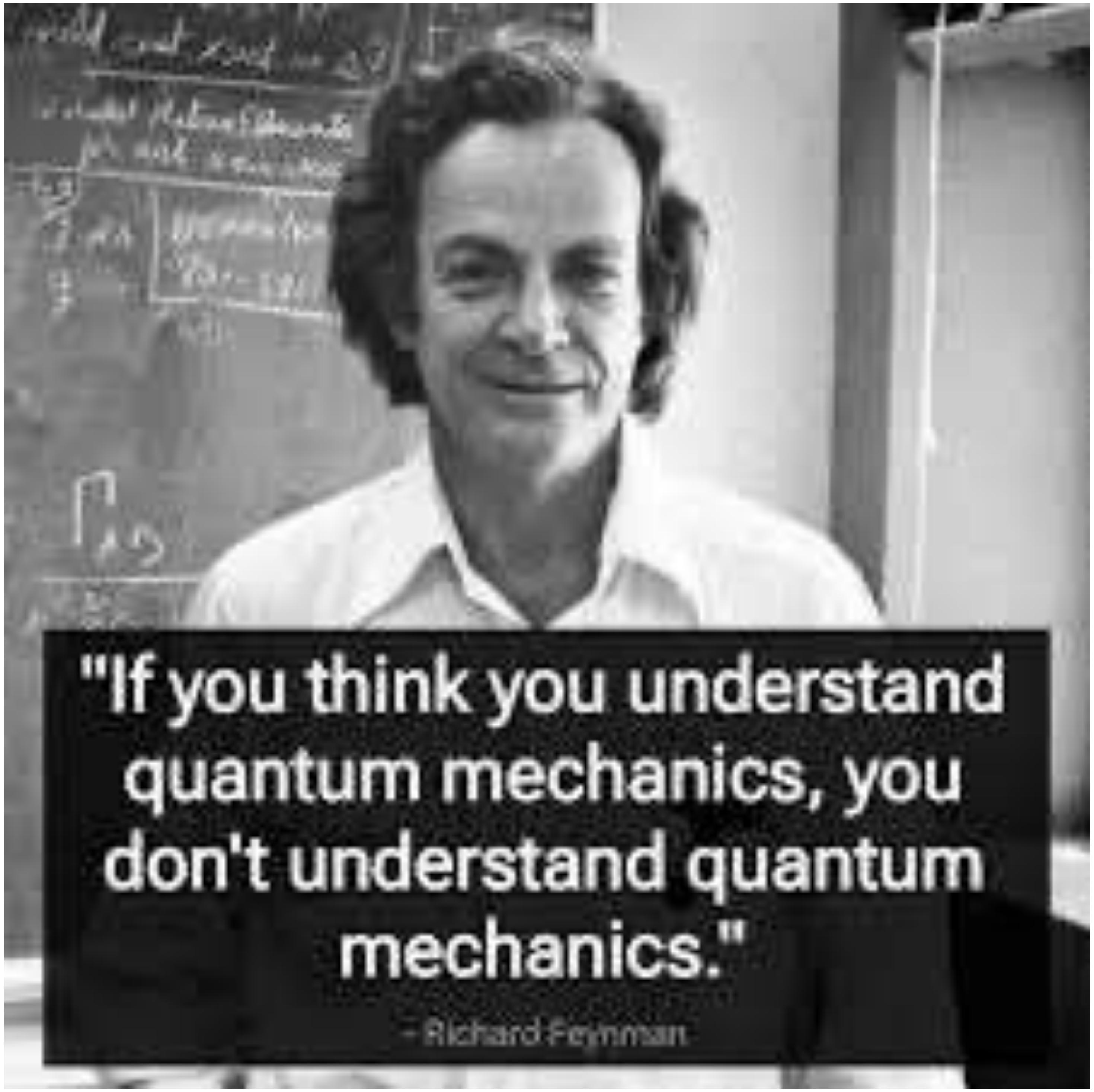


Streuung an Kastenpotential



Aufenthaltswahrscheinlichkeit beim harmonischen Oszillator

Wdh.: 100 a Quantentheorie



Wdh.: 100 a Quantentheorie

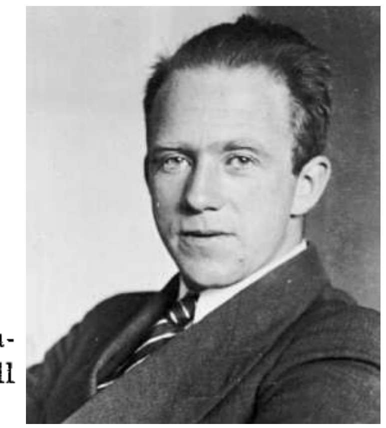
Die moderne Quantenmechanik fand ihren Beginn im Jahr 1925 mit der Formulierung der Matrizenmechanik durch Werner Heisenberg, Max Born und Pascual Jordan.[3][4][5] Schon vor der Fertigstellung der ersten Veröffentlichung prägte Heisenberg in einem Brief an Wolfgang Pauli den Begriff *Quantenmechanik*, um deutlich zu machen, dass die *klassische Mechanik* durch etwas grundlegend Neues abgelöst werden müsse.[6][7]

Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.

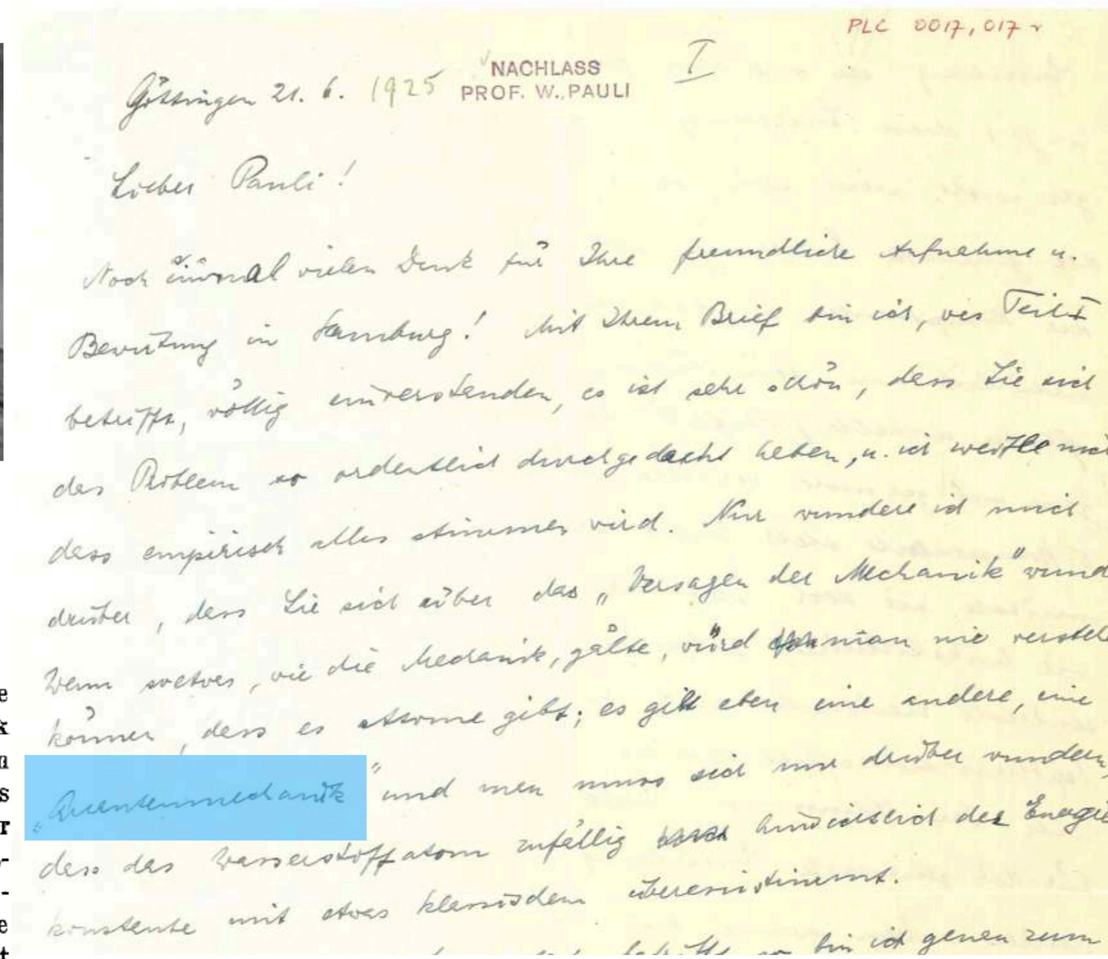
Von **W. Heisenberg** in Göttingen.

(Eingegangen am 29. Juli 1925.)

In der Arbeit soll versucht werden, Grundlagen zu gewinnen für eine quantentheoretische Mechanik, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist.



Heisenberg



Zur Quantenmechanik.

Von **M. Born** und **P. Jordan** in Göttingen.

(Eingegangen am 27. September 1925.)

Die kürzlich von Heisenberg gegebenen Ansätze werden (zunächst für Systeme von einem Freiheitsgrad) zu einer systematischen Theorie der Quantenmechanik entwickelt. Das mathematische Hilfsmittel ist die Matrizenrechnung. Nachdem diese kurz dargestellt ist, werden die mechanischen Bewegungsgleichungen aus einem Variationsprinzip abgeleitet und der Beweis geführt, daß auf Grund der Heisenbergschen Quantenbedingung der Energiesatz und die Bohrsche Frequenzbedingung aus den mechanischen Gleichungen folgen. Am Beispiel des anharmonischen Oszillators wird die Frage der Eindeutigkeit der Lösung und die Bedeutung der Phasen in den Partialschwingungen erörtert. Den Schluß bildet ein Versuch, die Gesetze des elektromagnetischen Feldes der neuen Theorie einzufügen.

Max Born

Jordan

Zur Quantenmechanik. II.

Von **M. Born, W. Heisenberg** und **P. Jordan** in Göttingen.

(Eingegangen am 16. November 1925.)

Die aus Heisenbergs Ansätzen in Teil I dieser Arbeit entwickelte Quantenmechanik wird auf Systeme von beliebig vielen Freiheitsgraden ausgedehnt. Die Störungstheorie wird für nicht entartete und eine große Klasse entarteter Systeme durchgeführt und ihr Zusammenhang mit der Eigenwerttheorie Hermitescher Formen nachgewiesen. Die gewonnenen Resultate werden zur Ableitung der Sätze über Impuls und Drehimpuls und zur Ableitung von Auswahlregeln und Intensitätsformeln benutzt. Schließlich werden die Ansätze der Theorie auf die Statistik der Eigenschwingungen eines Hohlraumes angewendet.

Wdh.: 100 a Quantentheorie

Neumann, 1932
Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“

Schrödinger-Gleichung, Anfang 1926

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi$$

Schrödinger konnte 1926 zeigen, dass dies äquivalent zu Heisenbergs Matrizenmechanik ist

Dirac, 1928
QM + spezielle Relativitätstheorie
=> es gibt Antimaterie

Pauli
1925 Spin
1926 H-Atom

Wdh.: 100 a Quantentheorie

Seit 1900 viele verschiedene, irritierende, experimentelle Ergebnisse

Klassisch: Licht = Welle, Materie = Teilchen

Neu: Licht verhält sich wie Teilchen,
z.B. Hohlraumstrahlung, Photoeffekt, Comptoneffekt

Neu: Materie verhält sich wie Wellen,
z.B. Doppelspaltversuch

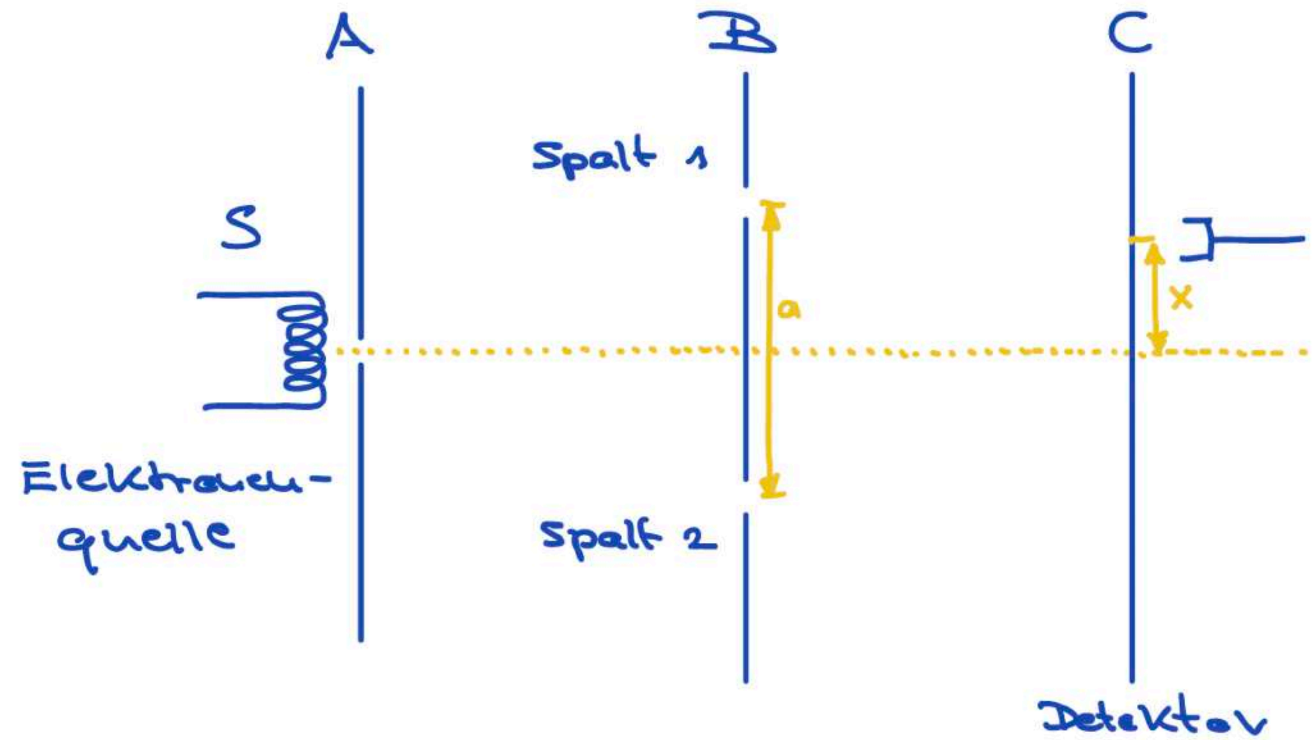
Neu: kontinuierliche Größen wir Energie, sind nicht kontinuierlich,
sondern diskret, z.B. H-Atom, Stern-Gerlach Versuch

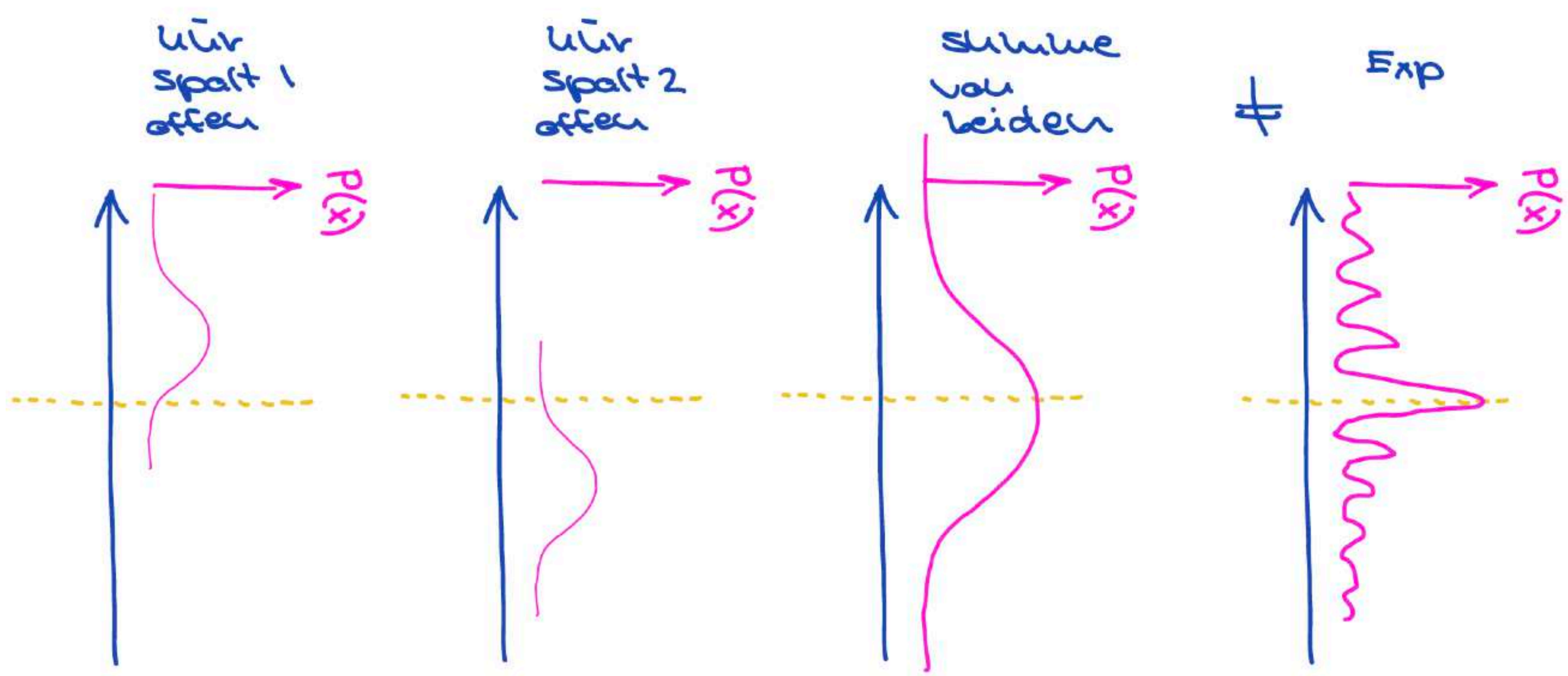
Welle-Teilchen Dualismus

Wdh.: 100 a Quantentheorie

Exp.: Hohlraumstrahlung, Photoeffekt, Comptoneffekt, Stern-Gerlach Versuch

Pdf Datei kann bei Springer kostenlos runtergeladen werden





Wdh.: 100 a Quantentheorie

Zu Beginn (i.e. 1925+x, $x \geq 0$) waren diese Forschungen reinste Erkenntnisgewinnung, ohne irgendeinen Bezug zu Anwendung

Warum sind Atomspektren diskret?

Experimente konnte mit Hilfe von sehr abstrakter Mathematik beschrieben werden (unendlich dimensional Vektorräume)

Article PDF

Kapitel I. Matrizenrechnung.

§ 1. Elementare Operationen. Funktionen. Wir rechnen mit quadratischen unendlichen Matrizen[1]), die wir hier mit fetten Buchstaben bezeichnen wollen, während schwache Buchstaben stets gewöhnliche Zahlen bedeuten sollen:

$$\mathbf{a} = (a(nm)) = \begin{pmatrix} a(00) & a(01) & a(02) \ldots \\ a(10) & a(11) & a(12) \ldots \\ a(20) & a(21) & a(22) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{pmatrix}$$

Gleichheit zweier Matrizen bedeutet Gleichheit entsprechender Komponenten:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ heißt } a(nm) = b(nm). \tag{1}$$

Addition wird definiert durch Addition entsprechender Komponenten

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \text{heißt} \quad a(nm) = b(nm) + c(nm). \tag{2}$$

Die Multiplikation wird definiert durch die aus der Determinantentheorie bekannte Regel „Zeilen mal Kolonnen":

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}\,\mathbf{c} \text{ heißt } a(nm) = \sum_{k=0}^{\infty} b(nk)\,c(km). \tag{3}$$

Potenzen sind durch wiederholte Multiplikation zu definieren. Es gilt das assoziative Gesetz für die Multiplikation und das distributive für die Verbindung von Addition und Multiplikation:

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\,\mathbf{c}); \tag{4}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\,\mathbf{c}. \tag{5}$$

Dagegen gilt nicht das kommutative Gesetz für die Multiplikation: Die Gleichung $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\,\mathbf{a}$ ist nicht allgemein richtig. Wenn sie gilt,

Teilaspekte davon werden wir in diesem Semester lernen

Wdh.: 100 a Quantentheorie

2025

START-UP

Ionen in der Falle

VON STEPHAN FINSTERBUSCH · AKTUALISIERT AM 30.11.2023 · 19:54

Zurück zum Artikel

Bild: AARON LEITHÄUSER

1/4

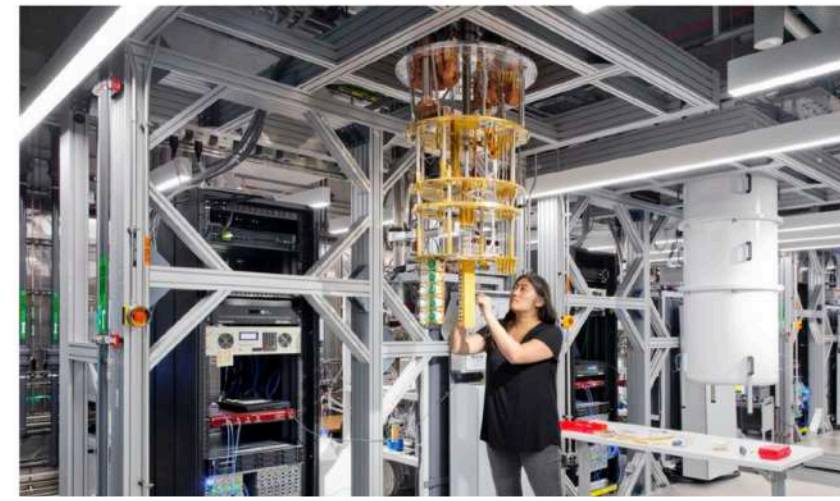
Der Professor und sein Werk: Christof Wunderlich neben dem ersten Quantencomputer Deutschlands auf dem Emmy-Noether-Campus der Universität Siegen

EL PAÍS · Science

QUANTUM MECHANICS >

Research inches toward quantum supremacy with results unattainable by classical computing

The experiment attained precise measurements using a processor of only 127 qubits and an error mitigation strategy



TECHWIRE ASIA · Insights

IBM makes significant breakthrough in quantum computing

Deutscher Quantencomputer

eleQtron erhält ersten »Quantum Effects Award«

12. Oktober 2023, 6:38 Uhr | Heinz Arnold

© @Landesmesse Stuttgart

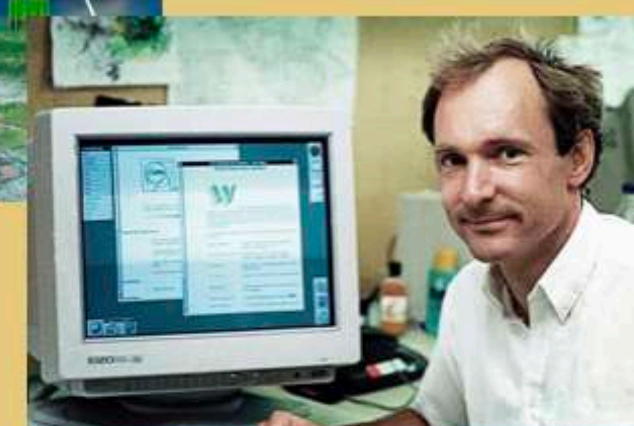
Wdh.: 100 a Quantentheorie

Grundlagenforschung: Spin-offs

- Quantenmechanik
  - ☆ **Laser**
  - ☆ **Computer**
  - ☆ **Halbleiter**
  - ☆ **Quantencomputer**

- Allgemeine Relativitätstheorie
  - ☆ **GPS**

- Teilchenphysik
  - ☆ **WWW**
  - ☆ **Strahlentherapie**



- Ausbildung junger Menschen
  - ☆ **Mechaniker im Formel 1-Team**
  - ☆ **Die meisten unserer Doktoranden und post-docs gehen in die Wirtschaft**
- Beitrag zur Kultur, Internationalisierung,…

Wdh.: 100 a Quantentheorie

Grundlagenforschung/angewandte Forschung

Grundlagenforschung:
- Erweiterung des menschlichen Wissens - unerwartete Entdeckungen
- Wirtschaftliche Verwertbarkeit ist **nicht** das Hauptziel

Angewandte Forschung:
- Verbesserung von Technologien - erwartete/erhoffte Entdeckungen
- Wirtschaftliche Verwertbarkeit ist ein **vorrangiges** Ziel

Wie immer im Leben:
zu wenig und zu viel tut selten gut

Gesundes Mittelmaß: hätten unsere Vorfahren ausschließlich in angewandte Forschung investiert, dann hätten wir heute die höchstentwickelten Fackeln, aber wir hätten nie die LED erfunden….

Wdh.: Dynamische Systeme

Einfachstes Beispiel in der Mechanik

Ein 2-Zustandssystem = 1 Bit

Relativ trivial

Wdh.: Dynamische Systeme

Beispiel: System mit zwei Zuständen

Z. B. Münze: Kopf K oder Zahl Z zeigt nach oben

$\boxed{K}$ $\boxed{Z}$

Freiheitsgrad: Variable, die das System beschreibt, hier σ:

Kopf: $\sigma = +1$

Zahl: $\sigma = -1$

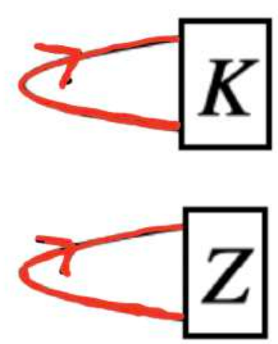
Dynamische Gesetze

Mathematische Formel: System zur Zeit n: $\sigma(n)$

A) Mache nichts:

$KKKKKKKKKKKKKK.......$

$ZZZZZZZZZZZZZZZZZZ.....$

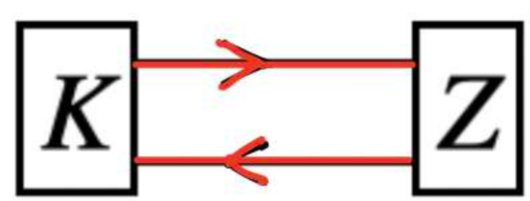


$$\sigma(n+1) = \sigma(n)$$

B) Ändere immer den Zustand:

$ZKZKZKZKZKZKZKZK...$

$KZKZKZKZKZKZKZKZ...$



$$\sigma(n+1) = -\sigma(n)$$

Wdh.: Mechanik vs. Quantenmechanik

Intuitiv - entspricht unserer Vorstellungswelt

Objekt, wie Ball, hat klar definierten Ort und Geschwindigkeit

Evolution unseres Geistes hat sich in der makroskopischen Welt abgespielt

Kann mit Mathematik dargestellt werden

Unintuitiv - entspricht nicht unserer Vorstellungswelt

Objekt, wie Elektron, hat keinen klar definierten Ort und Geschwindigkeit

Evolution unseres Geistes hat sich nicht in der mikroskopischen Welt abgespielt

Kann mit Mathematik dargestellt werden

Quantenmechanik (QM) ist fundamentaler als Mechanik
Mechanik kann aus QM abgeleitet werden

Wdh.: Mechanik vs. Quantenmechanik

Was ist so schwierig an QM?

1) Mathematik? Ja, aber das gilt auch für Mechanik

2) Mathematische Abstraktion?
   Wir haben nie die Bewegung eines Elektrons erfahren
   Aber mathematische Abstraktion gibt es auch in der Mechanik

Wirkliche Unterschiede:

1) In der QM gibt es fundamental unterschiedliche Abstraktionen:

   QM Zustand $\neq$ Mechanik Zustand

2) Zustand und Messung

   Mechanik: Zustand $\equiv$ Messung

   QM: Zustand $\neq$ Messung

Wdh.: Dynamische Systeme

Einfachstes Beispiel in der Quanten Mechanik

Ein 2-Zustandssystem = 1 Quanten Bit (Qbit)

Höchst nicht-trivial

Wdh.: 1 Quanten Bit

Spin: nicht-klassische Eigenschaft eines Elementarteilchens

Elektron hat verschiedene Eigenschaften neben der Position im Raum:
Ladung, Masse und Spin

$q_e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ **Coulomb**

$m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ **kg**

$s_e \approx \pm 5 \cdot 10^{-35} \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}} = \pm \frac{\hbar}{2}$ **(Einheit vom Drehimpuls) oft als ± 1 abgekürzt**

Kein klassisches Analogon - wird aber trotzdem oft als Pfeil verdeutlicht

Wir betrachten den Spin - losgelöst vom Elektron
Dies ist ein Beispiel für ein Q-bit

Wir betrachten einen Spin mit den zwei Einstellungsmöglichkeiten
$\sigma = +1$ **und** $\sigma = -1$

Erste Frage: Welche Bedeutung hat der Messprozess?

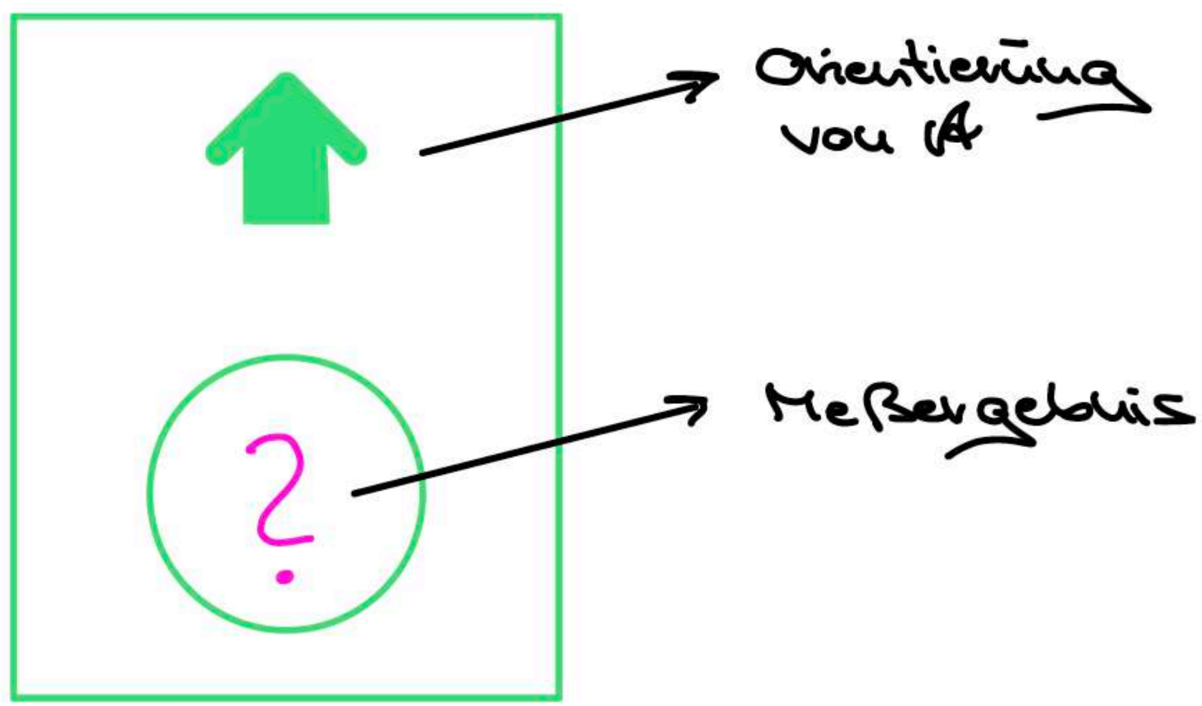
Neben dem zu untersuchenden System gibt es den Messapparat $\mathscr{A}$ der den Zustand des Systems misst und dabei mit dem System wechselwirkt.

Wdh.: 1 Quanten Bit

Annahme:

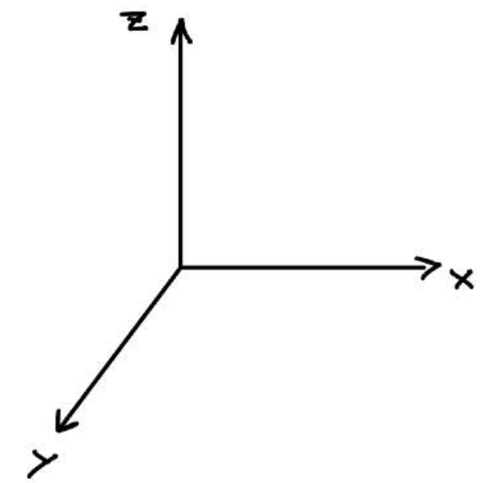
1) unser System (Spin) hat 2 Zustände ± 1
2) Der Messapparat $\mathscr{A}$ wechselwirkt mit dem System und gibt einen Wert für σ (± 1 bzw. oben/unten) aus
3) Wir stellen uns den Messapparat $\mathscr{A}$ als “Black Box” vor - d.h. wir kennen sein Inneres nicht
4) Die Ausrichtung des Messapparat $\mathscr{A}$ wird auch immer angezeigt
5) Nach einer Messung kann der Messapparat wieder zurückgesetzt werden

Messapparat $\mathscr{A}$



Wdh.: 1 Quanten Bit

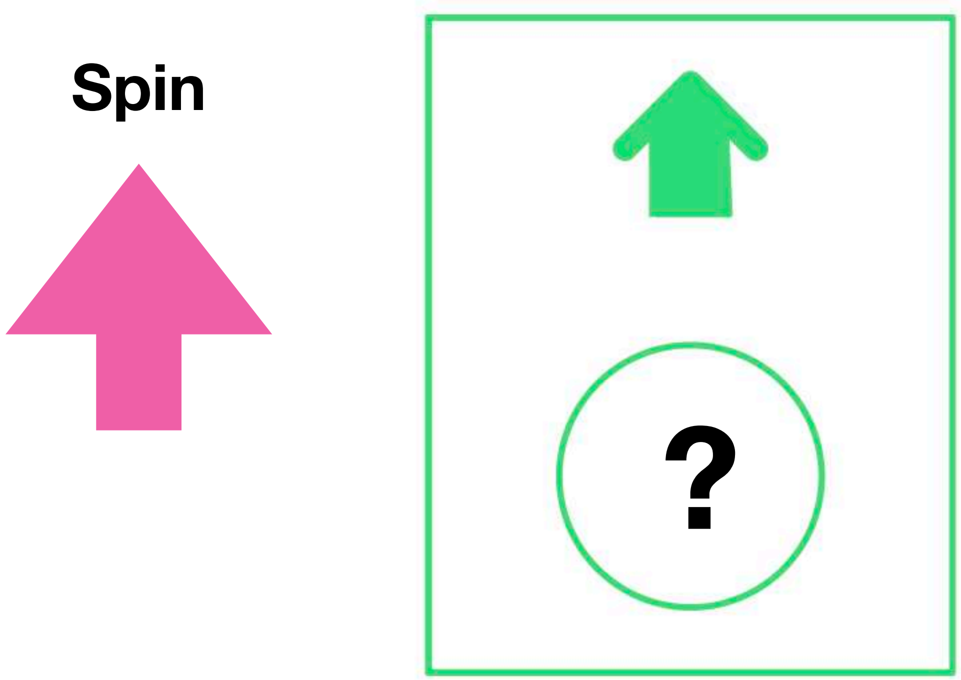
Beispiele für Messergebnisse:



Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin

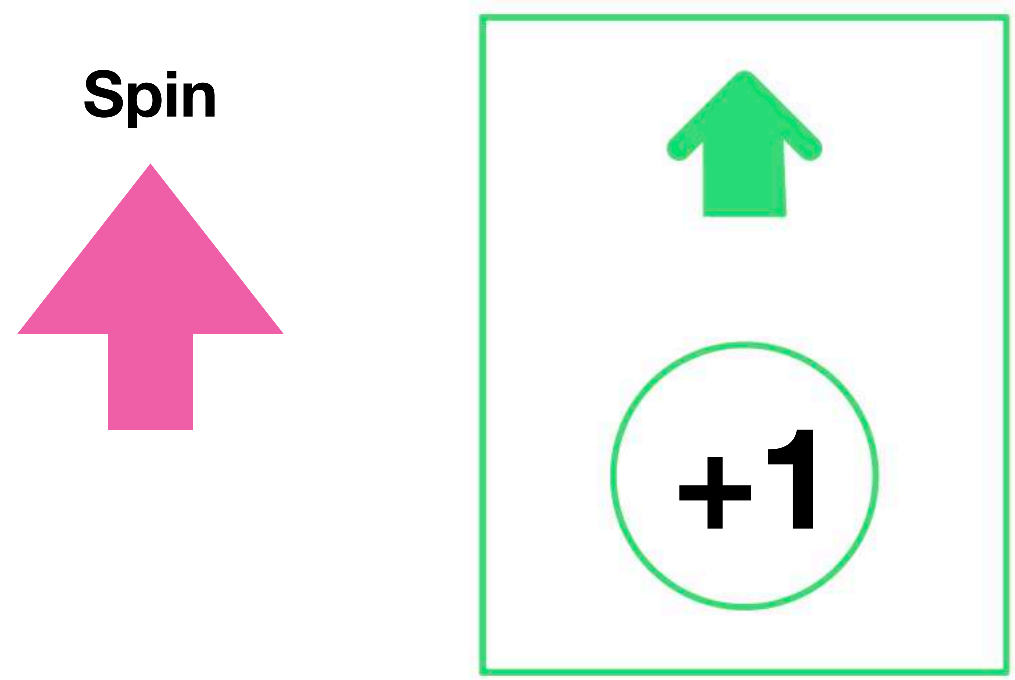
Vor der Messung

Spin



Nach der Messung

Spin



Wdh.: 1 Quanten Bit

Beispiele für Messergebnisse:

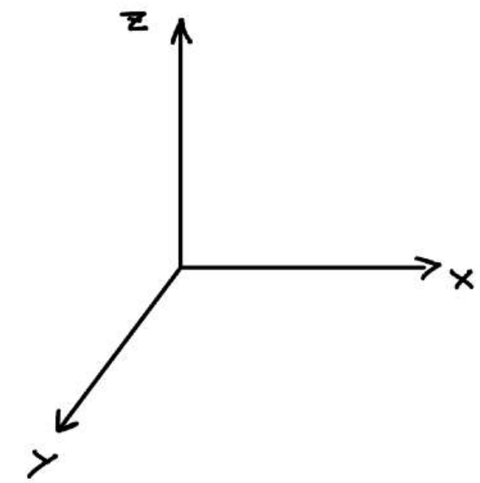
Wenn wir folgendes Zeitentwicklungsgesetz haben

$$\sigma(n+1) = \sigma(n)$$

Dann wird auch jede weitere Messung an diesem Spin

den Wert +1 ergeben

Wdh.: 1 Quanten Bit

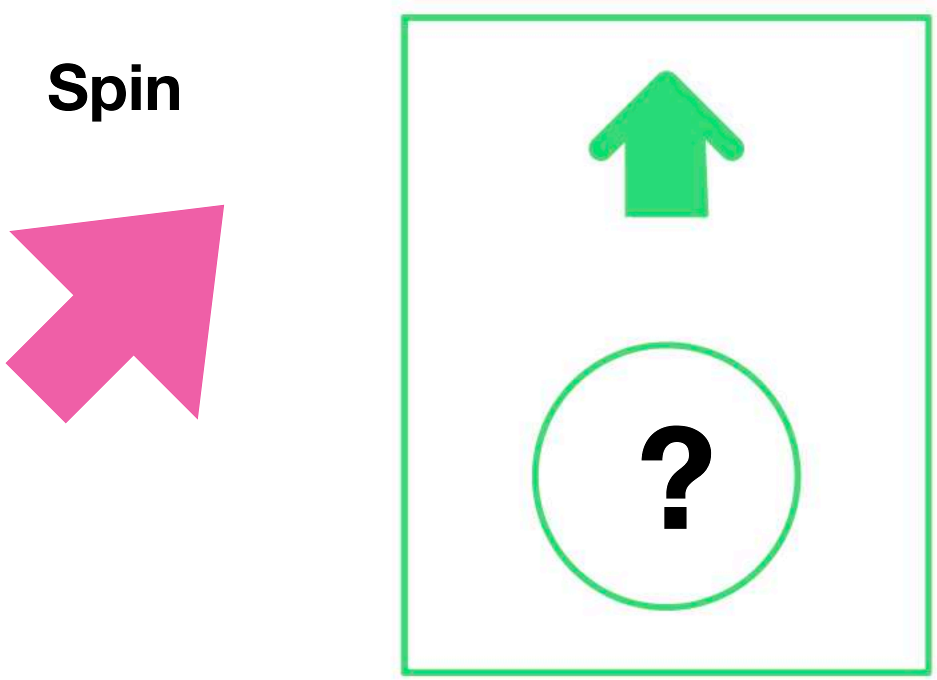


Beispiele für Messergebnisse:

Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin

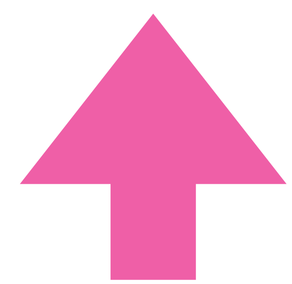
Vor der Messung

Spin

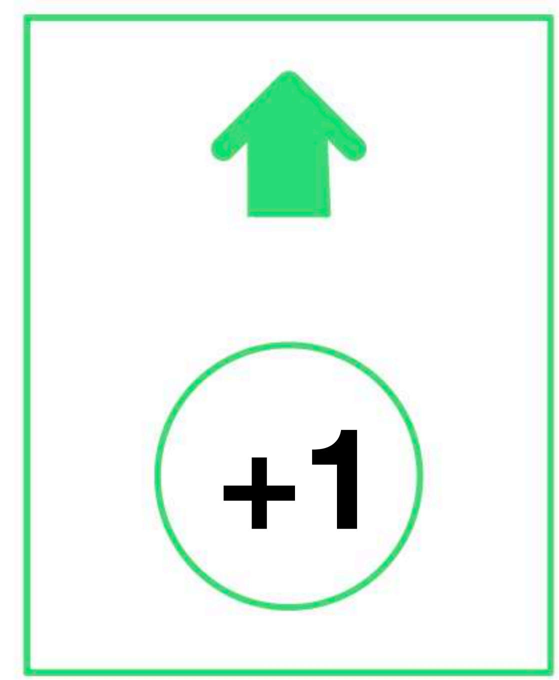


Nach der Messung

Spin



Spin ist jetzt
anders
ausgerichtet!



Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz
sondern eine experimentelle Tatsache,
die nun verstanden/interpretiert werden muss

Wdh.: 1 Quanten Bit

Beispiele für Messergebnisse:

Wenn wir folgendes Zeitentwicklungsgesetz haben

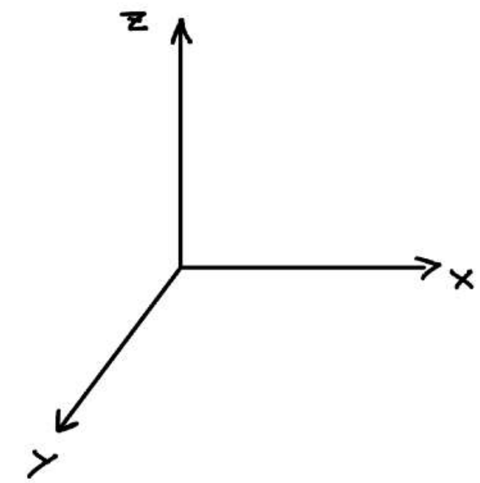
$$\sigma(n+1) = \sigma(n)$$

Dann wird auch jede weitere Messung an diesem Spin

den Wert +1 ergeben

Die 1. Messung hat den Spin im Zustand +1 präpariert

Wdh.: 1 Quanten Bit

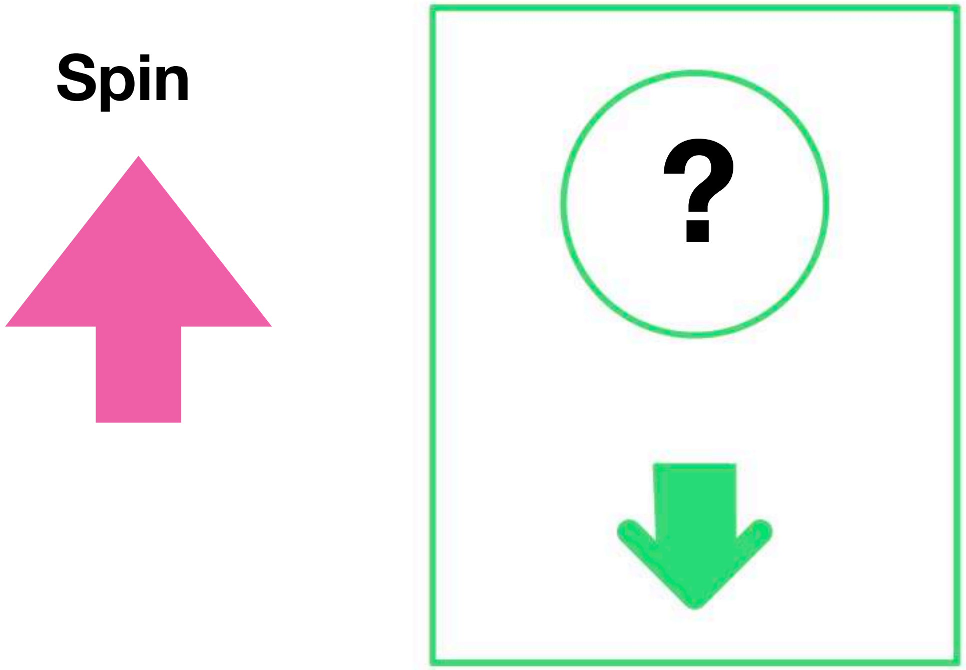


Beispiele für Messergebnisse:

Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin

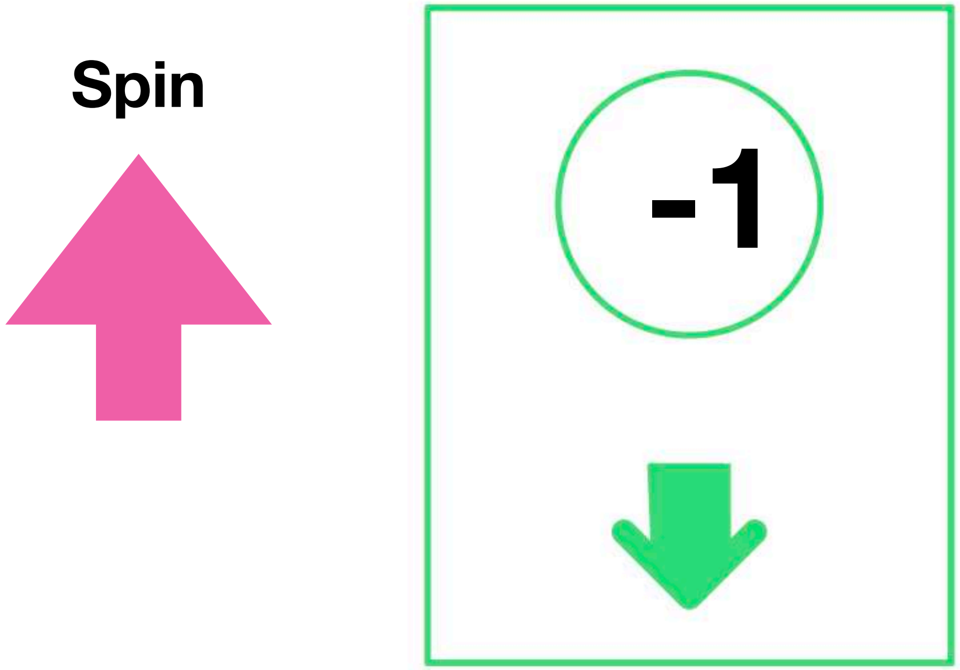
Vor der Messung

Spin



Nach der Messung

Spin



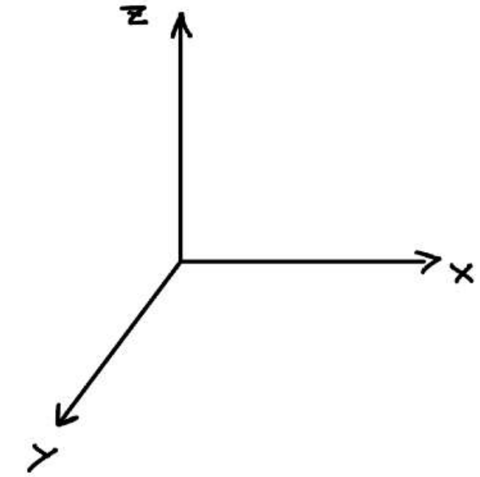
Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz
sondern eine experimentelle Tatsache,
die nun verstanden/interpretiert werden muss

Wdh.: 1 Quanten Bit

1. Interpretation:

**Die Messung scheint scheinbar
die z-Komponente des Spins
relativ zur Ausrichtung des Messapparats
anzugeben**

Wdh.: 1 Quanten Bit

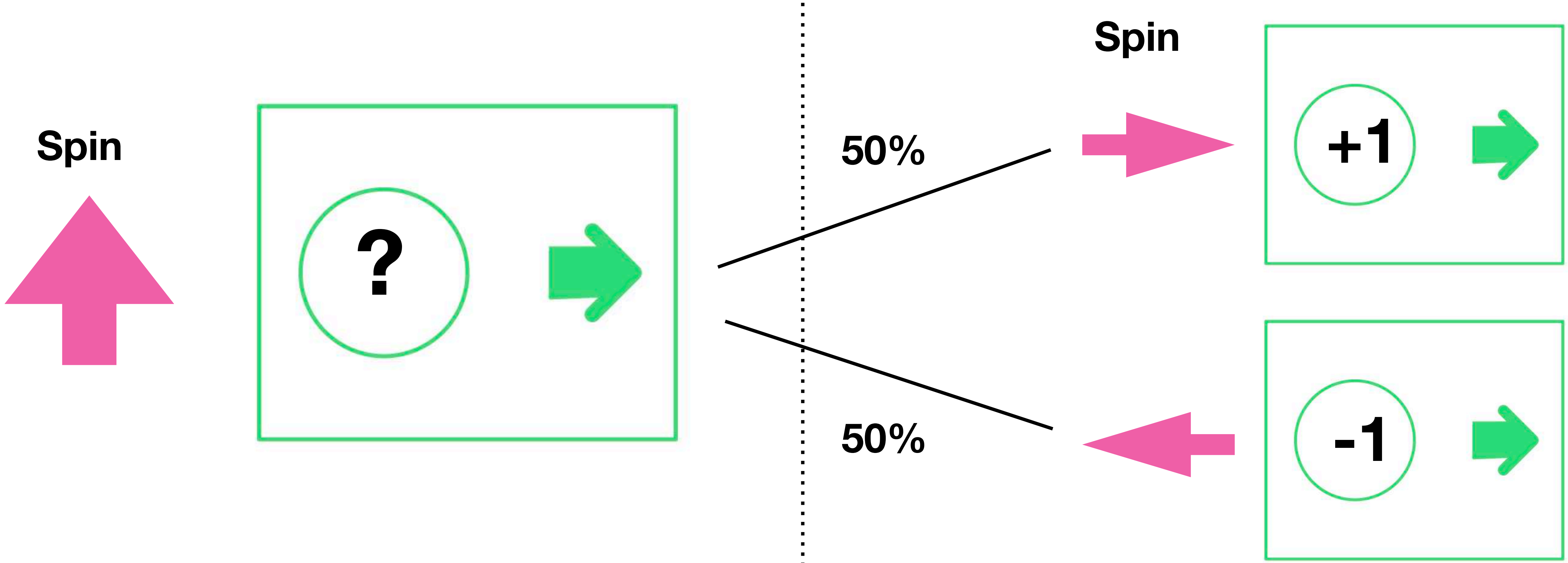


Beispiele für Messergebnisse:

Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin

Vor der Messung

Nach der Messung



Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz
sondern eine experimentelle Tatsache,
die nun verstanden/interpretiert werden muss

Wdh.: 1 Quanten Bit

N unabhängige Messungen bedeutet:

Wir haben N identische Kopien von unserem System mit einem Spin und einem Messapparat und machen dann jeweils eine Messung in jedem System

Macht man viele unabhängige Messungen,
dann wird man
eine zufällige Reihe von +1 und -1 bekommen

+1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, 1-,...

Der Mittelwert der Reihe ist aber gleich Null!

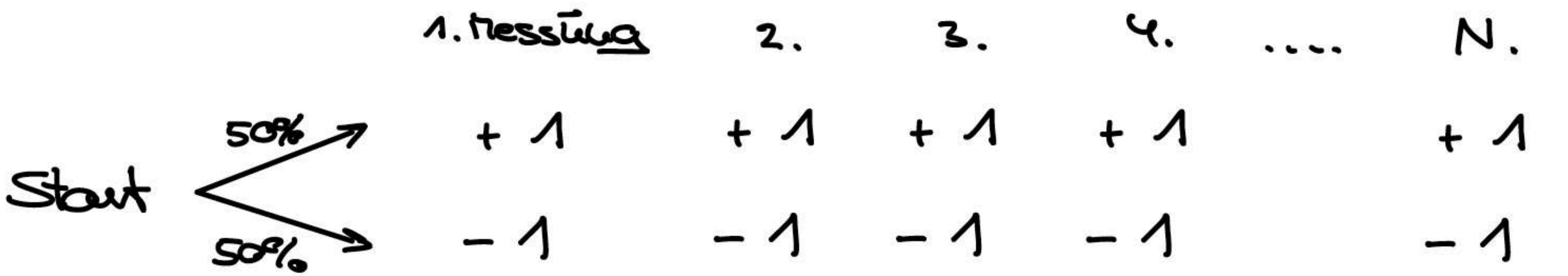
Für eine einzelne Messung gibt es keinen Determinismus mehr!
Es kann nur eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden.

Was passiert, wenn wir am selben System N Messungen hintereinander machen

Wdh.: 1 Quanten Bit

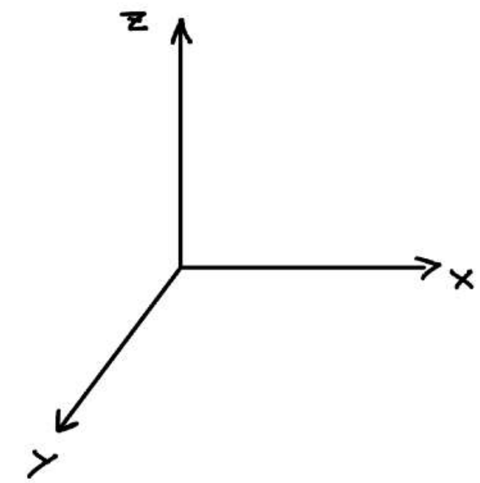
Beispiele für Messergebnisse:

Was passiert, wenn wir am selben System N Messungen hintereinander machen



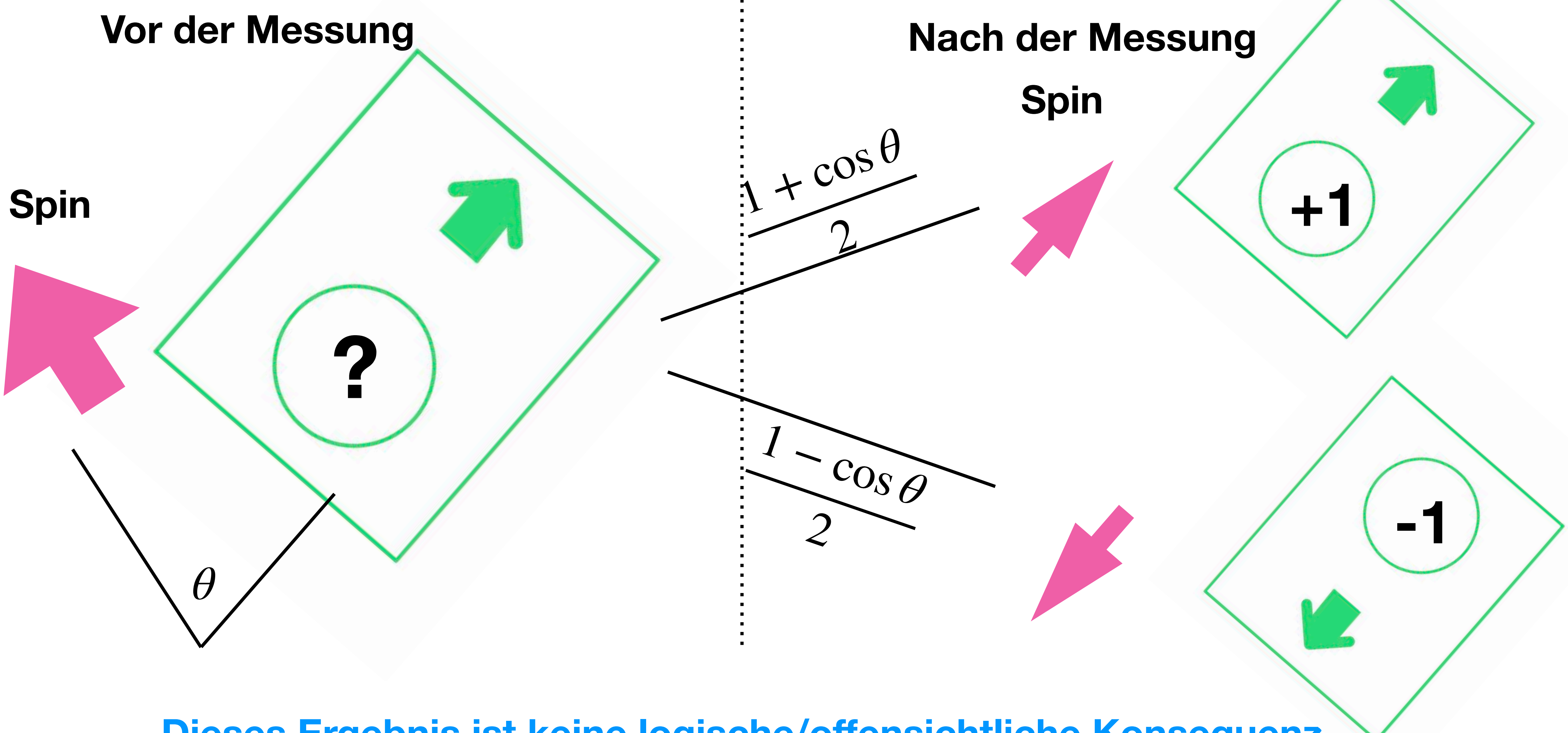
Die Messung beeinflusst das System!!!!
(Präpariert den Zustand)

Wdh.: 1 Quanten Bit



Beispiele für Messergebnisse:

Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin



Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz
sondern eine experimentelle Tatsache,
die nun verstanden/interpretiert werden muss

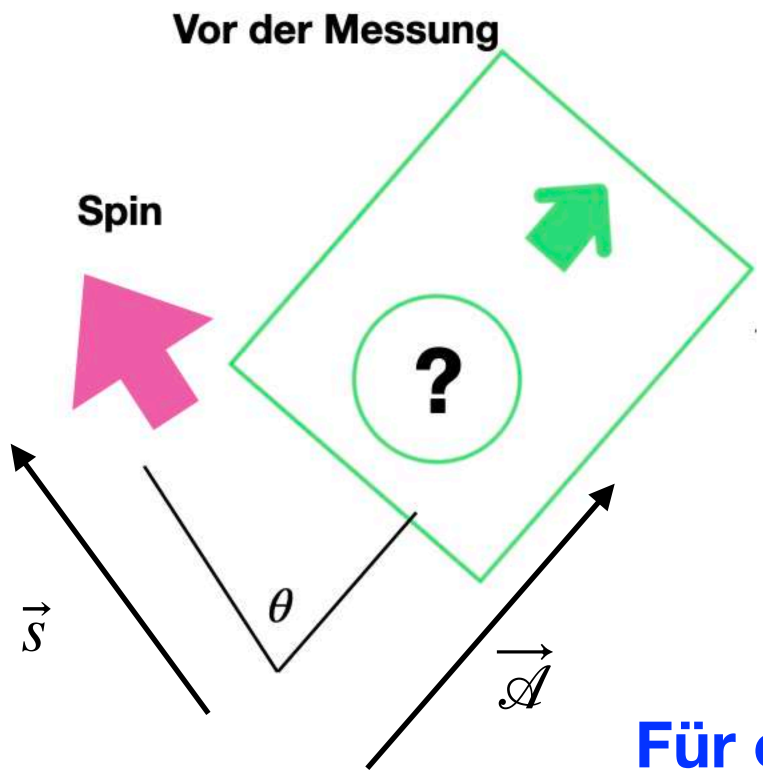
Wdh.: 1 Quanten Bit

Beispiele für Messergebnisse:

Macht man viele unabhängige Messungen, dann bekommt man den Mittelwert

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1+\cos\theta}{2}(+1) + \frac{1-\cos\theta}{2}(-1) = \cos\theta$$

Dies kann auch als Skalarprodukt der beiden Einheitsvektoren in Richtung des Spin $\vec{s}$ und des Messapparates $\overrightarrow{\mathscr{A}}$ geschrieben werden



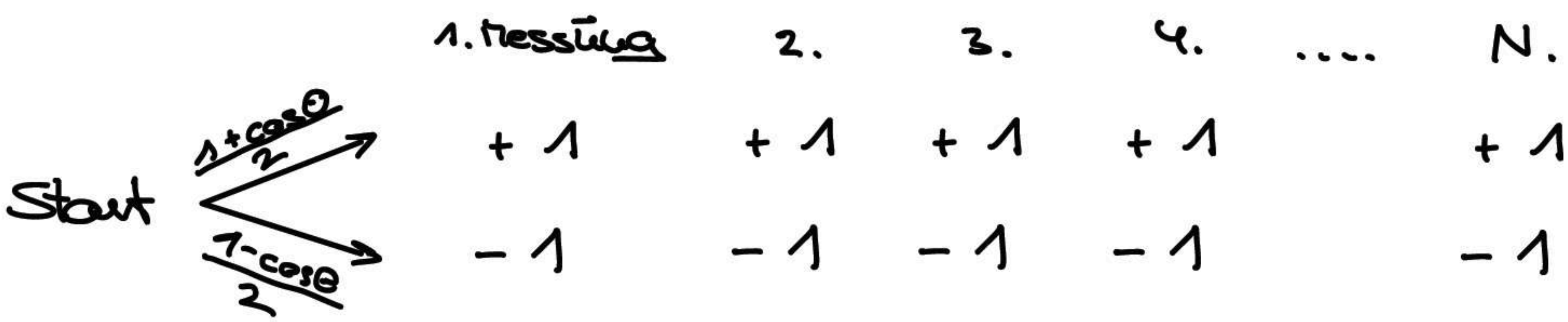
$$\langle \sigma \rangle = \vec{s} \cdot \overrightarrow{\mathscr{A}} = \cos\theta$$

Für eine einzelne Messung gibt es keinen Determinismus mehr!

Wdh.: 1 Quanten Bit

Beispiele für Messergebnisse:

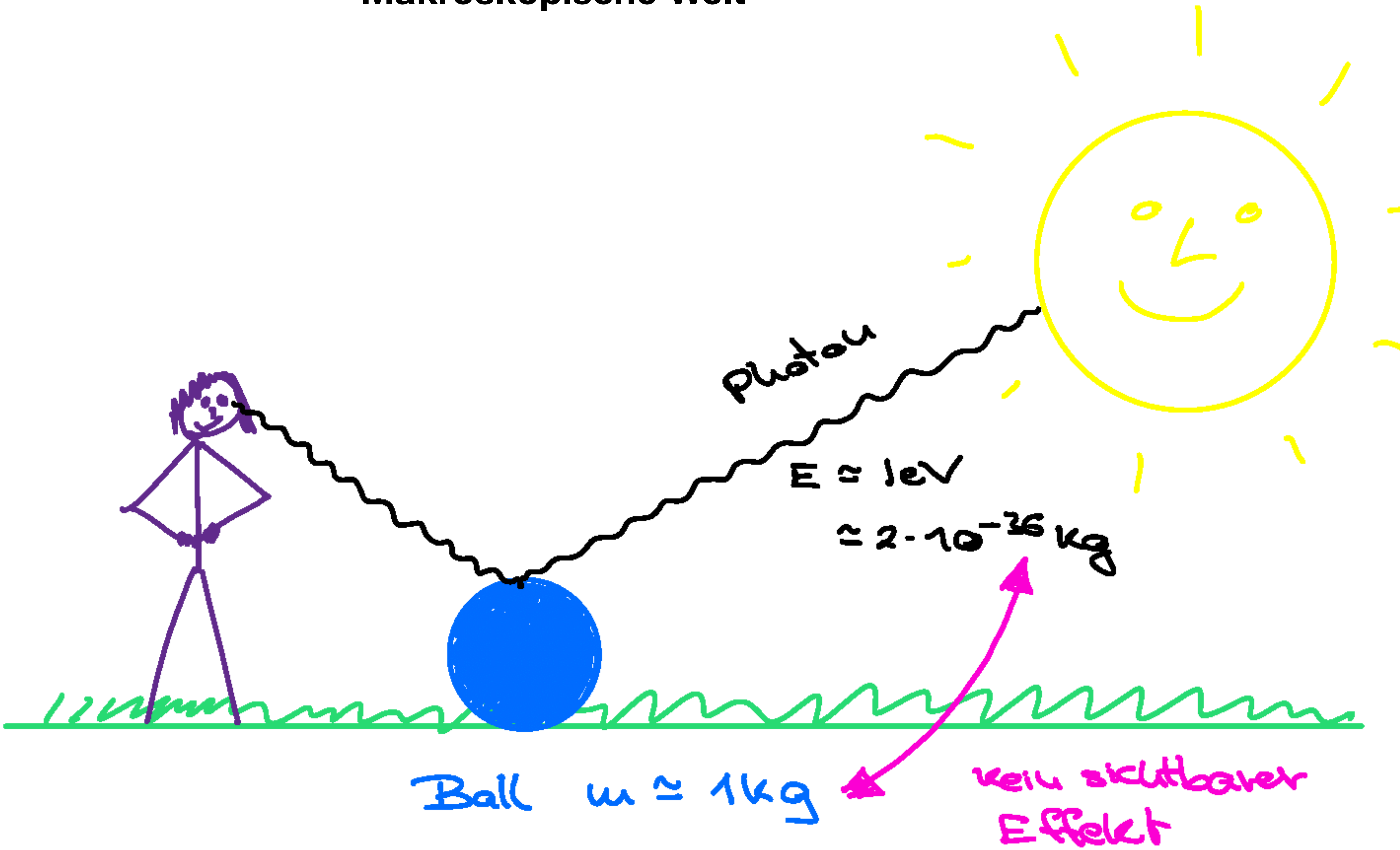
Was passiert, wenn wir am selben System N Messungen hintereinander machen



Die Messung beeinflusst das System!!!!
(Man präpariert den Zustand)

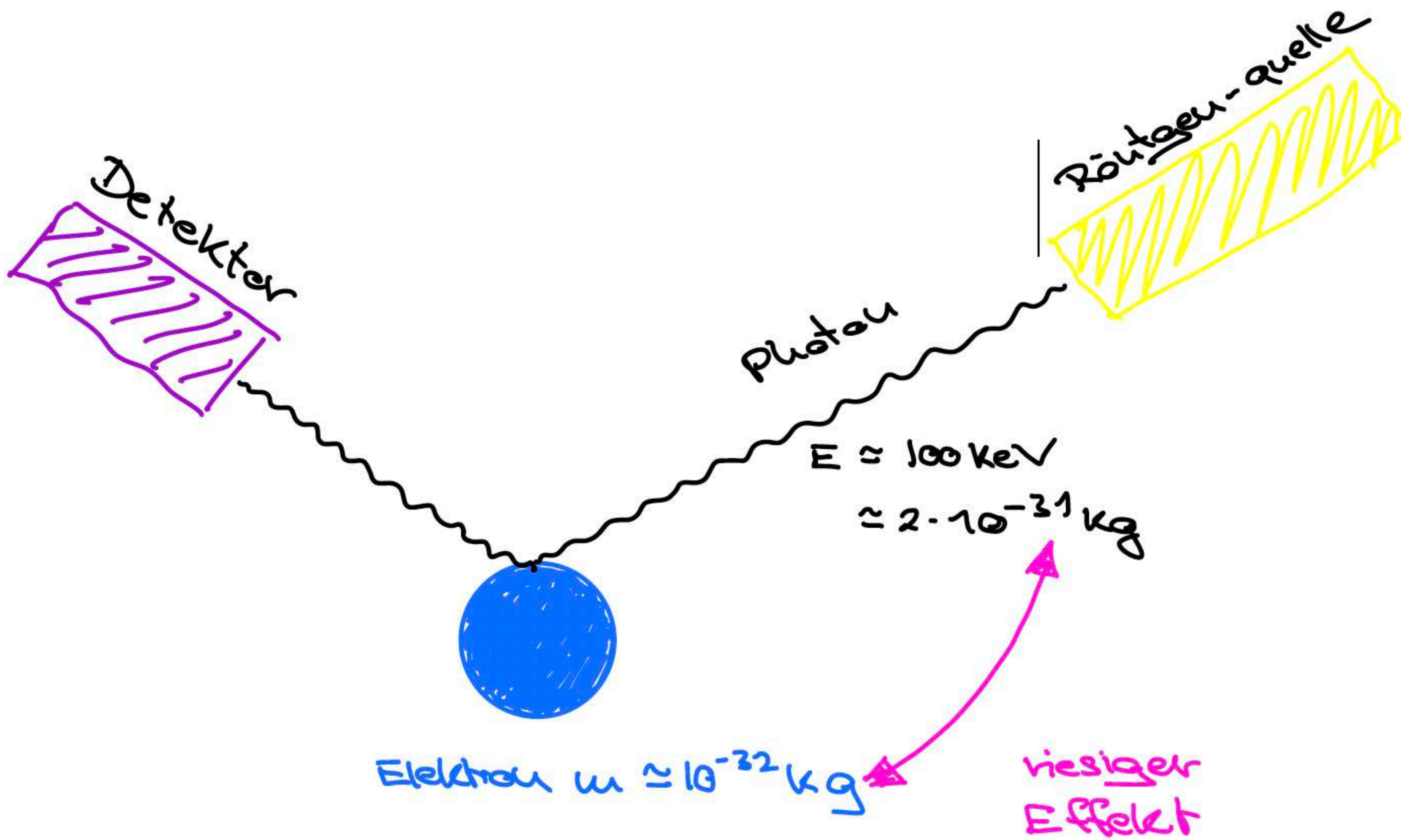
Wdh.: Messungen haben immer einen Einfluss

Makroskopische Welt



Wdh.: Messungen haben immer einen Einfluss

Mikroskopische Welt



Wdh.: Messungen haben immer einen Einfluss

In der mikroskopischen Welt beeinflusst eine Messung immer das System

In unseren vorhergehenden Beispielen wird der Zustand des Systems durch die Messung geändert

Später sprechen wir von einem
Kollaps der Wellenfunktion
bei der Messung

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. Beispiel Münze:

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel:**

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:

r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:
r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:**

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:

r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:** $r = \{2,4,6\}$**;** $f = \{1,3,5\}$

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:

r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:** $r = \{2,4,6\}$; $f = \{1,3,5\}$
B. **Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4:**

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:

r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:** $r = \{2,4,6\}$**;** $f = \{1,3,5\}$
B. **Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4:** $r = \{1,2,3\}$**;** $f = \{4,5,6\}$

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:
r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:** $r = \{2,4,6\}$**;** $f = \{1,3,5\}$
B. **Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4:** $r = \{1,2,3\}$**;** $f = \{4,5,6\}$

Es gibt Gegen-Aussagen:

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:
r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:** $r = \{2,4,6\}$; $f = \{1,3,5\}$
B. **Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4:** $r = \{1,2,3\}$; $f = \{4,5,6\}$

Es gibt Gegen-Aussagen:

Beispiel:

Not A: Der Würfel zeigt keine gerade Zahl:

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:

r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:** $r = \{2,4,6\}$**;** $f = \{1,3,5\}$
B. **Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4:** $r = \{1,2,3\}$**;** $f = \{4,5,6\}$

Es gibt Gegen-Aussagen:

Beispiel:

Not A: Der Würfel zeigt keine gerade Zahl: $r = \{1,3,5\}$**;** $f = \{2,4,6\}$

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:

r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:** $r = \{2,4,6\}$; $f = \{1,3,5\}$
B. **Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4:** $r = \{1,2,3\}$; $f = \{4,5,6\}$

Es gibt Gegen-Aussagen:

Beispiel:

Not A: Der Würfel zeigt keine gerade Zahl: $r = \{1,3,5\}; f = \{2,4,6\}$
Not B: Der Würfel zeigt keine Zahl kleiner als 4:

Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:

r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:** $r = \{2,4,6\}$**;** $f = \{1,3,5\}$
B. **Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4:** $r = \{1,2,3\}$**;** $f = \{4,5,6\}$

Es gibt Gegen-Aussagen:

Beispiel:

Not A: Der Würfel zeigt keine gerade Zahl: $r = \{1,3,5\}$**;** $f = \{2,4,6\}$

Not B: Der Würfel zeigt keine Zahl kleiner als 4: $r = \{4,5,6\}$**;** $f = \{1,2,3\}$

Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben “not A”) von Aussagen:

Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben “not A”) von Aussagen:

“A und B” sowohl A also auch B erfüllt

Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben “not A”) von Aussagen:

“A und B” sowohl A also auch B erfüllt
A und B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 und eine gerade Zahl:

Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben “not A”) von Aussagen:

“A und B” sowohl A also auch B erfüllt
A und B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 und eine gerade Zahl:

$$r = \{2\}; \quad f = \{1,3,4,5,6\}$$

Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben "not A") von Aussagen:

"A und B" sowohl A also auch B erfüllt
A und B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 und eine gerade Zahl:
$r = \{2\}$; $f = \{1,3,4,5,6\}$
Schnittmenge

Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben “not A”) von Aussagen:

“A und B” sowohl A also auch B erfüllt

A und B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 und eine gerade Zahl:

$$r = \{2\}; \quad f = \{1,3,4,5,6\}$$

Schnittmenge

“A oder B” A oder B erfüllt (kann auch beides sein)

Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben “not A”) von Aussagen:

“A und B” sowohl A also auch B erfüllt
A und B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 und eine gerade Zahl:

$$r = \{2\}; \quad f = \{1,3,4,5,6\}$$

Schnittmenge

“A oder B” A oder B erfüllt (kann auch beides sein)
A oder B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 oder eine gerade Zahl:

Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben “not A”) von Aussagen:

“A und B” sowohl A also auch B erfüllt
A und B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 und eine gerade Zahl:

$$r = \{2\}; \quad f = \{1,3,4,5,6\}$$

Schnittmenge

“A oder B” A oder B erfüllt (kann auch beides sein)
A oder B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 oder eine gerade Zahl:

$$r = \{1,2,3,4,6\}; \quad f = \{5\}$$

Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben "not A") von Aussagen:

"A und B" sowohl A also auch B erfüllt
A und B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 und eine gerade Zahl:

$$r = \{2\}; \quad f = \{1,3,4,5,6\}$$

Schnittmenge

"A oder B" A oder B erfüllt (kann auch beides sein)
A oder B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 oder eine gerade Zahl:

$$r = \{1,2,3,4,6\}; \quad f = \{5\}$$

Vereinigungsmenge

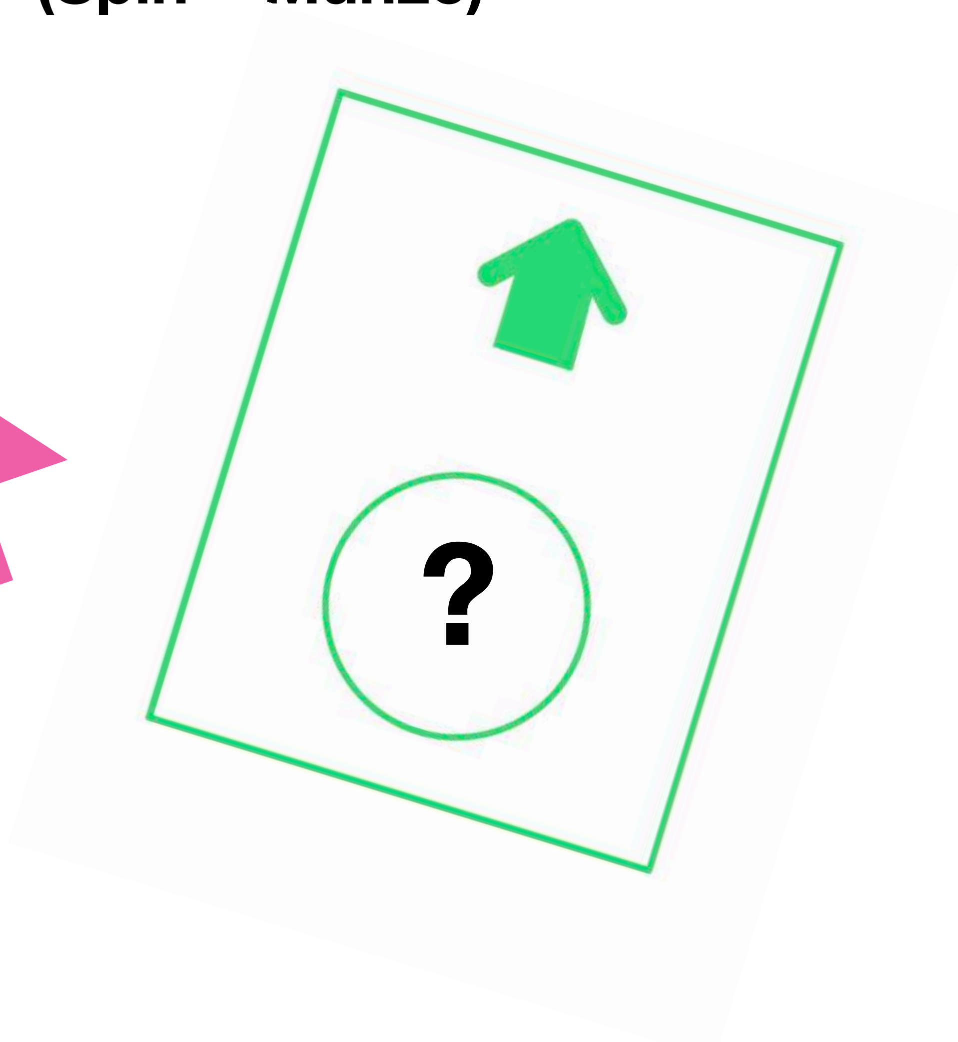
Zustände

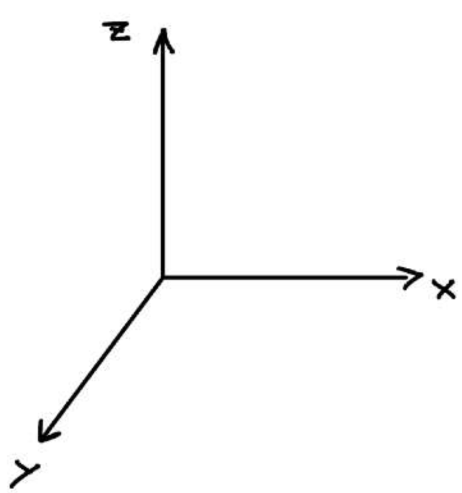
Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin

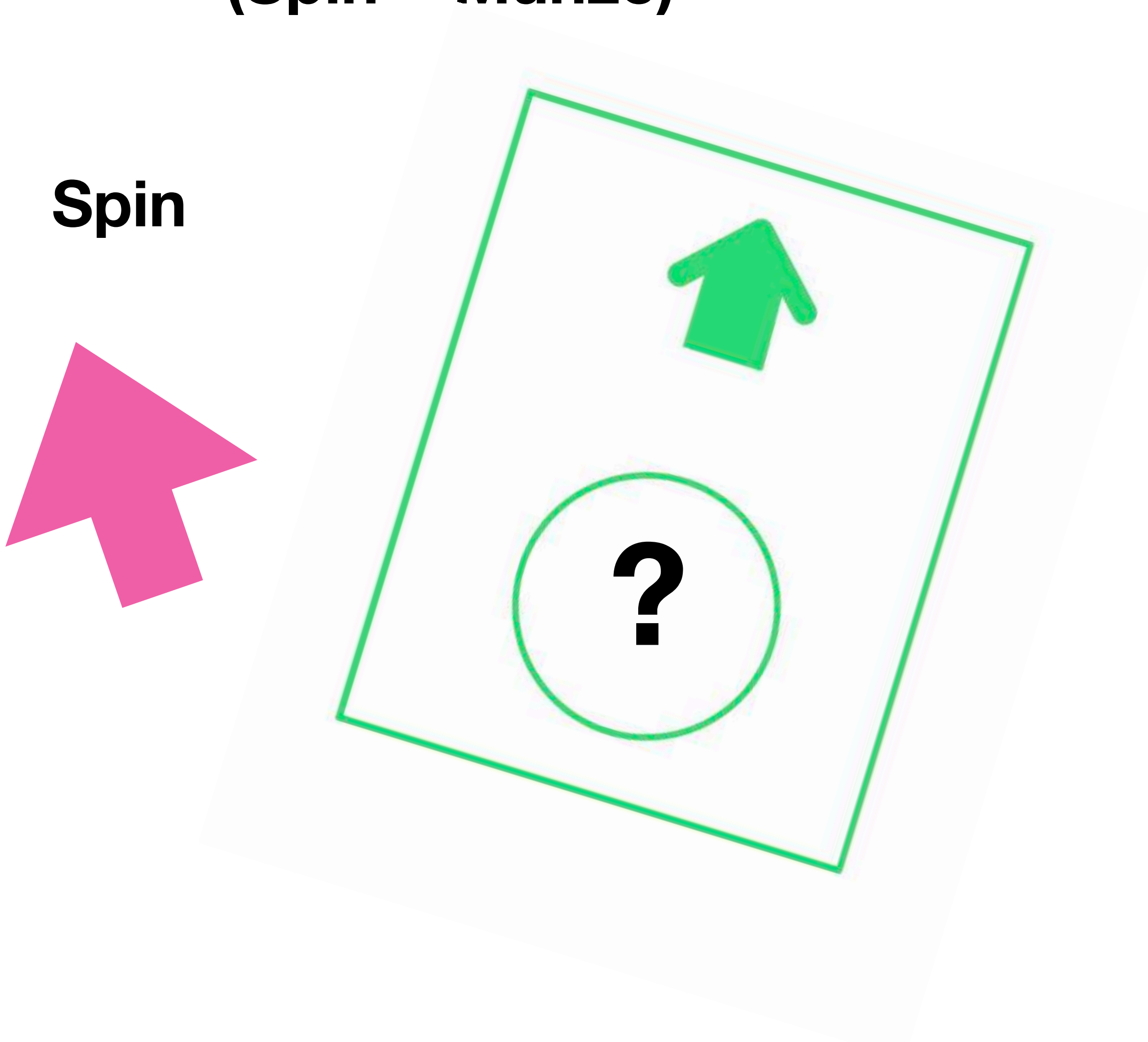


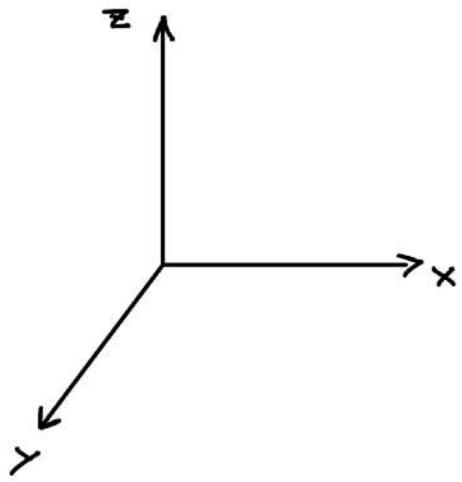


Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





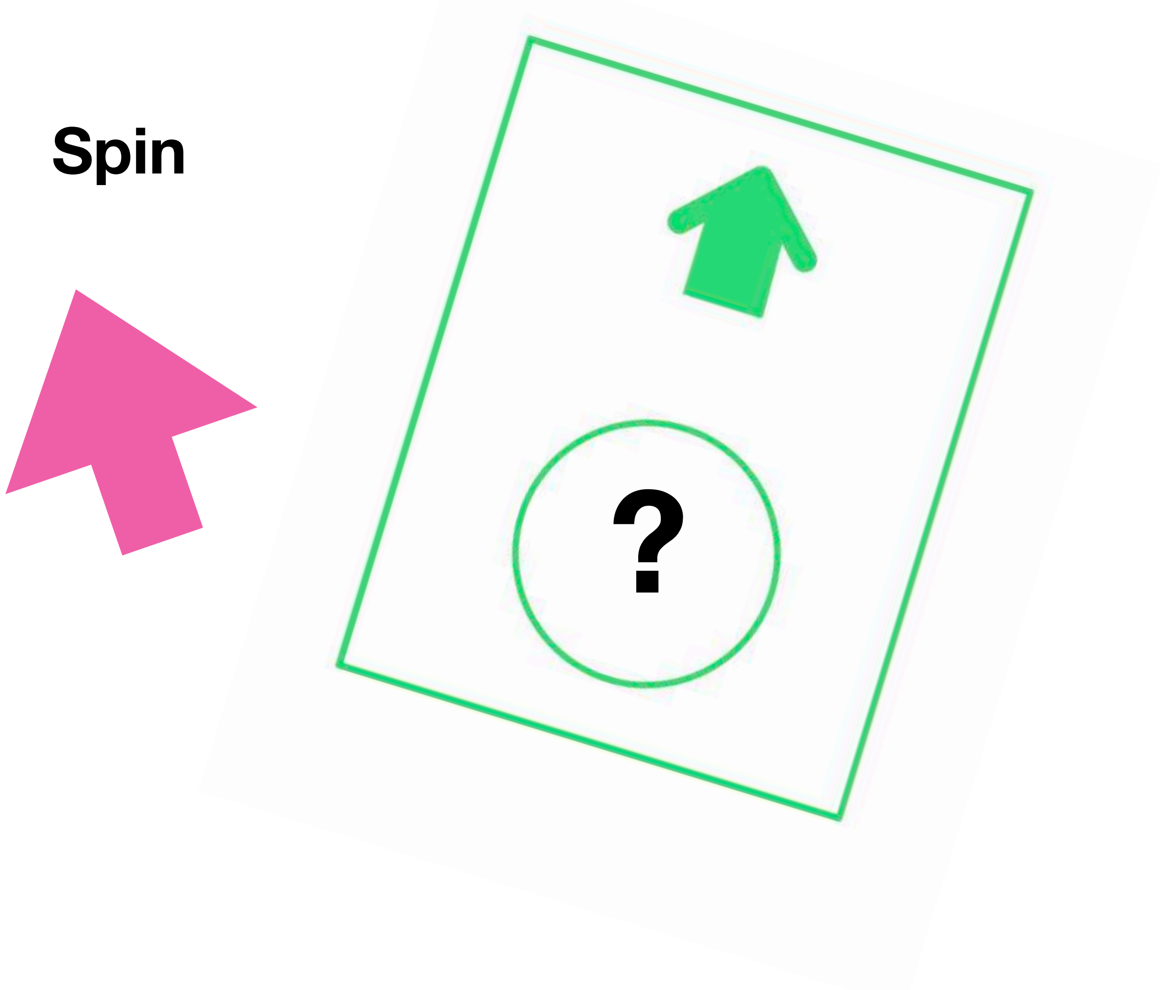
Mögliche Aussagen:

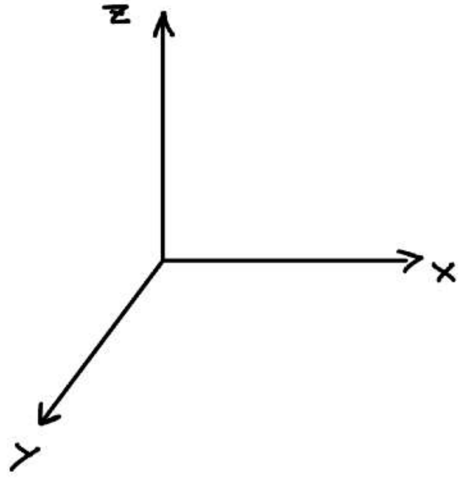
A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

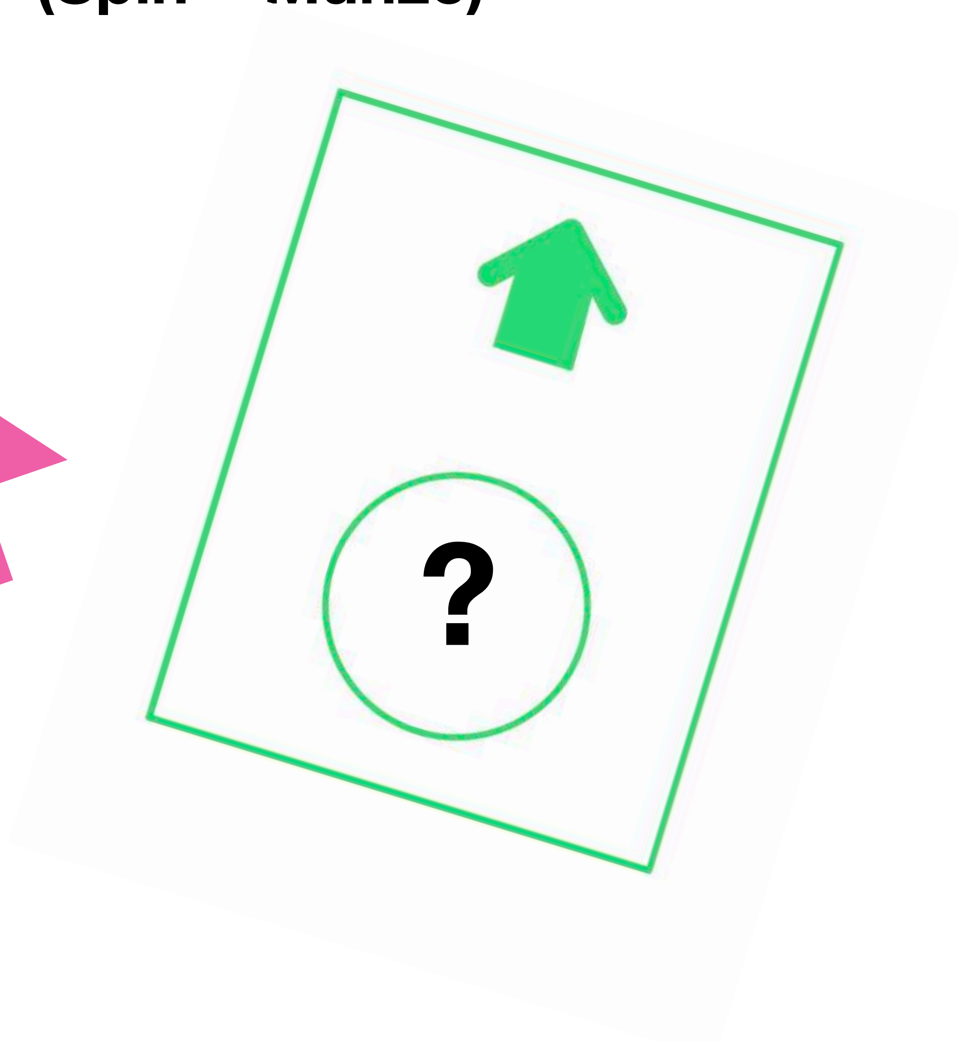
A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin

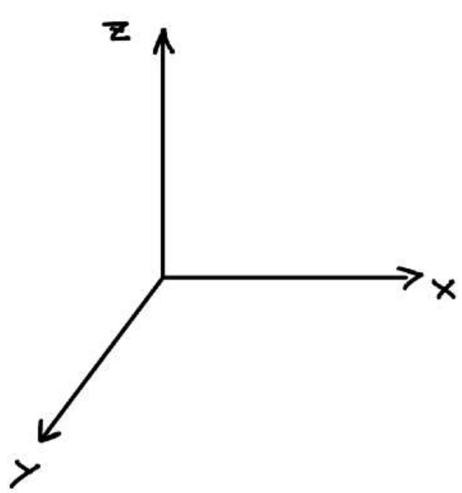


Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

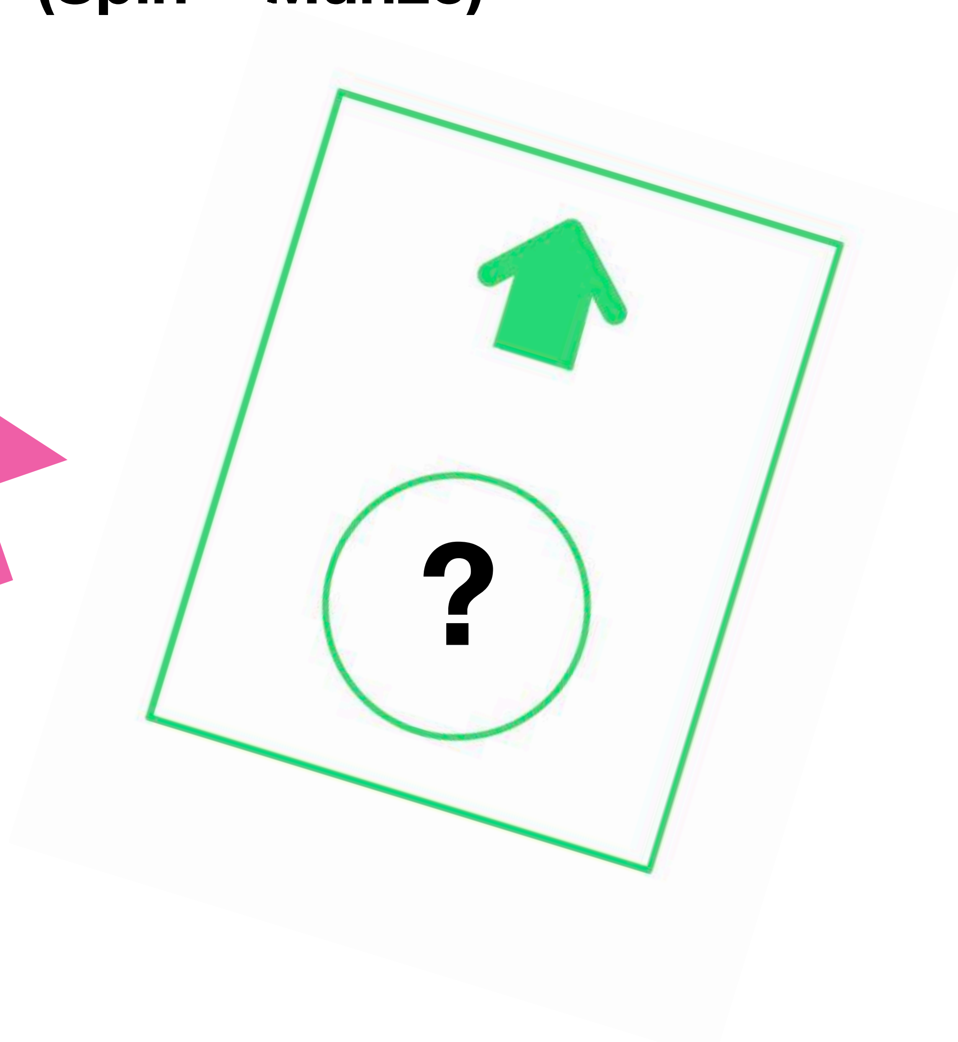
Sinnvoll und können getestet werden



Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin



Mögliche Aussagen:

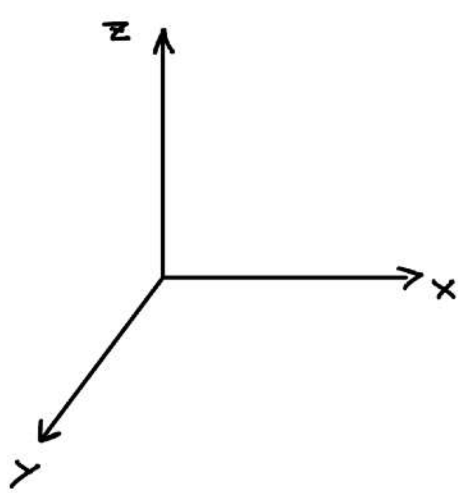
A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

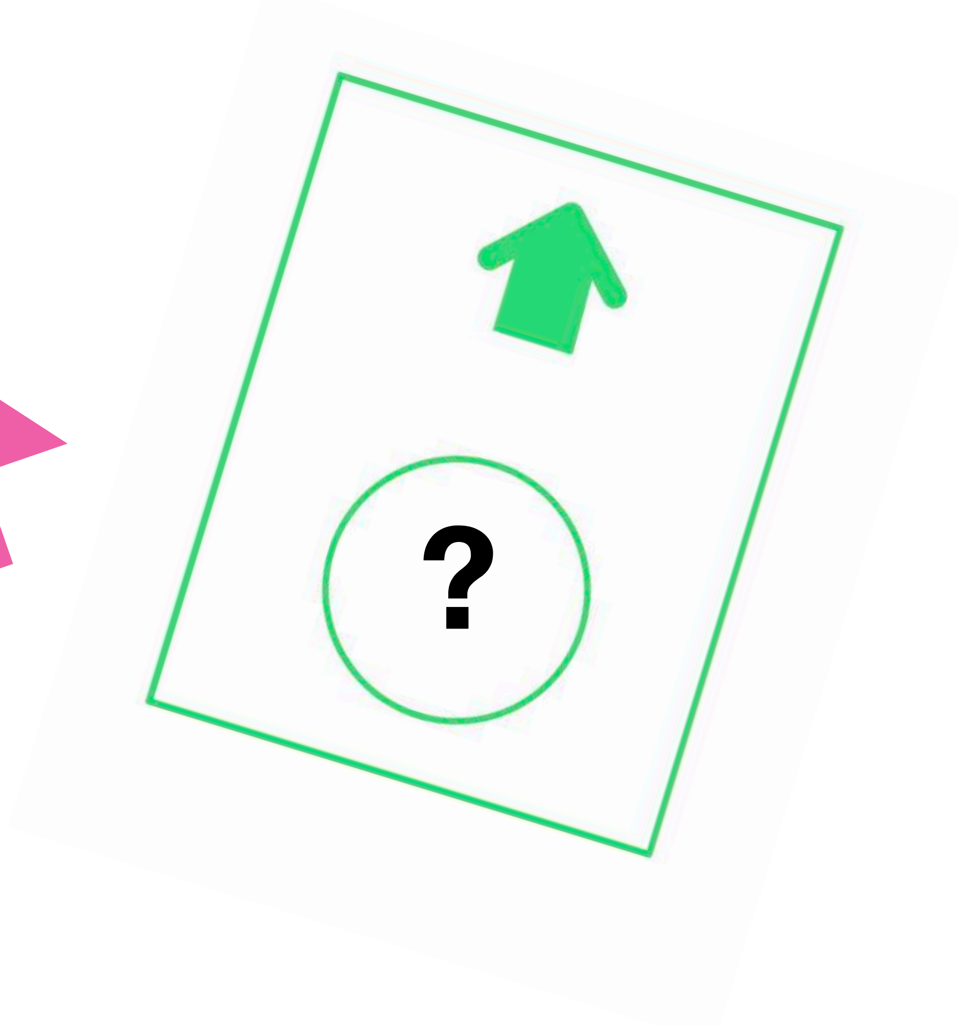
Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1



Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin



Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

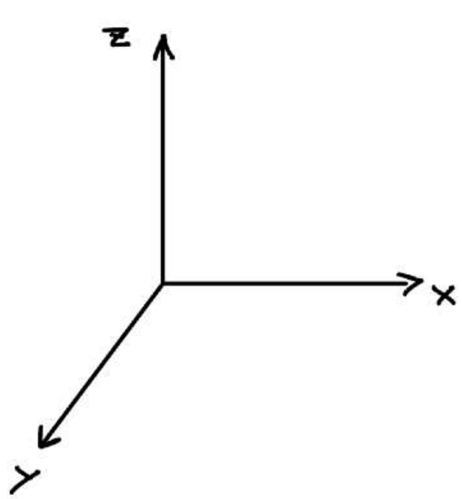
B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

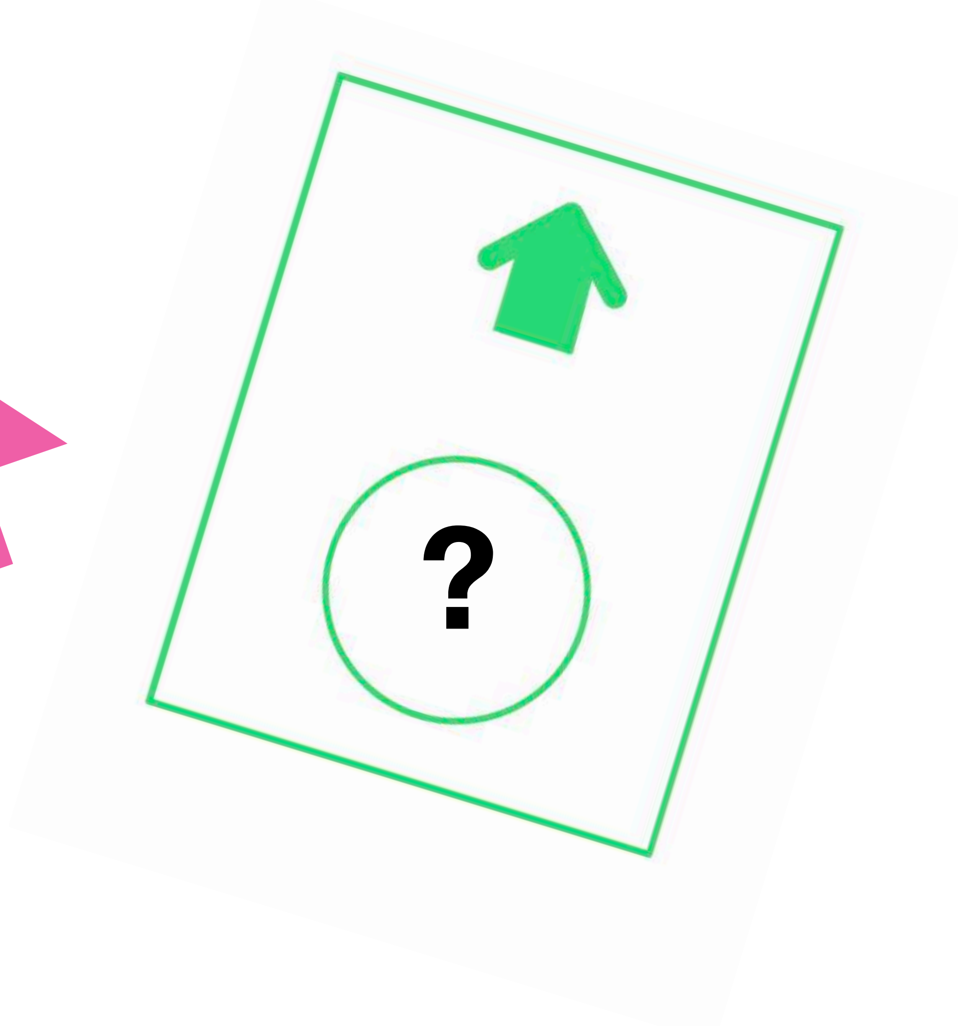
Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

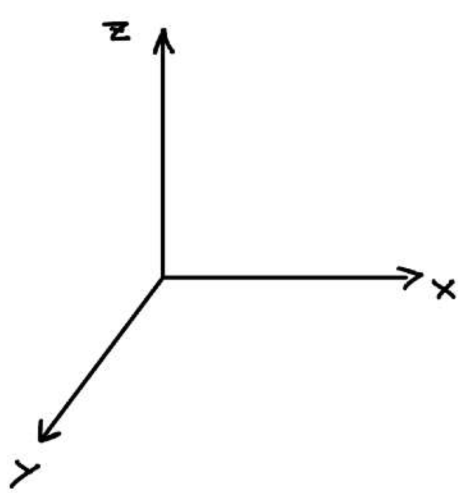


Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

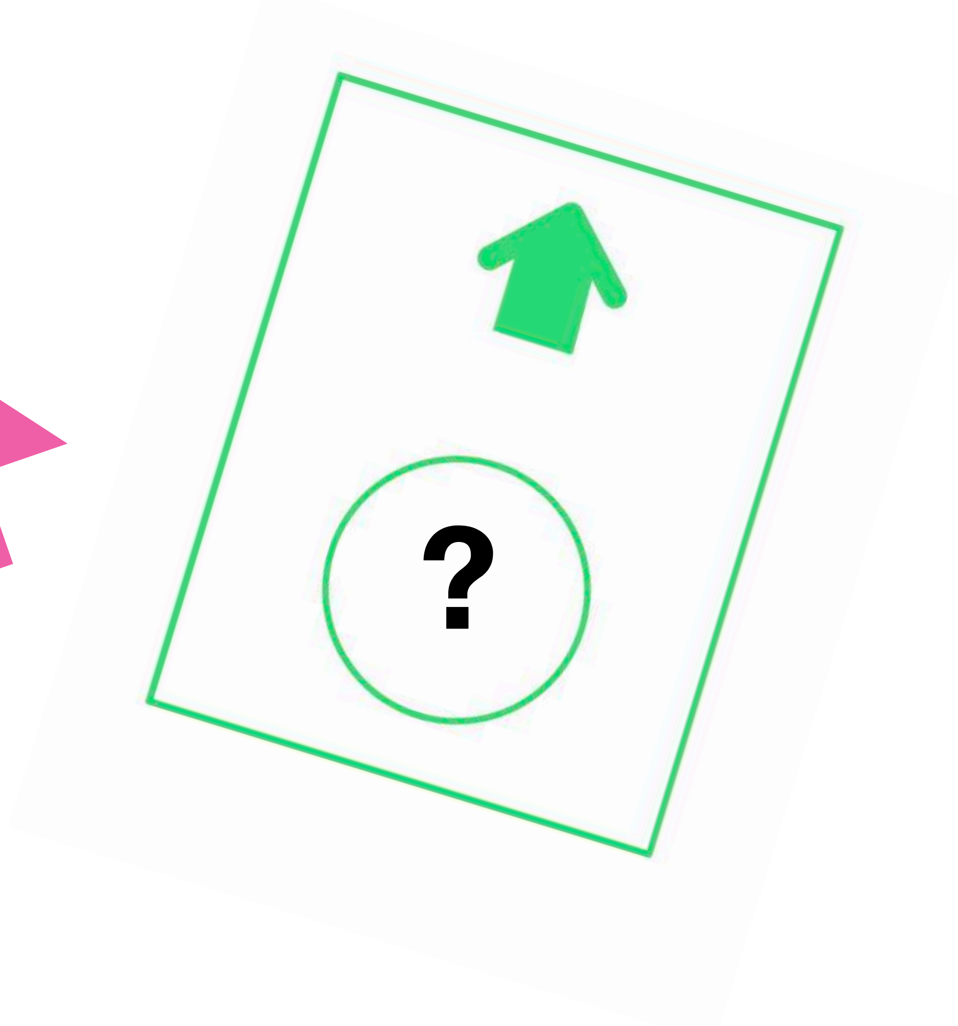
Wie steht es mit

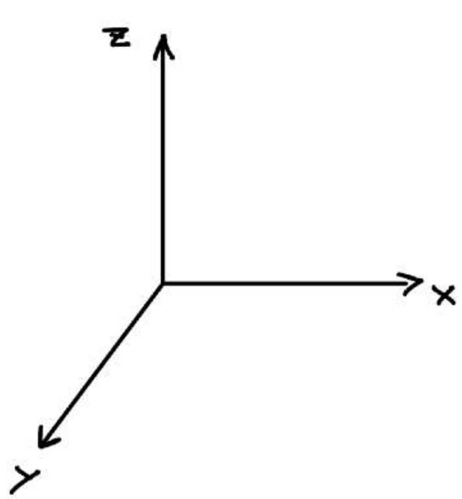
A und B: $z = +1$ und $x = +1$

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

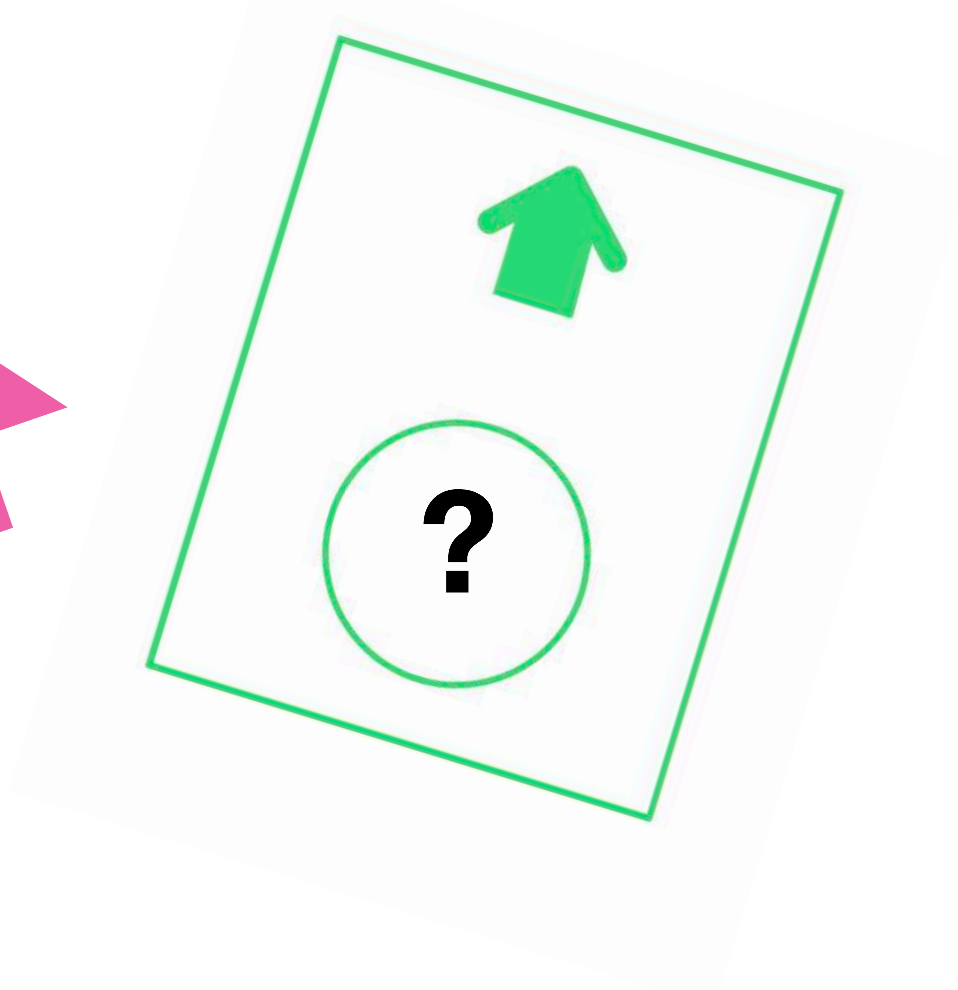
A und B: $z = +1$ und $x = +1$

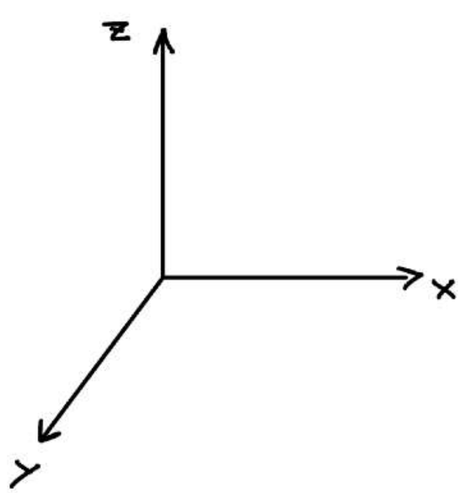
A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

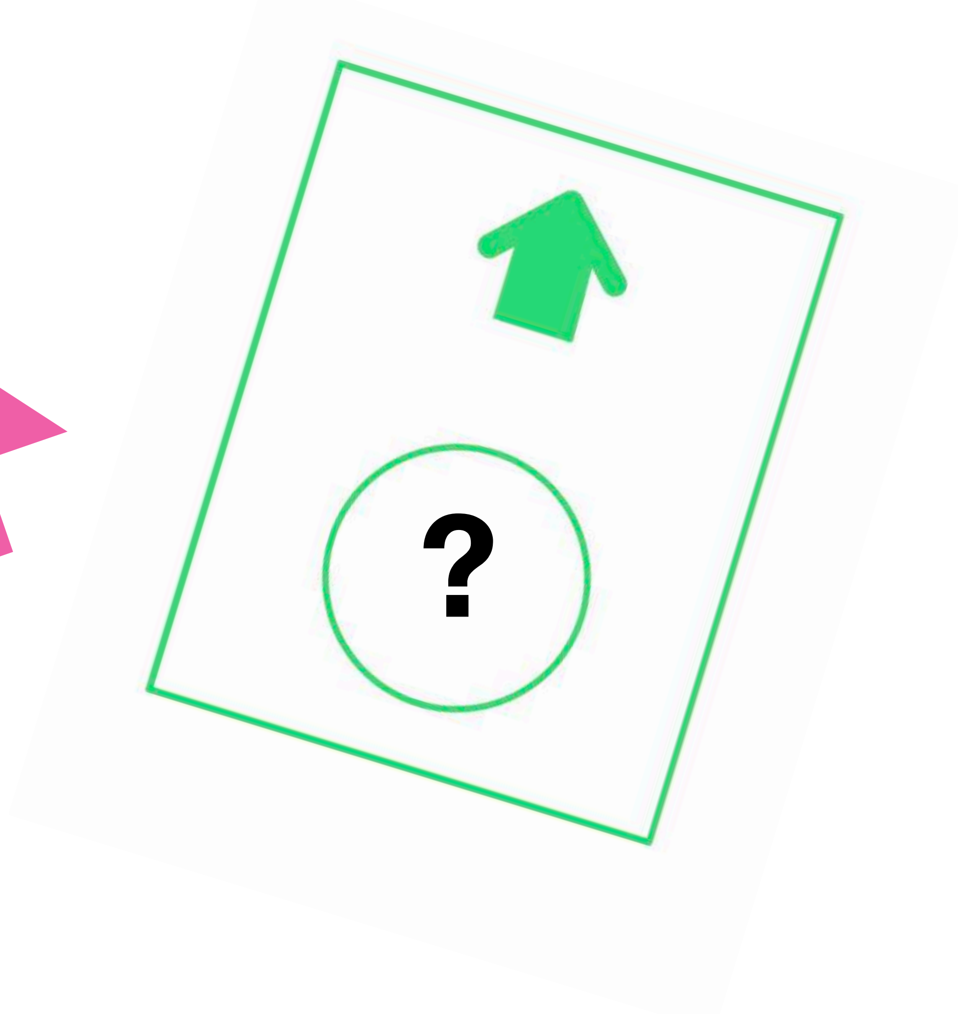
A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

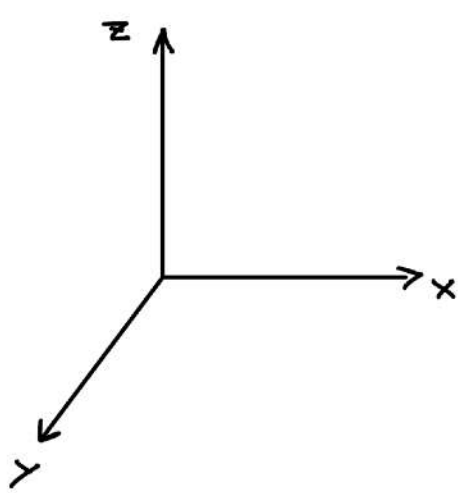
Wie testet man A oder B?

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

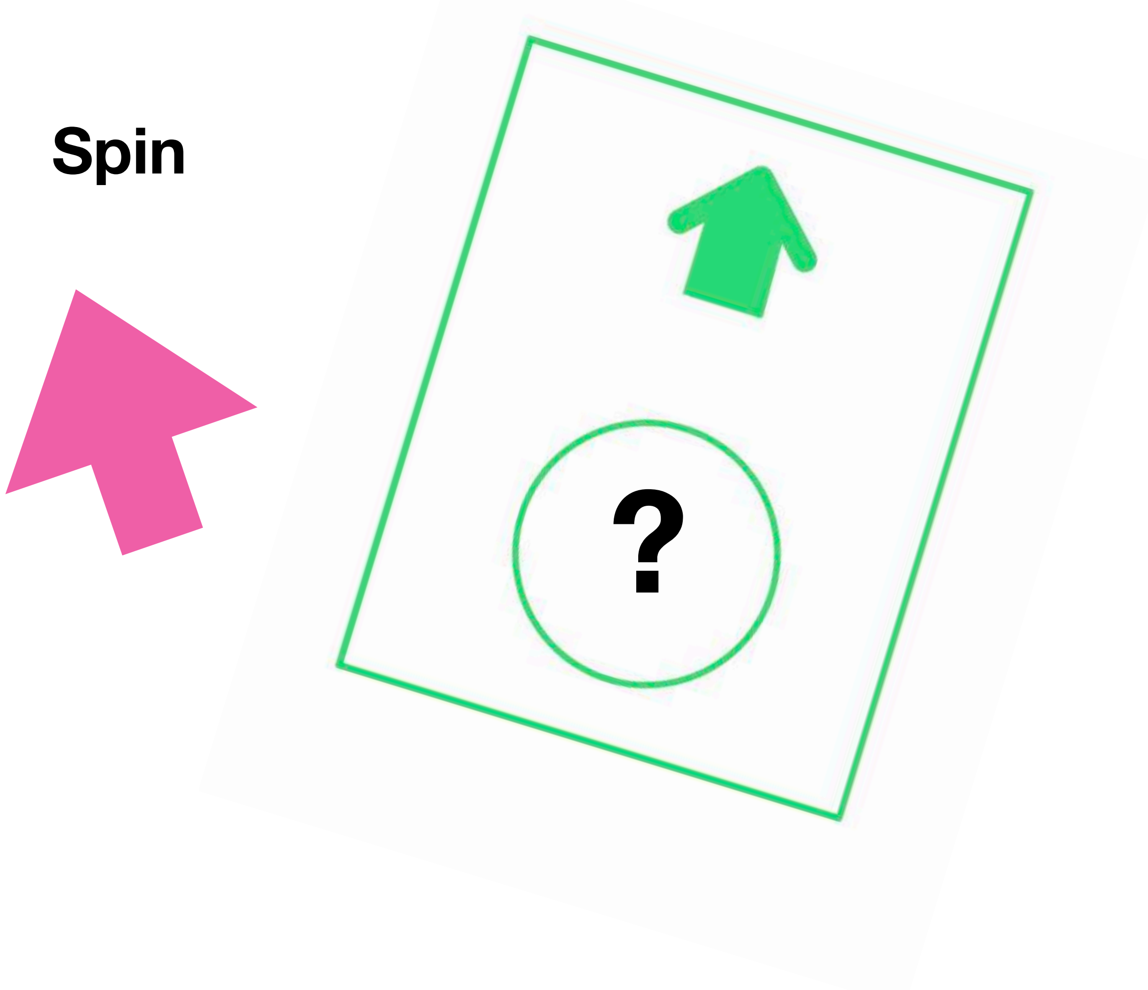
Wie testet man A oder B?

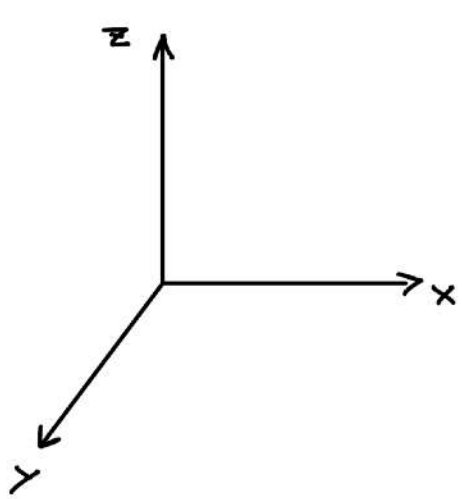
Schritt 1: Messe σ_z

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

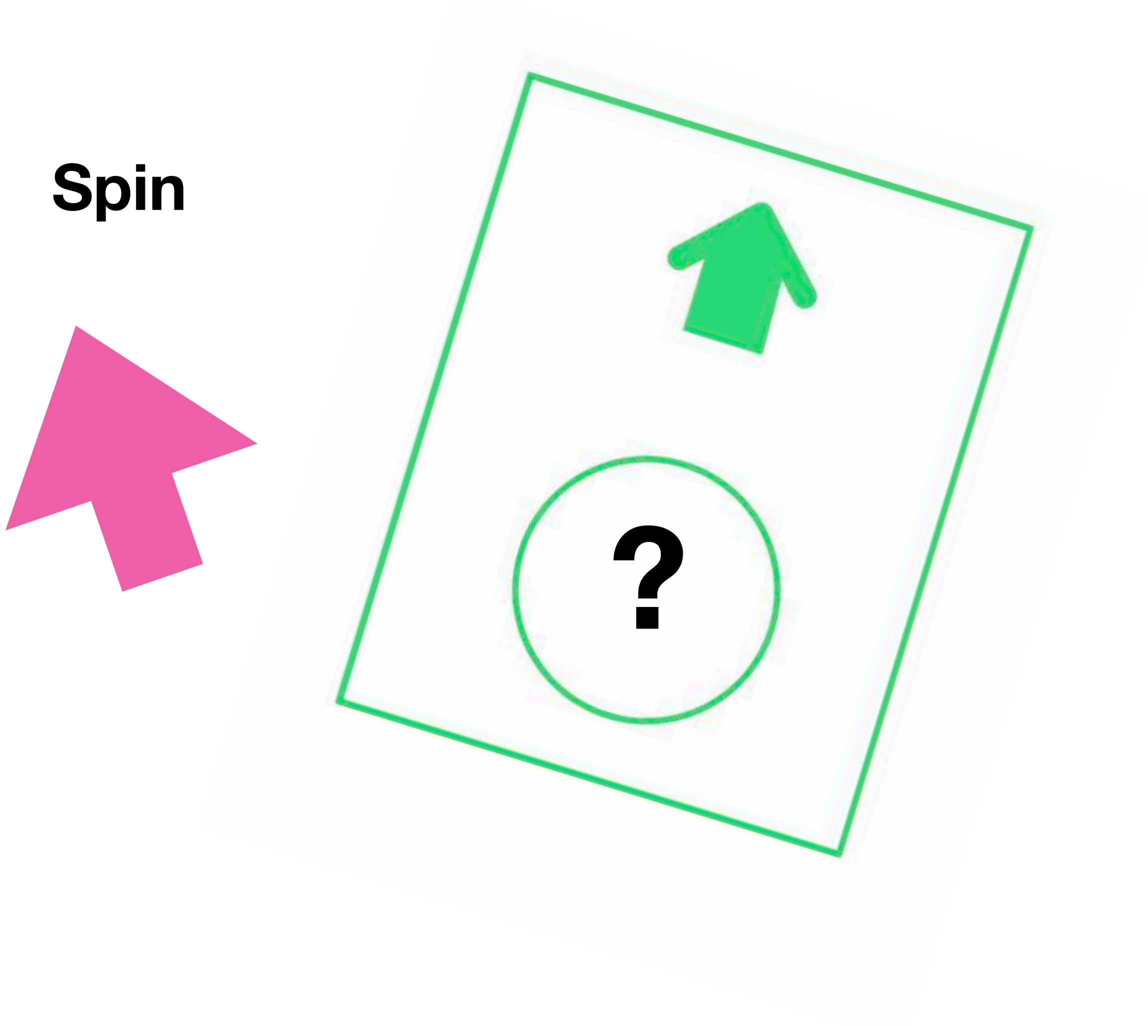
Wie testet man A oder B?

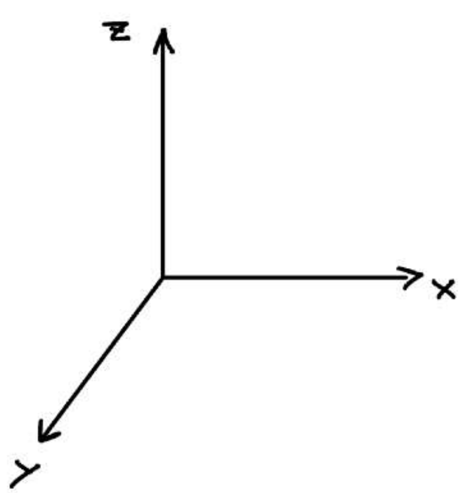
Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

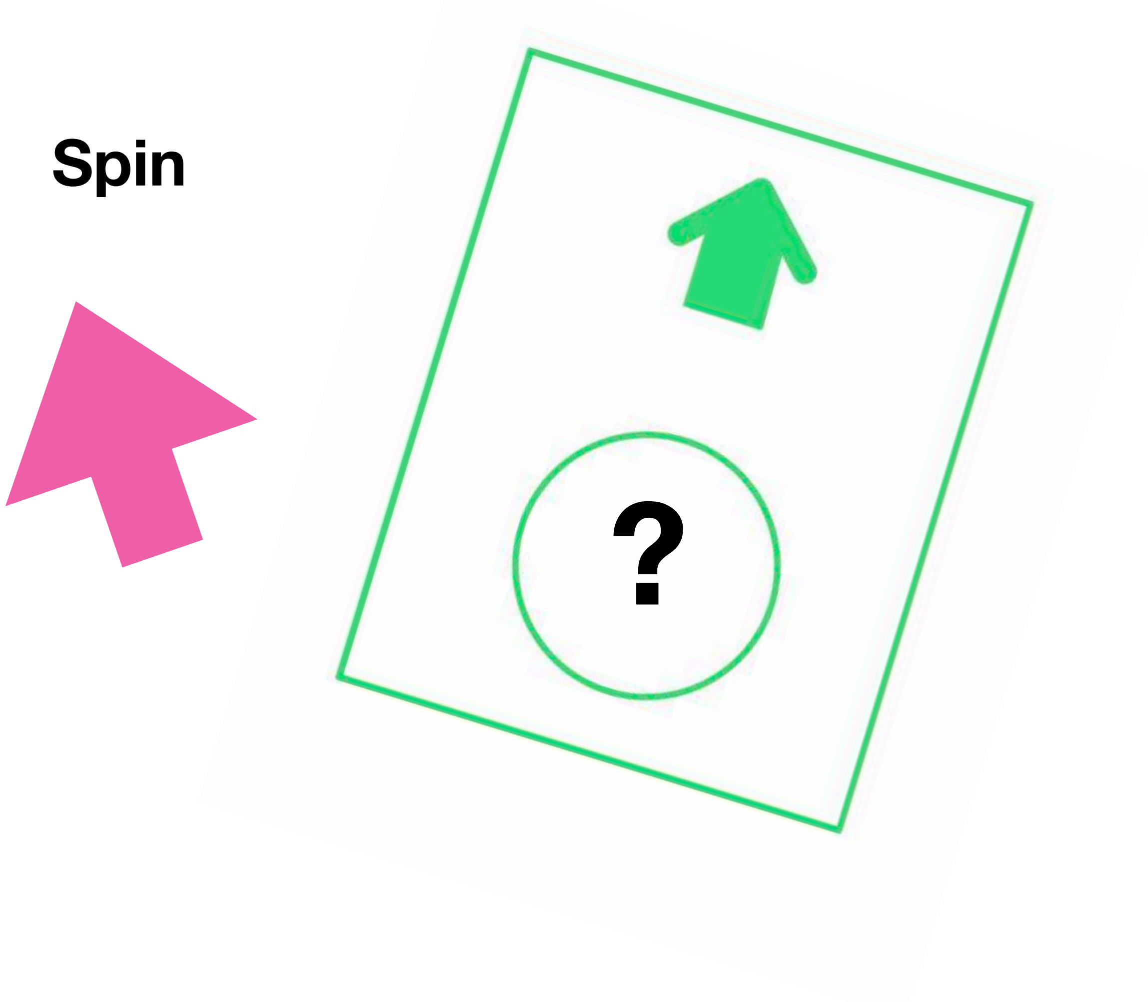
Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

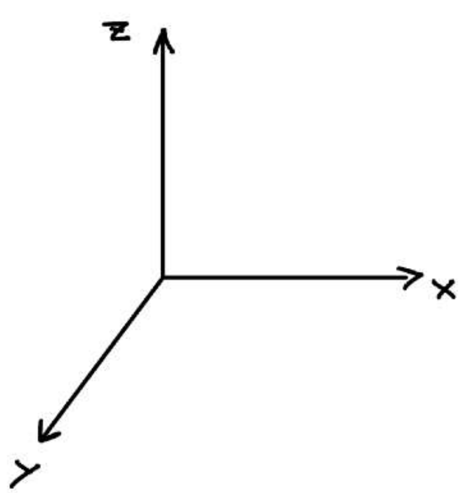
σ_z: -1

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

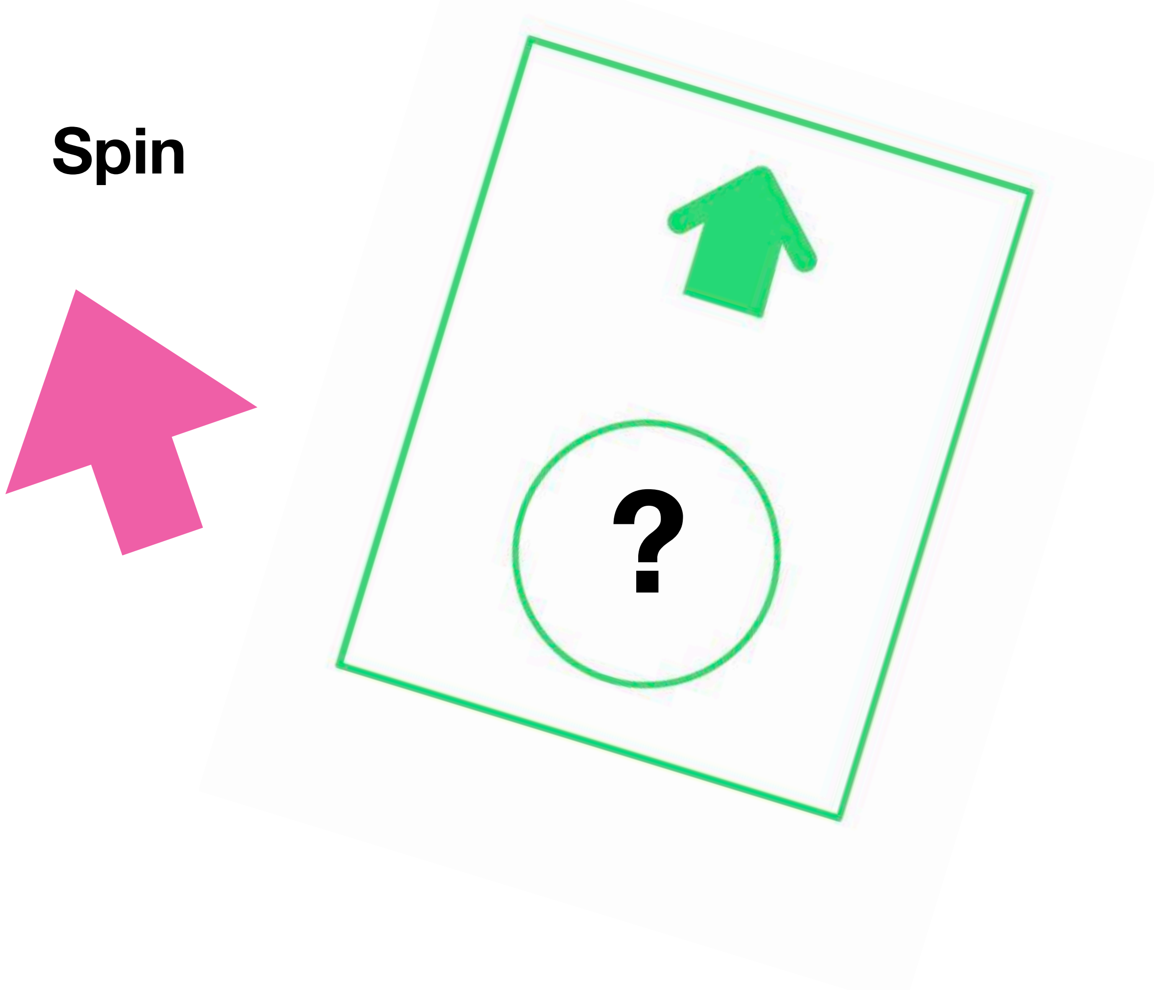
Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

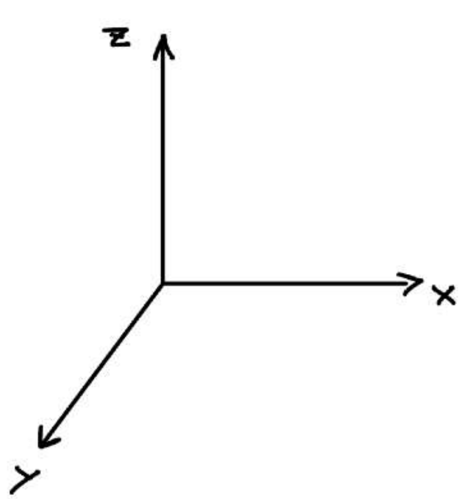
σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x:

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

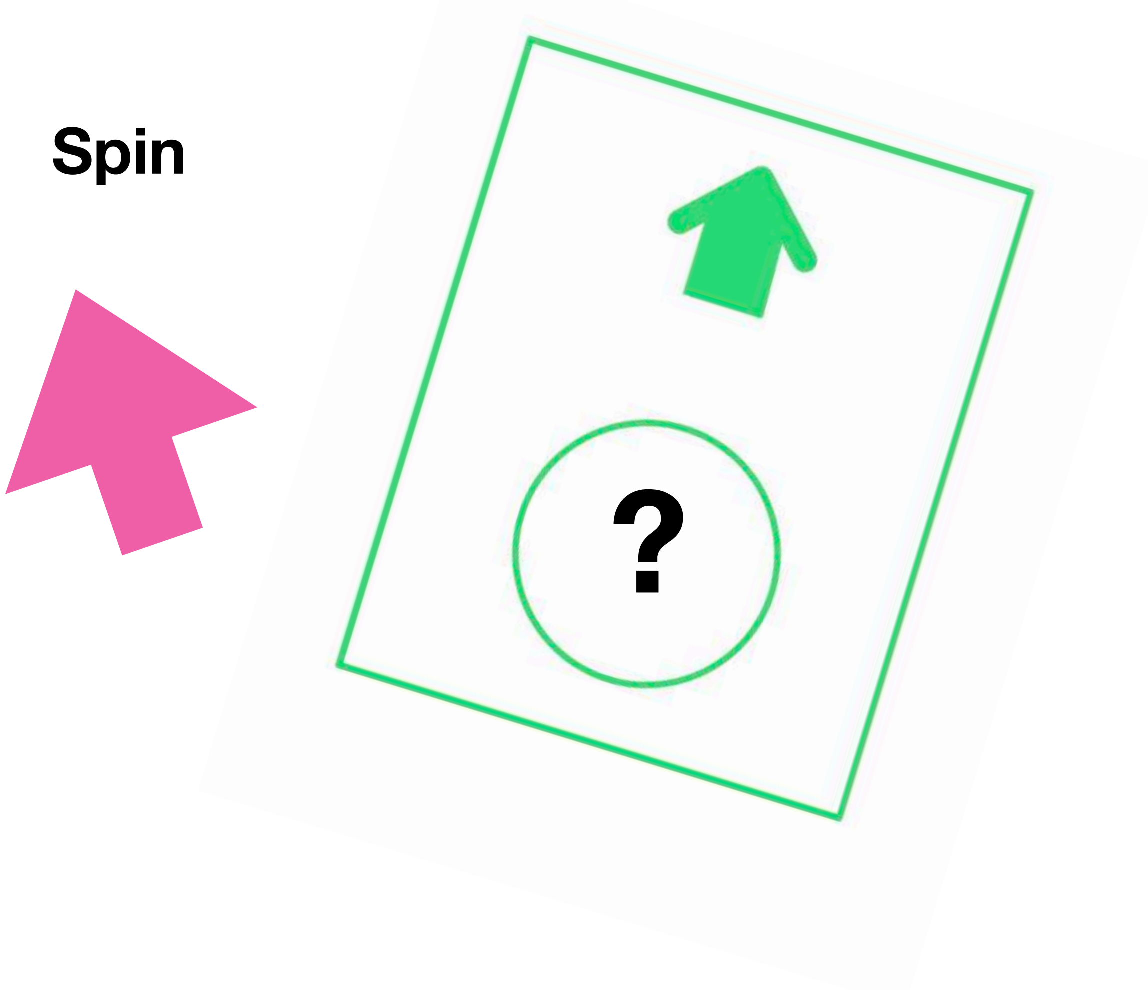
Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

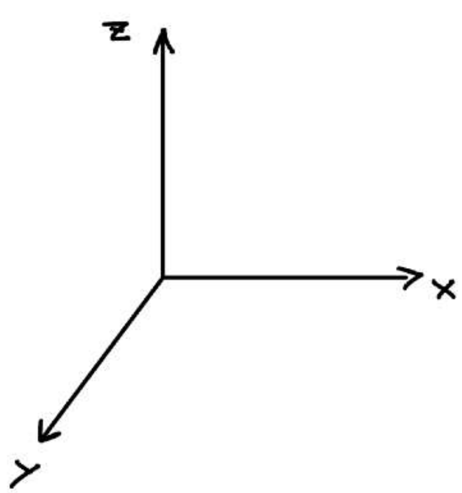
σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x: +1 -> wahr, sonst falsch

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

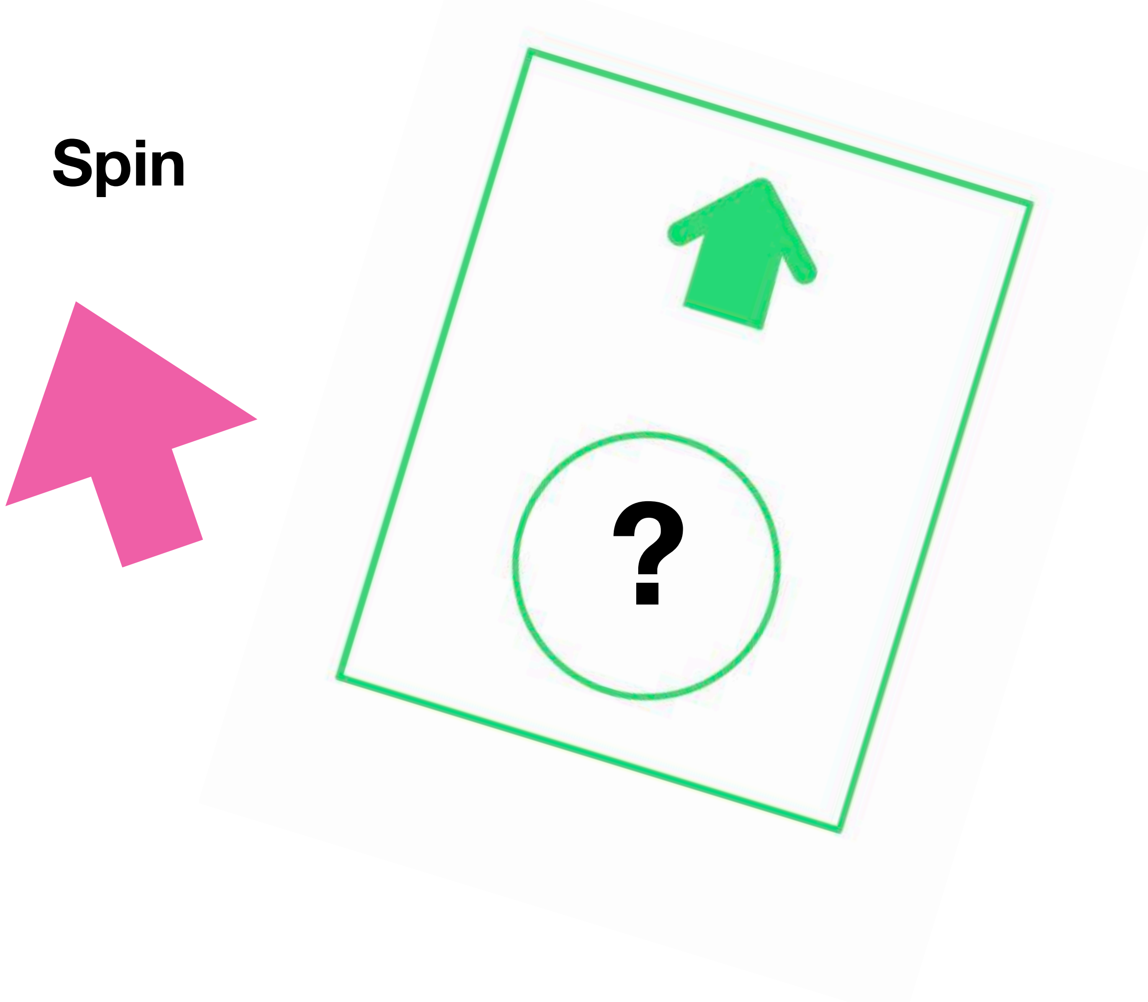
σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x: +1 -> wahr, sonst falsch

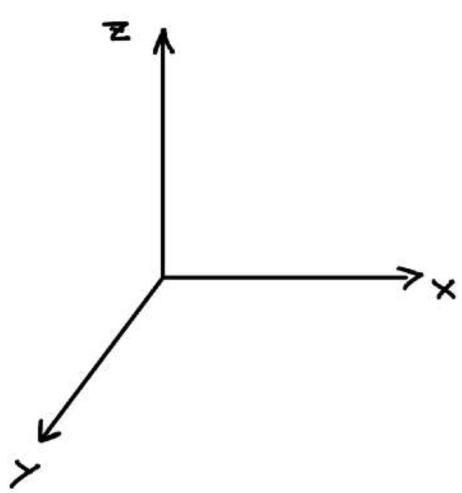
Alternativ B oder A:

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$und $x = +1$

A oder B: $z = +1$oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

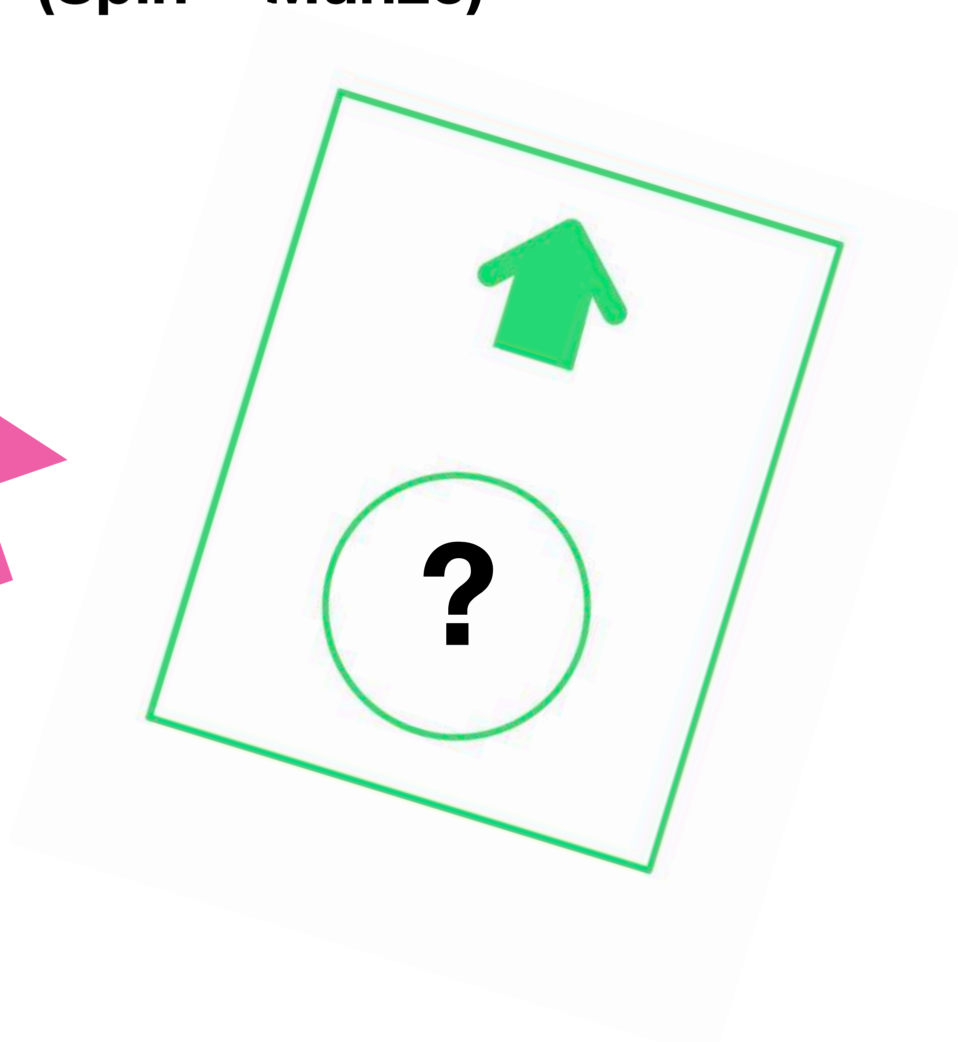
σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x: +1 -> wahr, sonst falsch

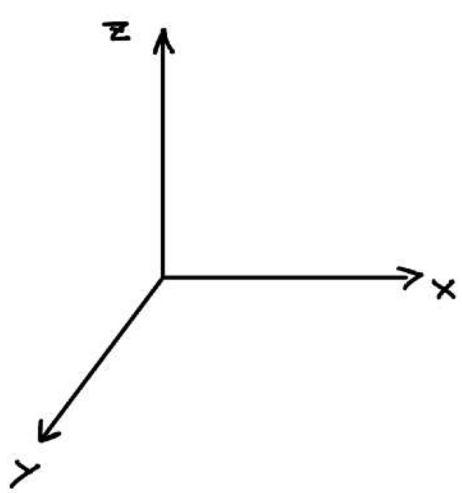
Alternativ B oder A: Schritt 1: Messe σ_x

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

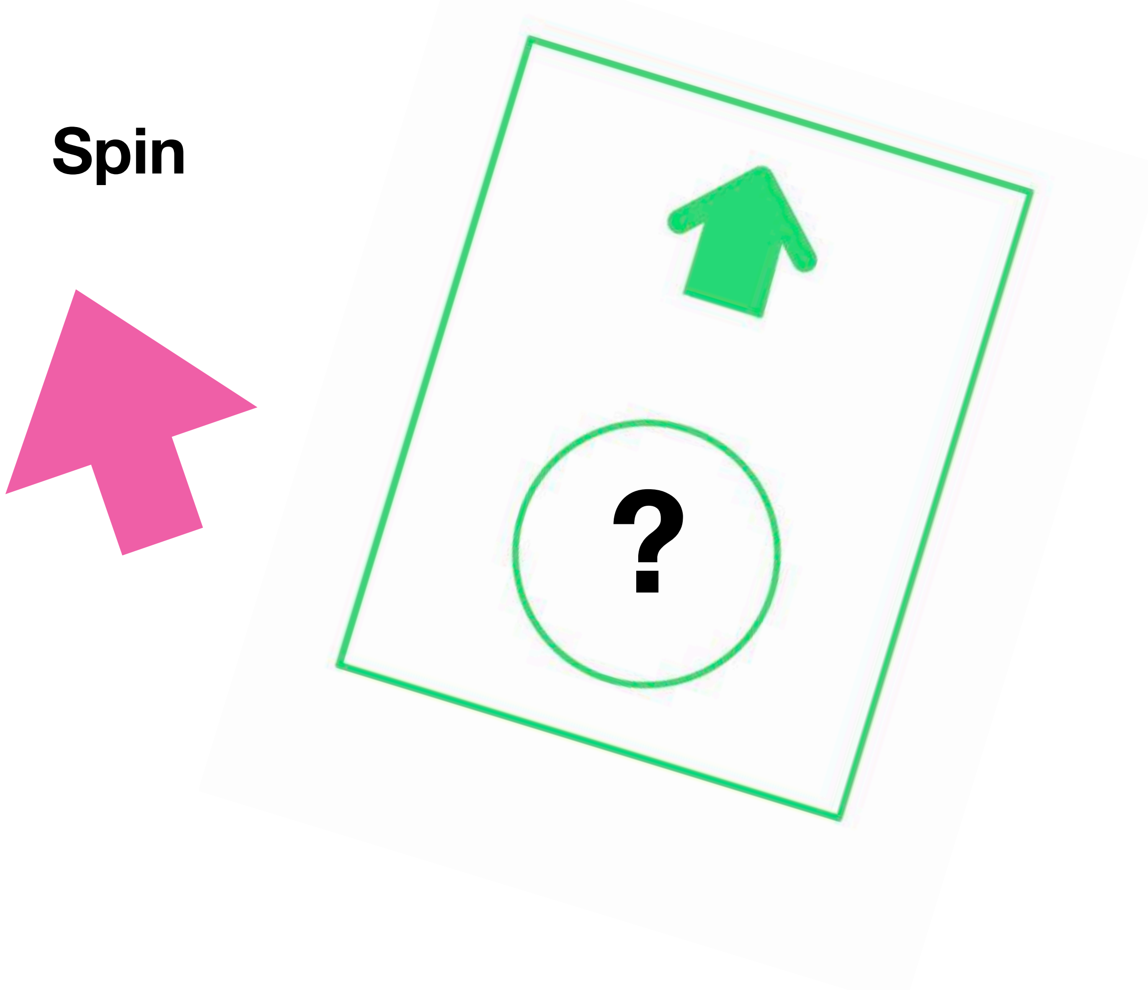
σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x: +1 -> wahr, sonst falsch

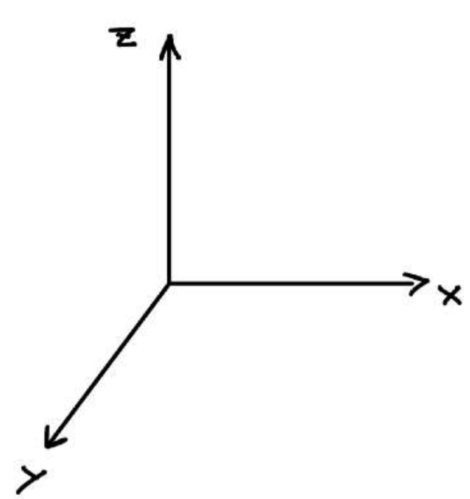
Alternativ B oder A: Schritt 1: Messe σ_x: +1 -> wahr

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x: +1 -> wahr, sonst falsch

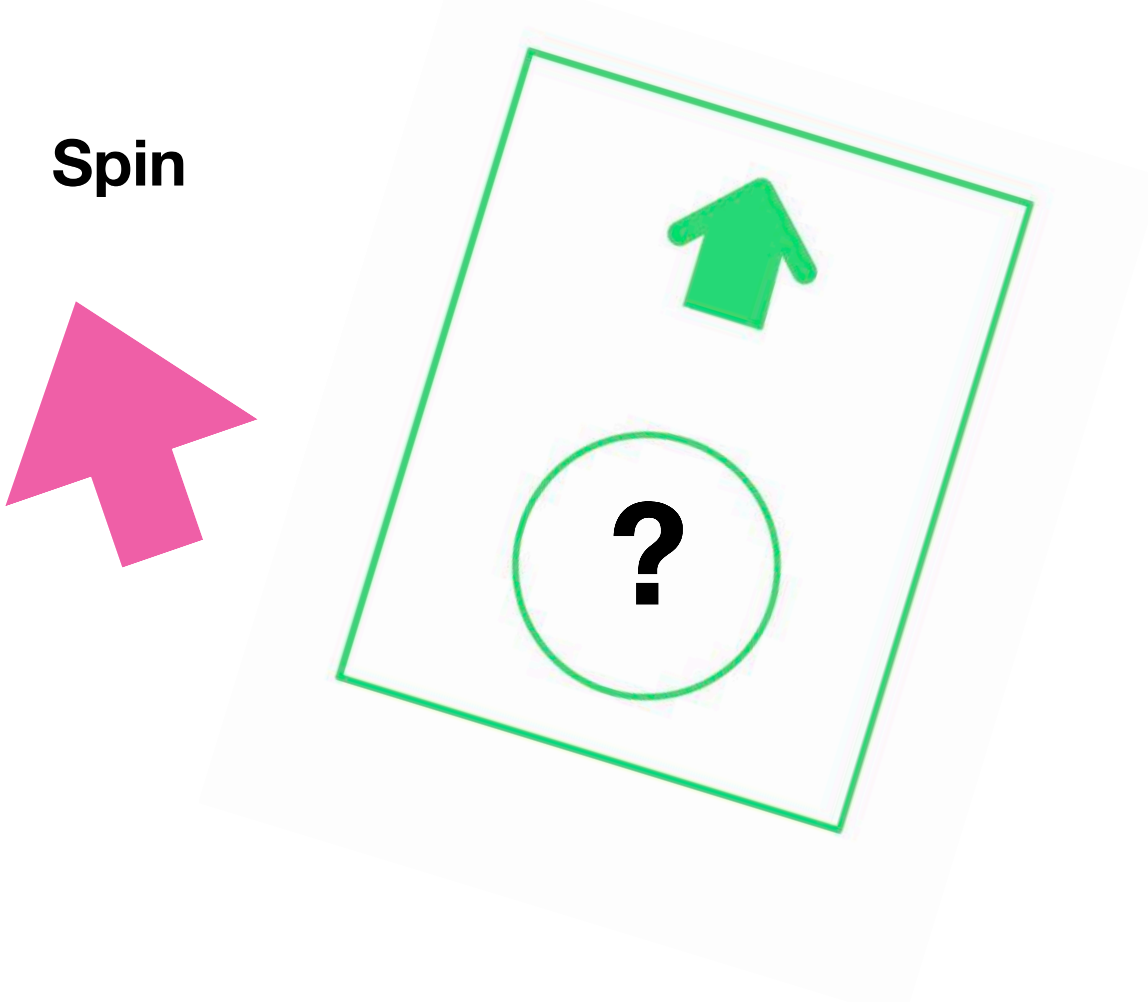
Alternativ B oder A: Schritt 1: Messe σ_x: +1 -> wahr

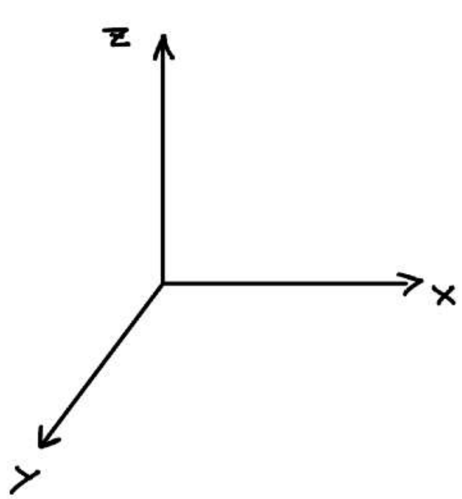
σ_x: -1:

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$und $x = +1$

A oder B: $z = +1$oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x: +1 -> wahr, sonst falsch

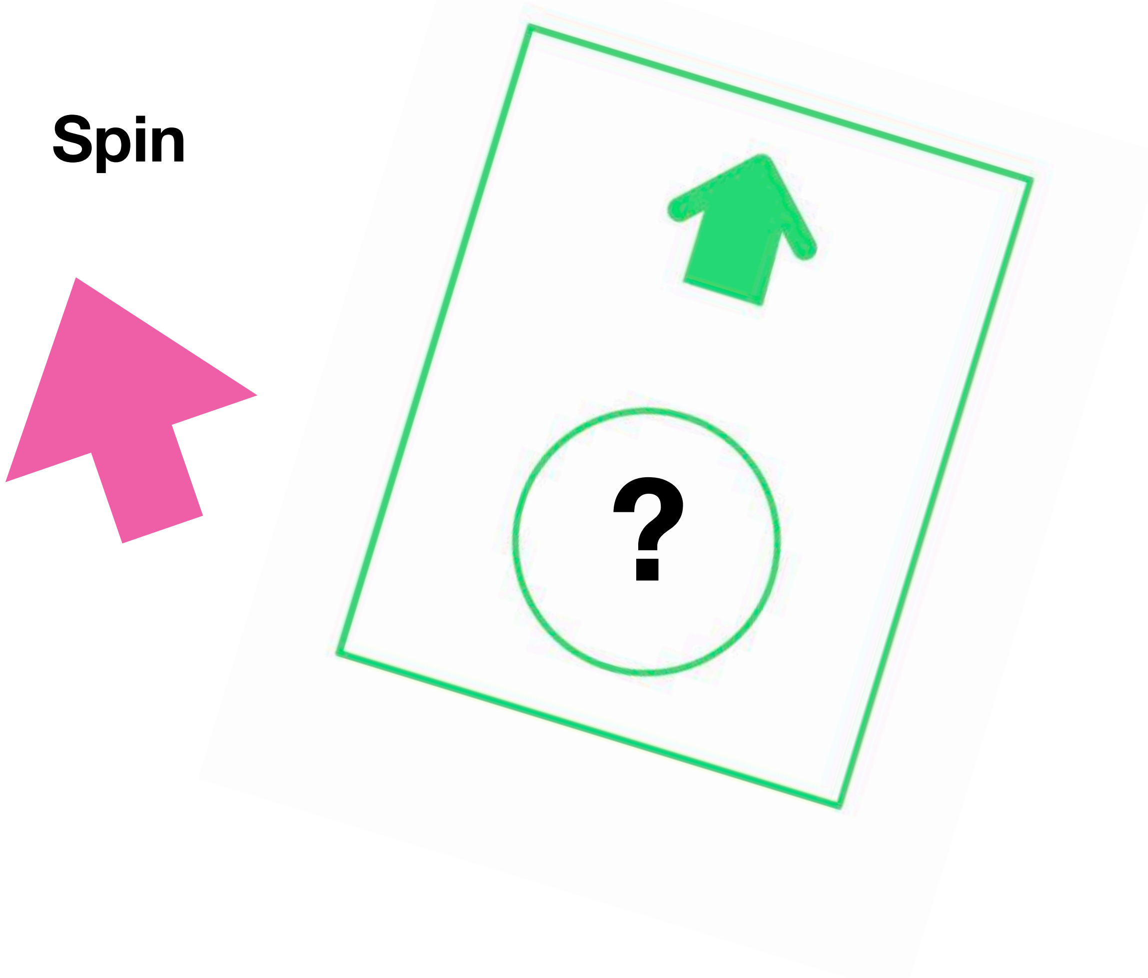
Alternativ B oder A: Schritt 1: Messe σ_x: +1 -> wahr

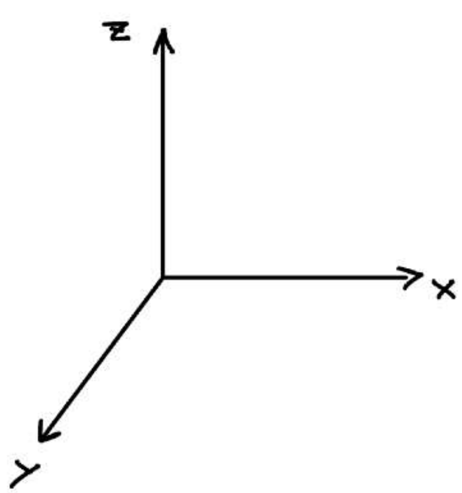
σ_x: -1: Schritt 2 Messe σ_z:

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x: +1 -> wahr, sonst falsch

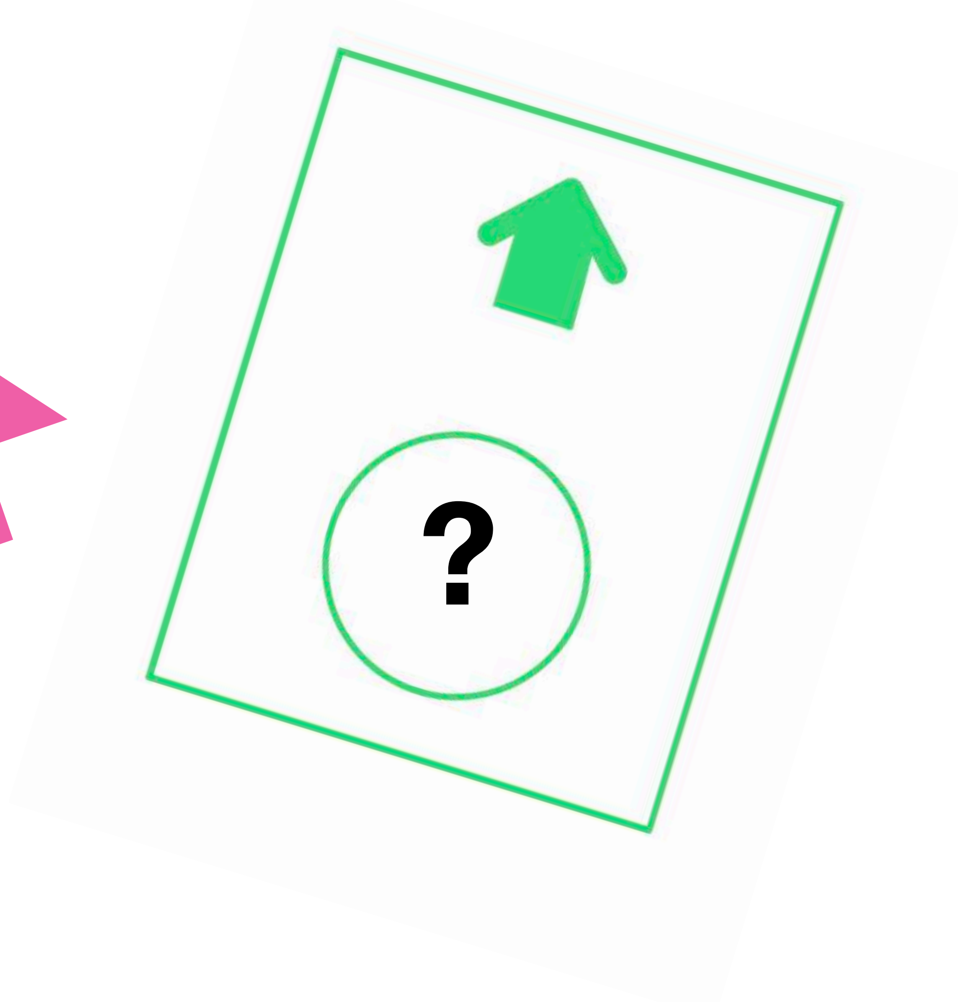
Alternativ B oder A: Schritt 1: Messe σ_x: +1 -> wahr

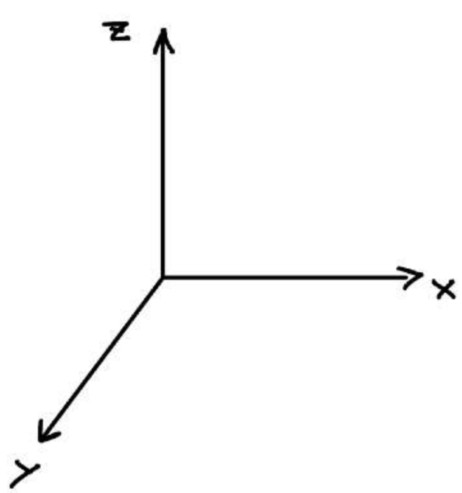
σ_x: -1: Schritt 2 Messe σ_z: +1 -> wahr, sonst falsch

Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x: +1 -> wahr, sonst falsch

Alternativ B oder A: Schritt 1: Messe σ_x: +1 -> wahr

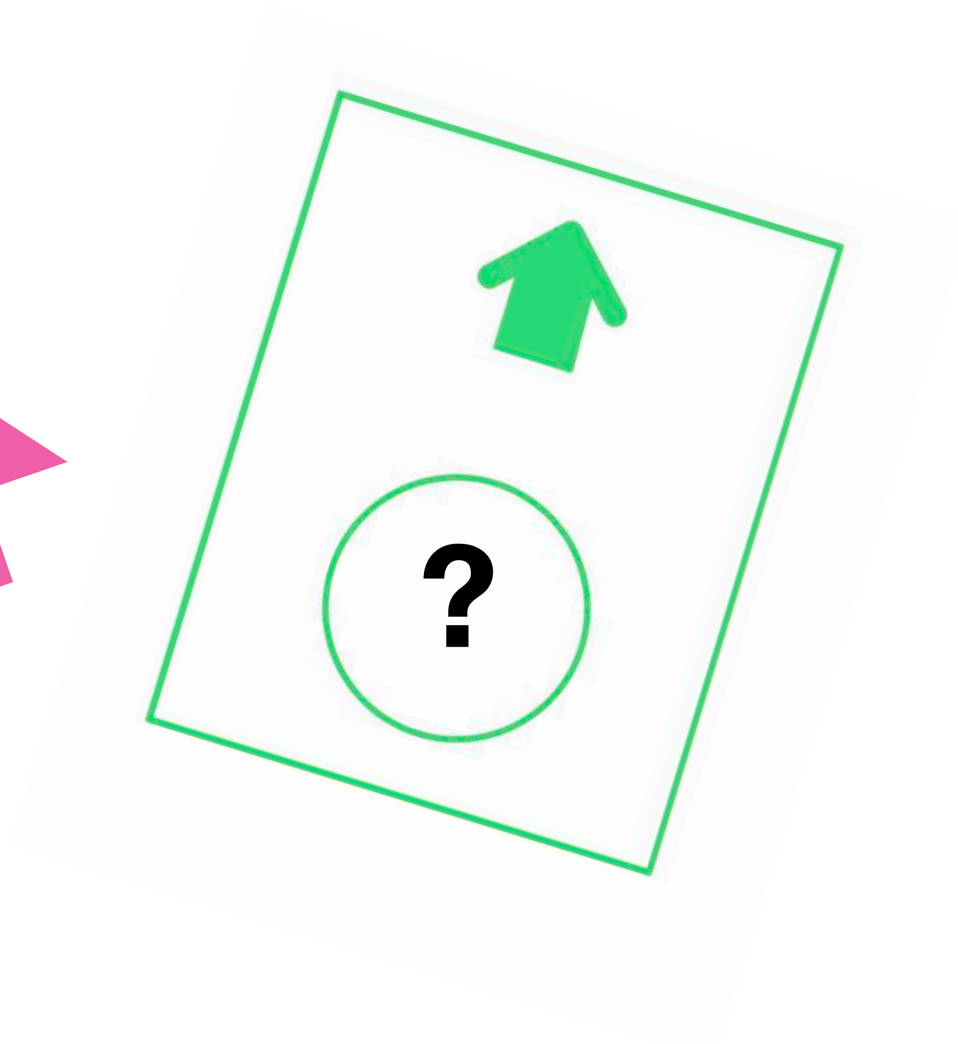
σ_x: -1: Schritt 2 Messe σ_z: +1 -> wahr, sonst falsch

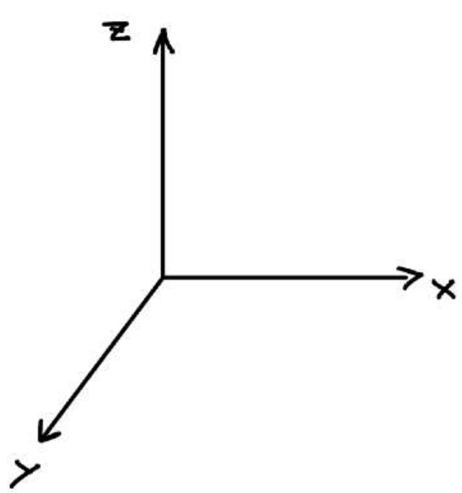
In klassischer Physik: (A oder B) = (B oder A)

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

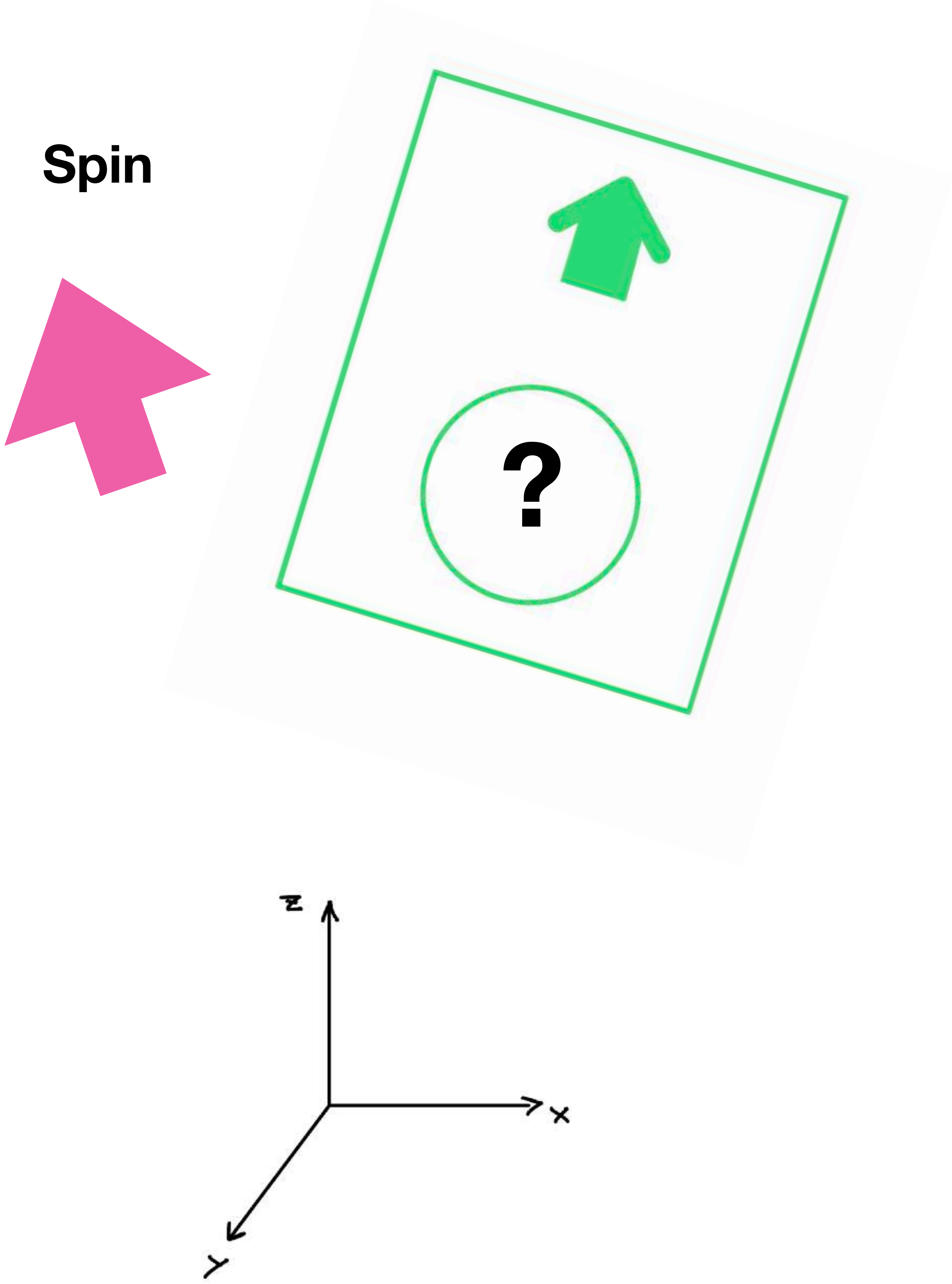
Spin





Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt



Weiterhin:

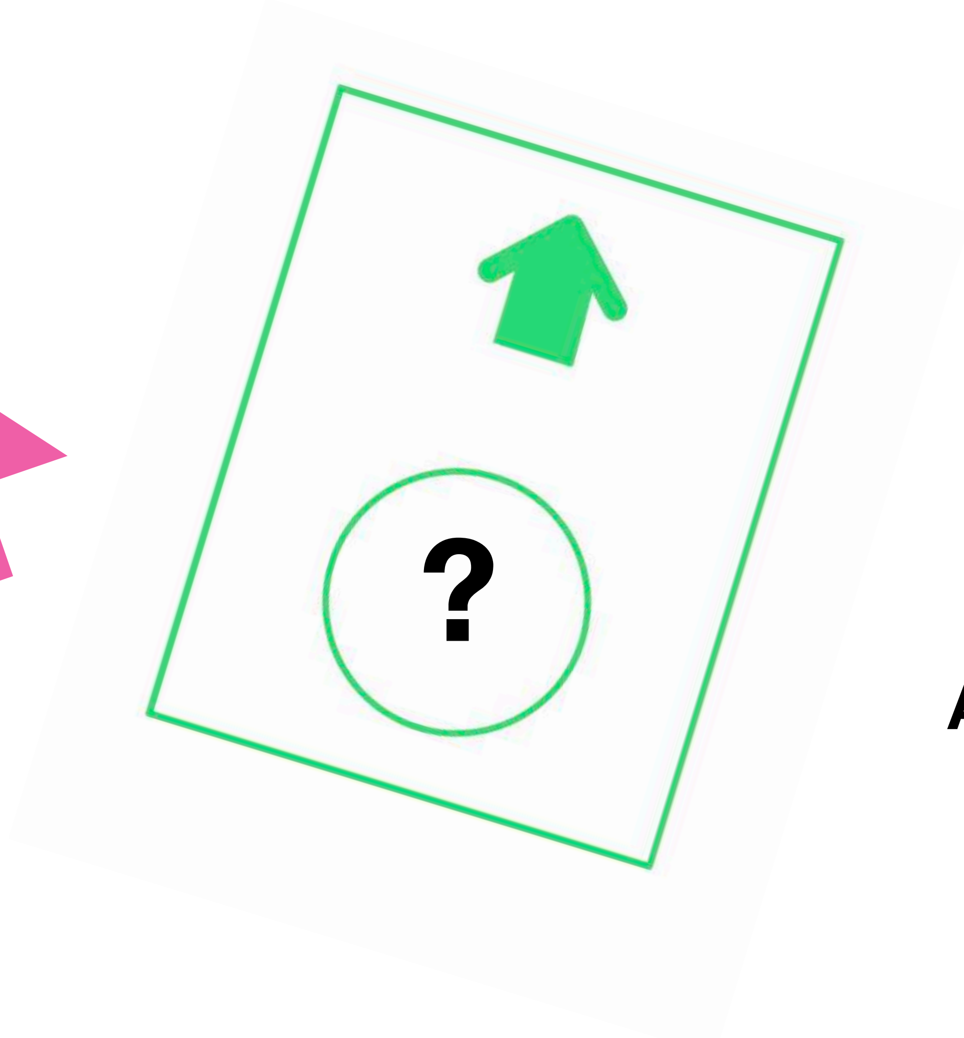
A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin

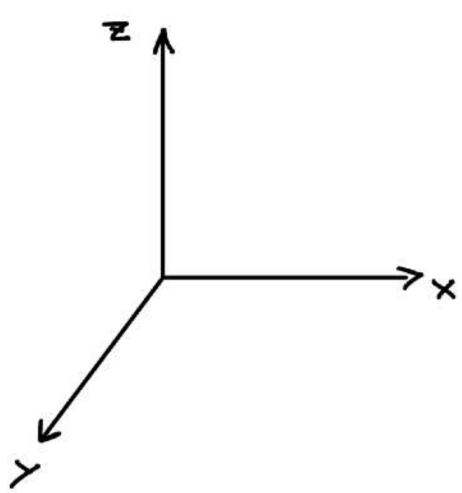


Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

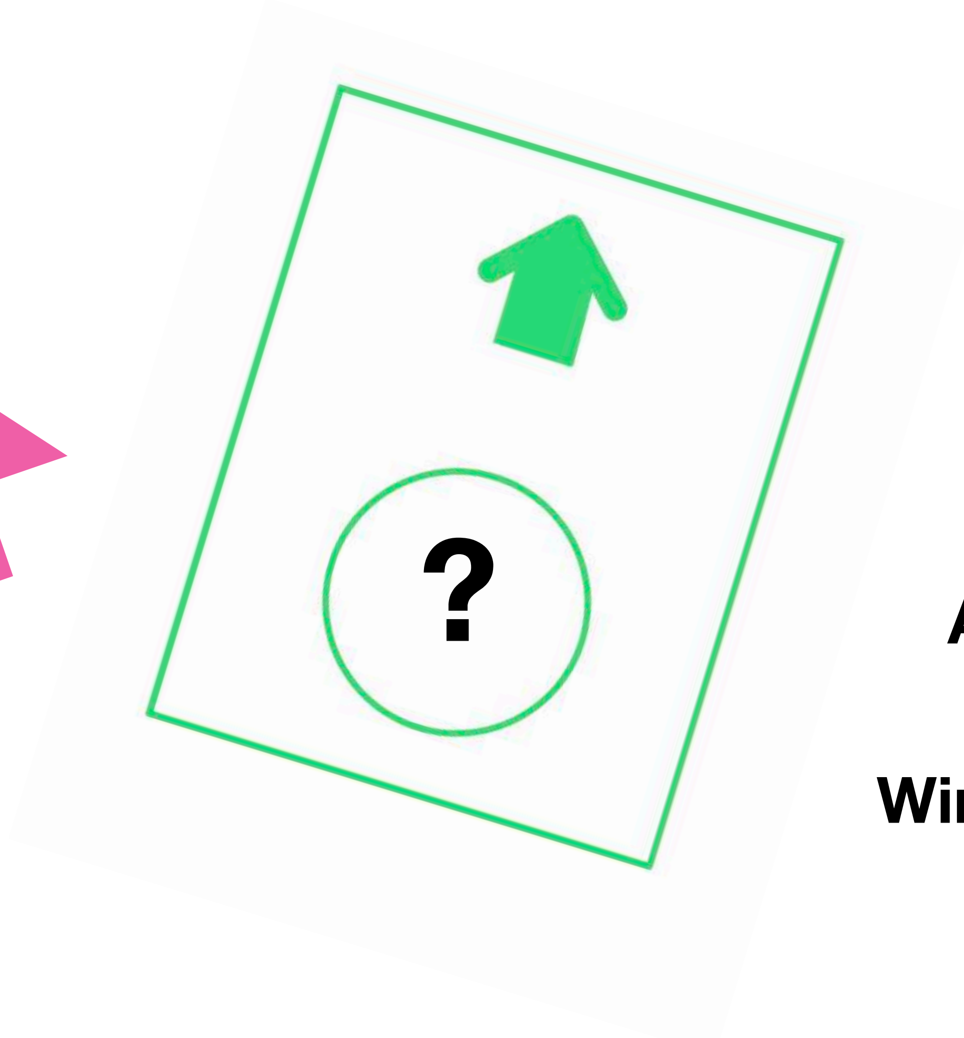
Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

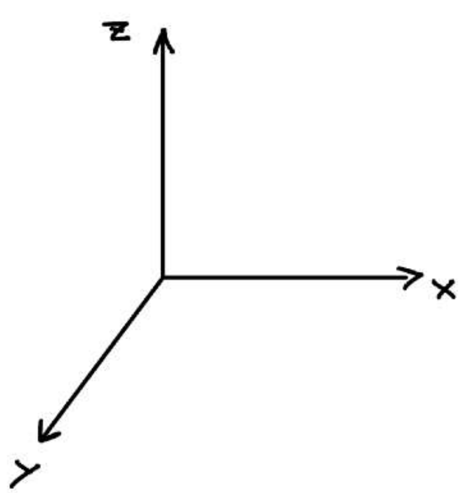


Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

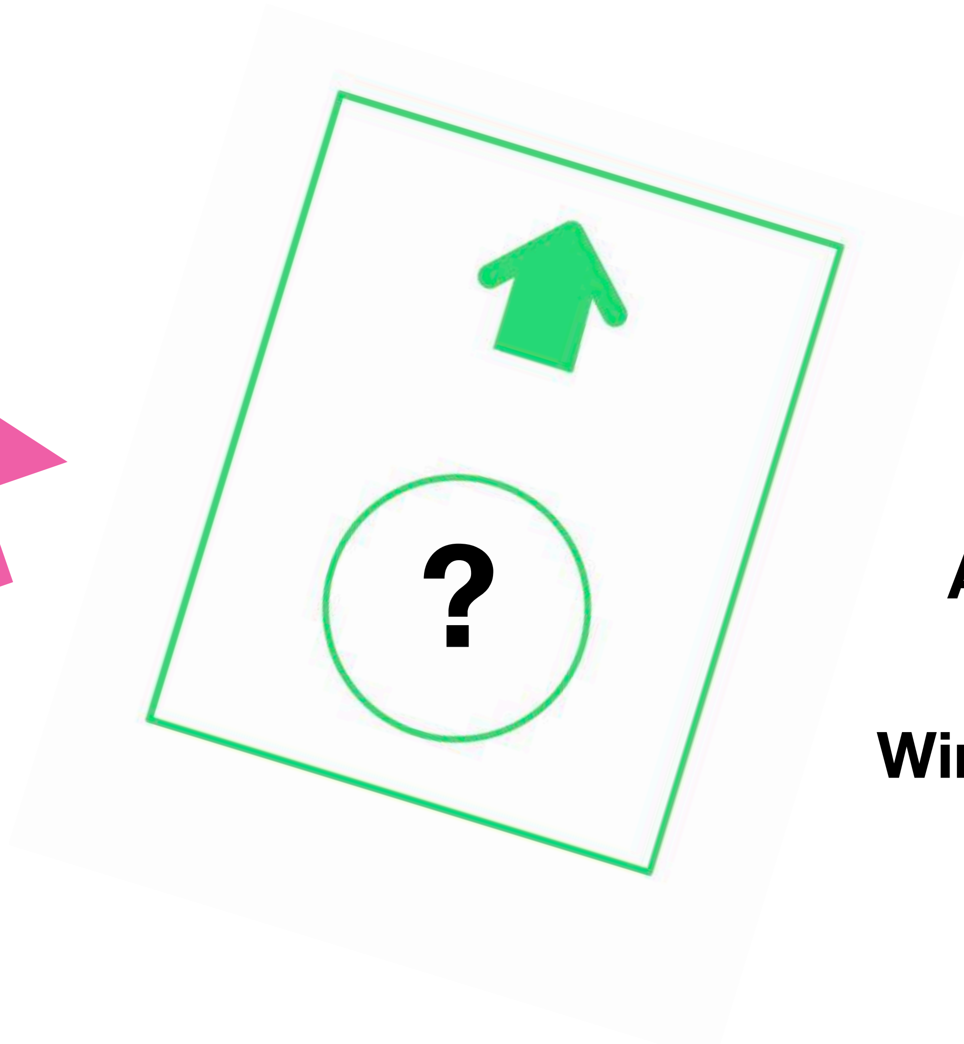
Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Weiterhin:

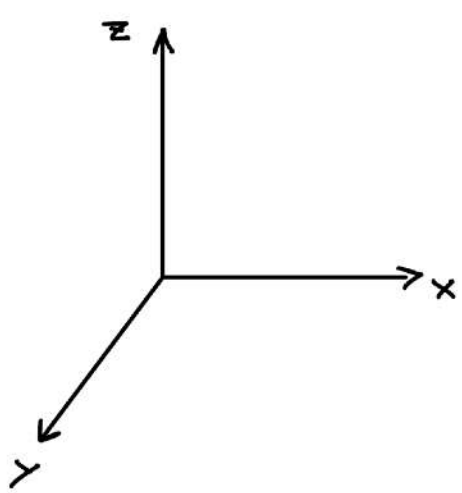
A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

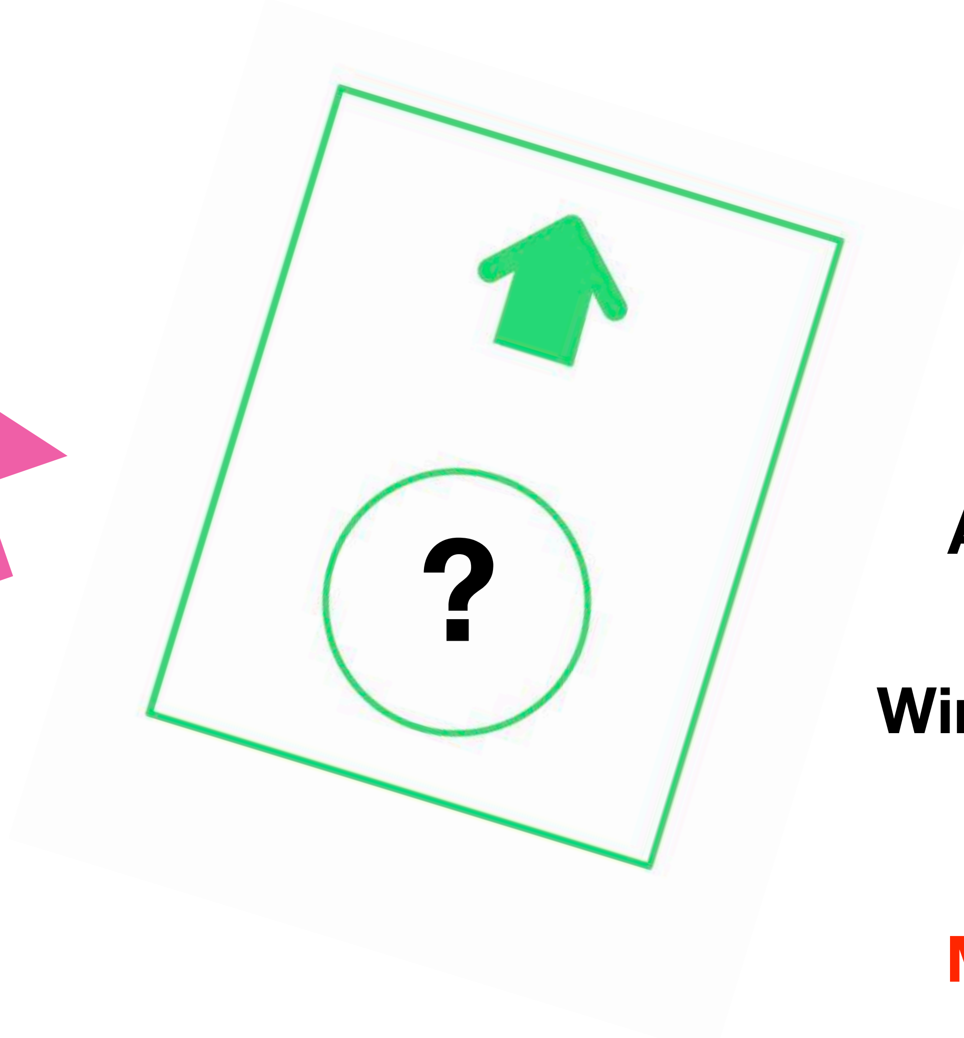
Methode 1: Messe σ_z

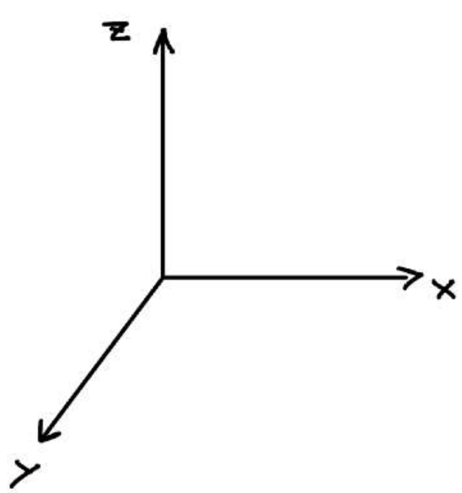


Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

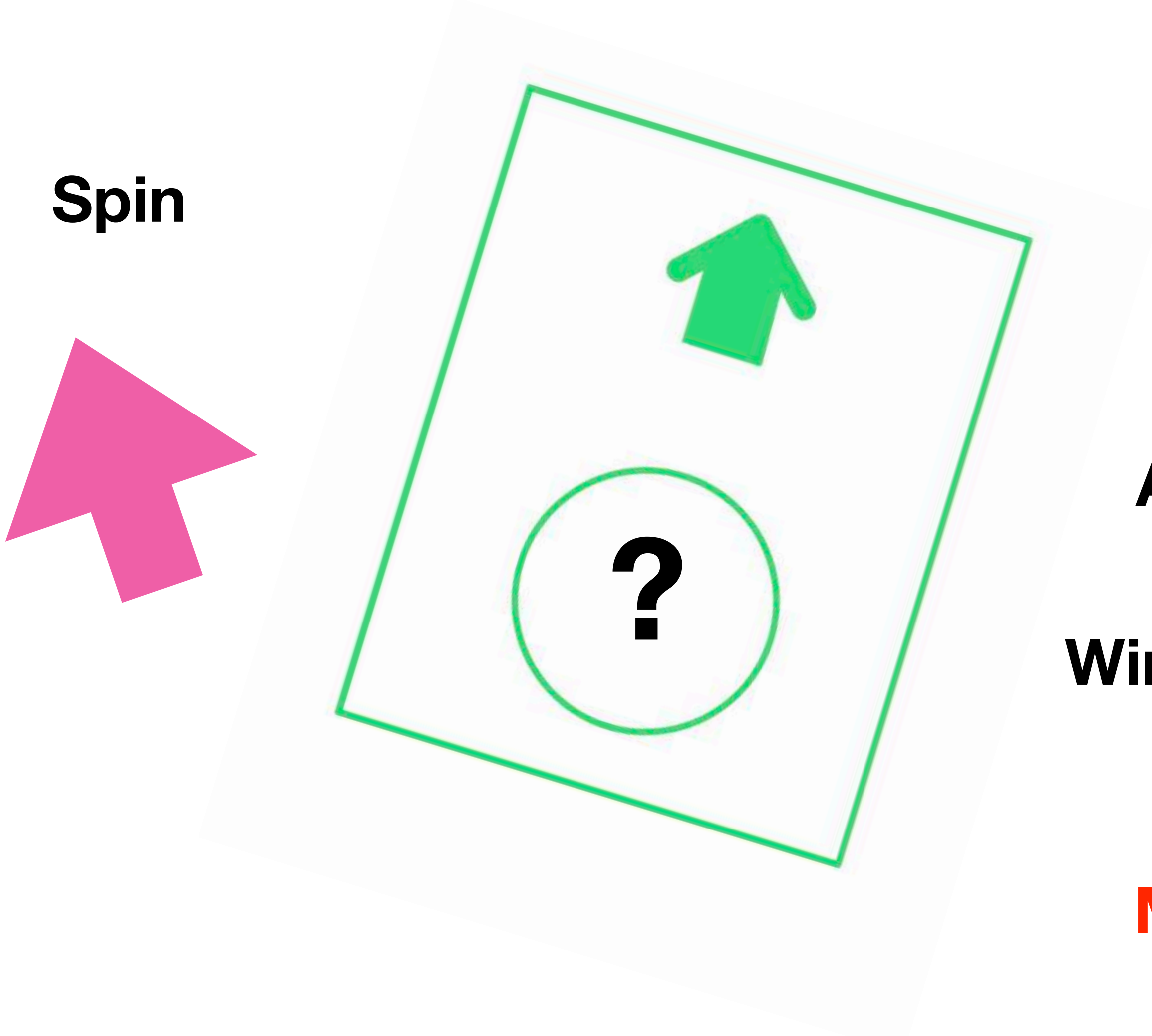
Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

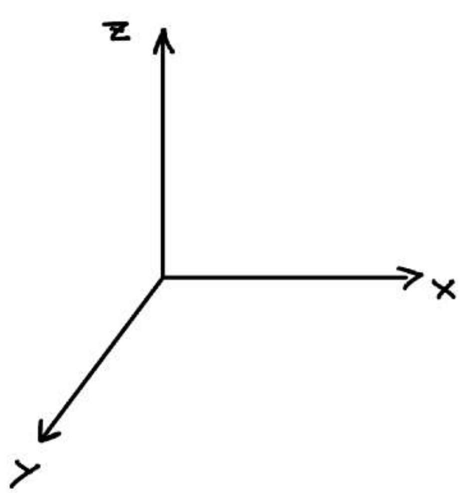
Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: **Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1**

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt





Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

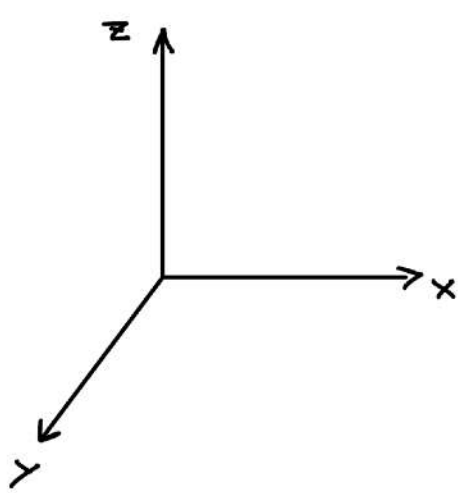
Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

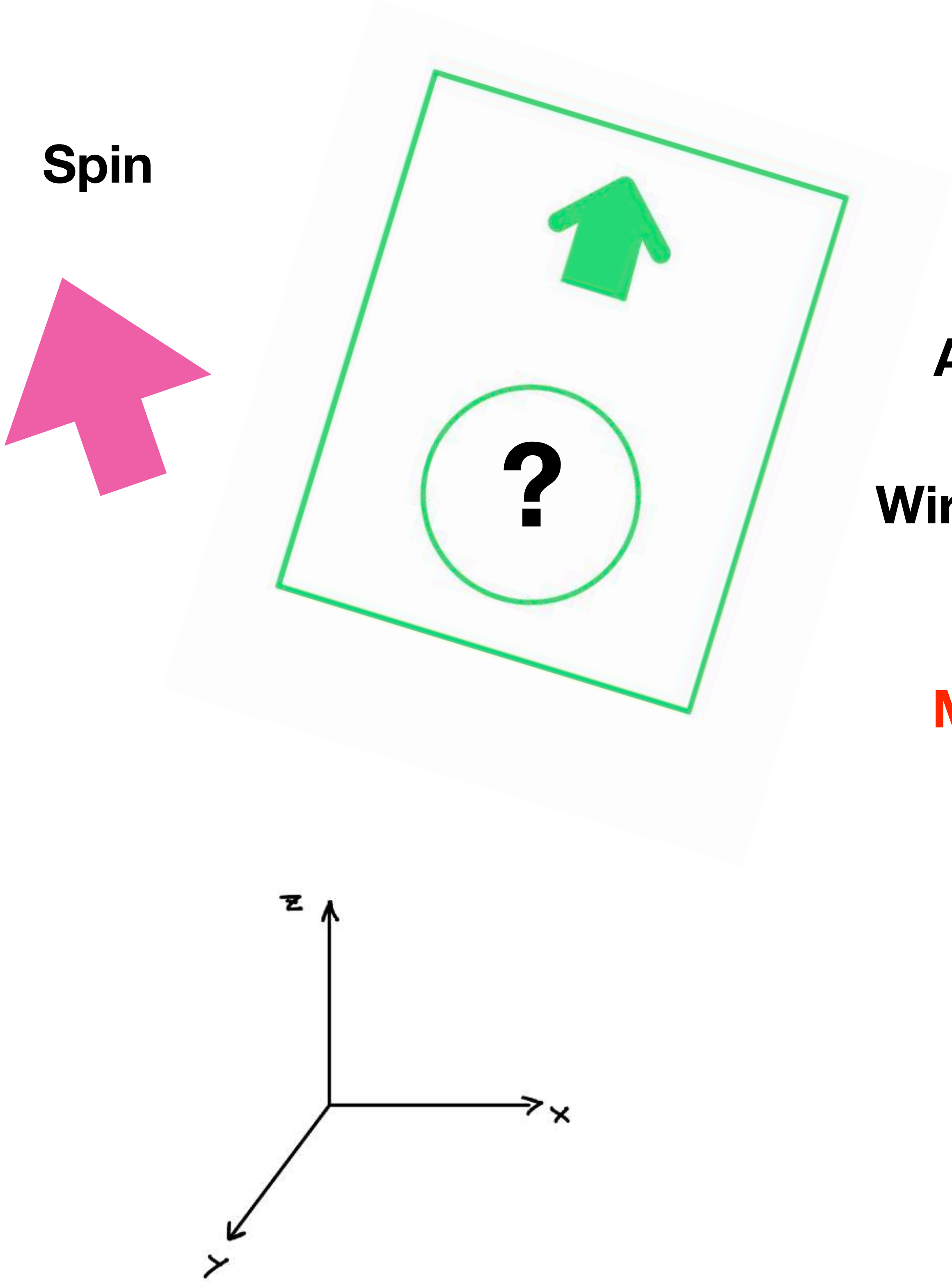
$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

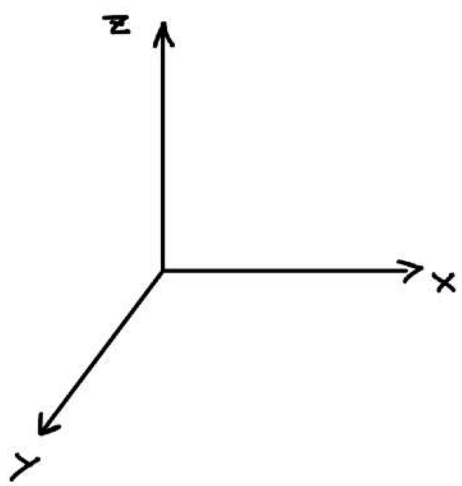
wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

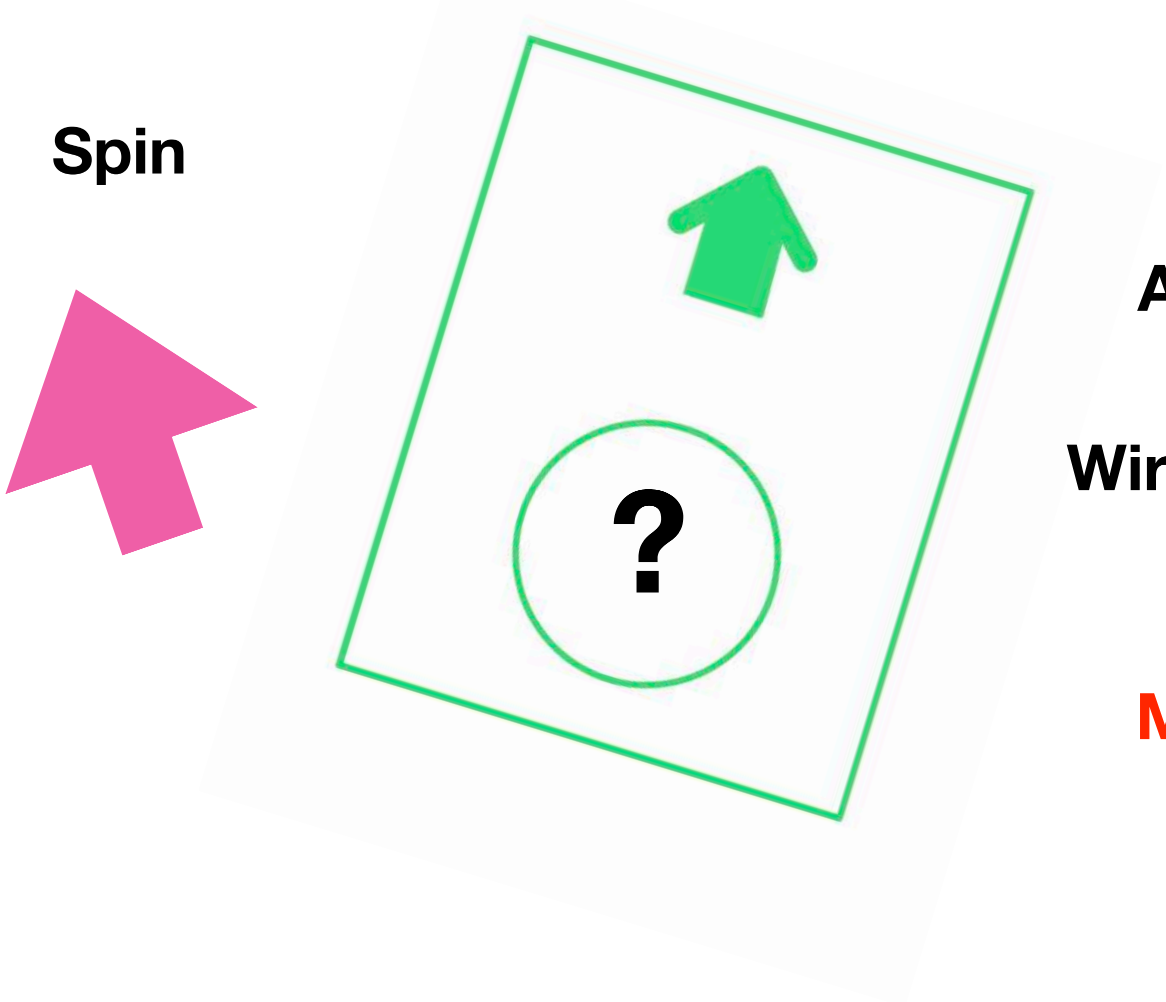
Ausgang unverhersehbar (Auvs):

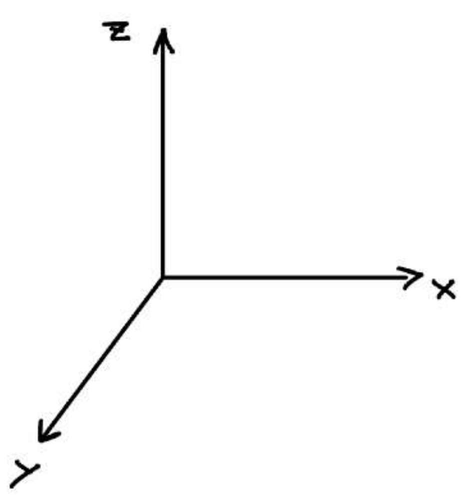
50% σ_x=+1, 50% σ_x=-1

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

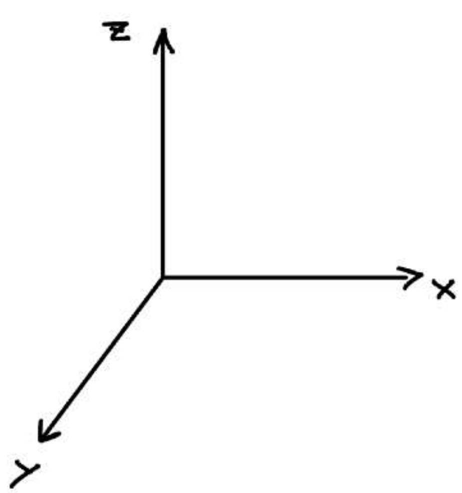
50% σ_x=+1, 50% σ_x=-1

Methode 2 (B oder A): Messe zuerst σ_x

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

50% σ_x=+1, 50% σ_x=-1

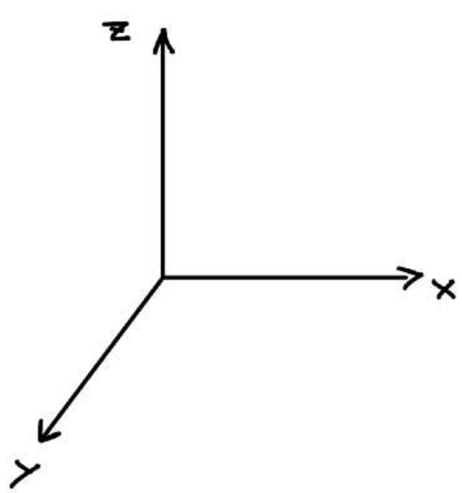
Methode 2 (B oder A): Messe zuerst σ_x

Auvs:

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

50% σ_x=+1, 50% σ_x=-1

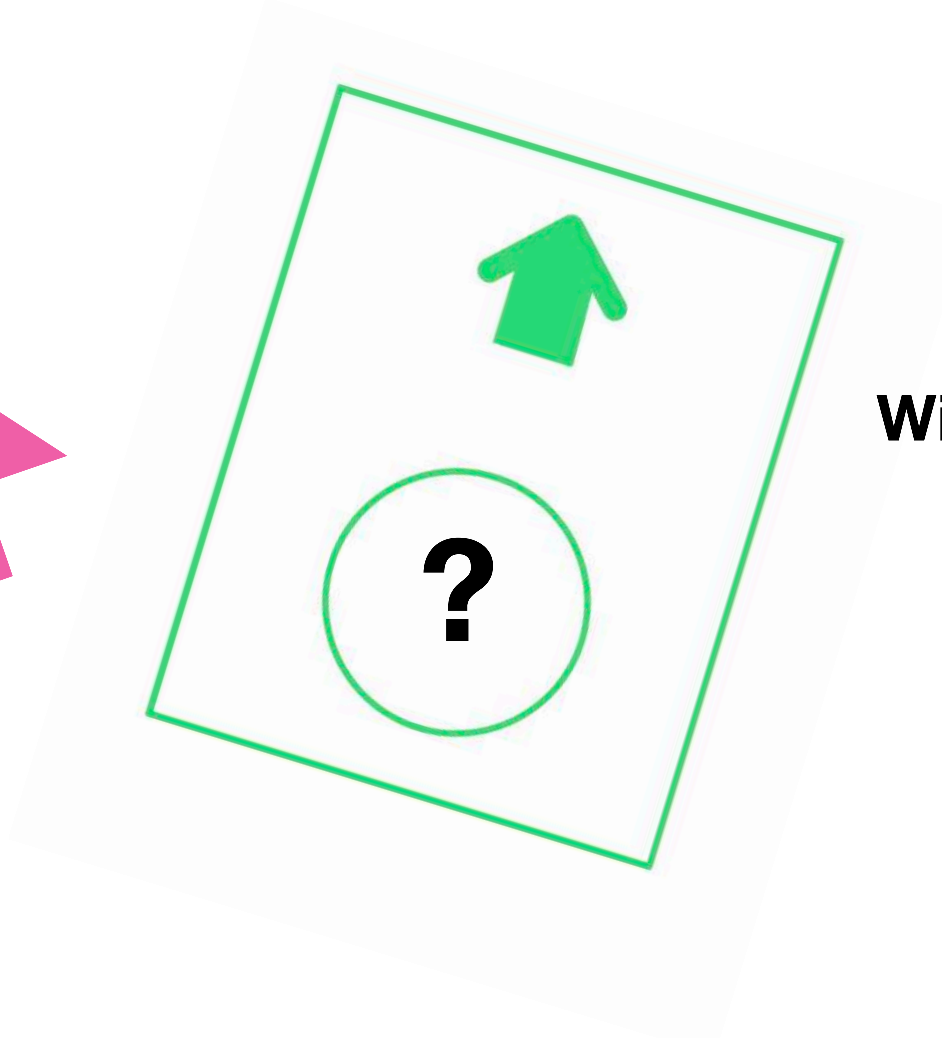
Methode 2 (B oder A): Messe zuerst σ_x

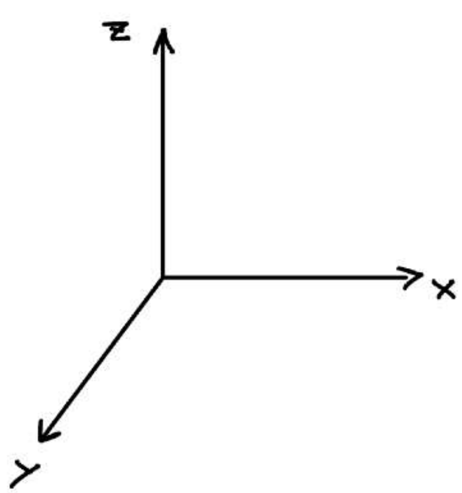
Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

50% σ_x=+1, 50% σ_x=-1

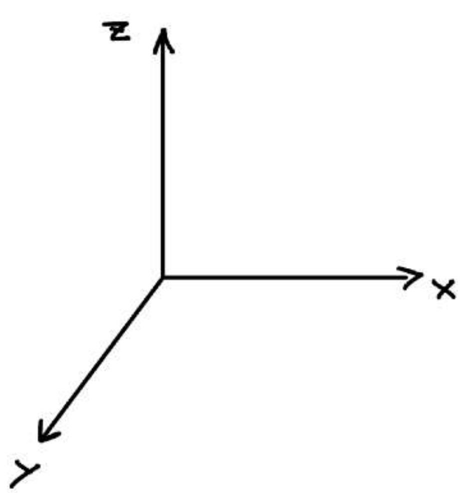
Methode 2 (B oder A): Messe zuerst σ_x

Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f und der Spin ist jetzt im Zustand $\sigma_x = -1$

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

50% σ_x=+1,   50% σ_x=-1

Methode 2 (B oder A): Messe zuerst σ_x

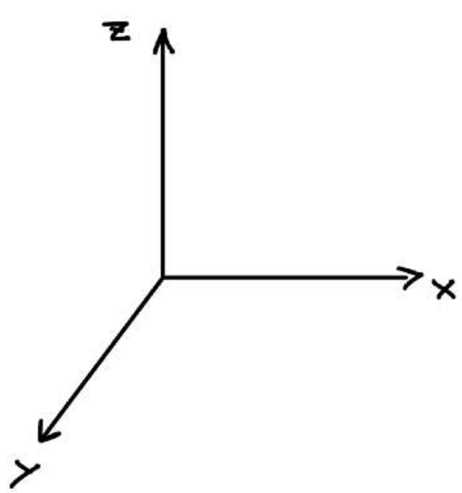
Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f und der Spin ist jetzt im Zustand $\sigma_x = -1$

Messe nun σ_z:

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

50% σ_x=+1, 50% σ_x=-1

Methode 2 (B oder A): Messe zuerst σ_x

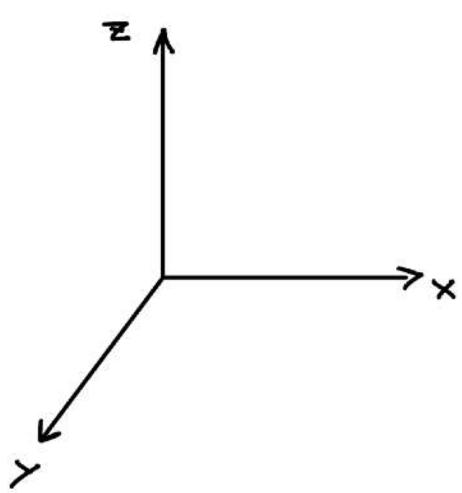
Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f und der Spin ist jetzt im Zustand $\sigma_x = -1$

Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

50% σ_x=+1, 50% σ_x=-1

Methode 2 (B oder A): Messe zuerst σ_x

Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f und der Spin ist jetzt im Zustand $\sigma_x = -1$

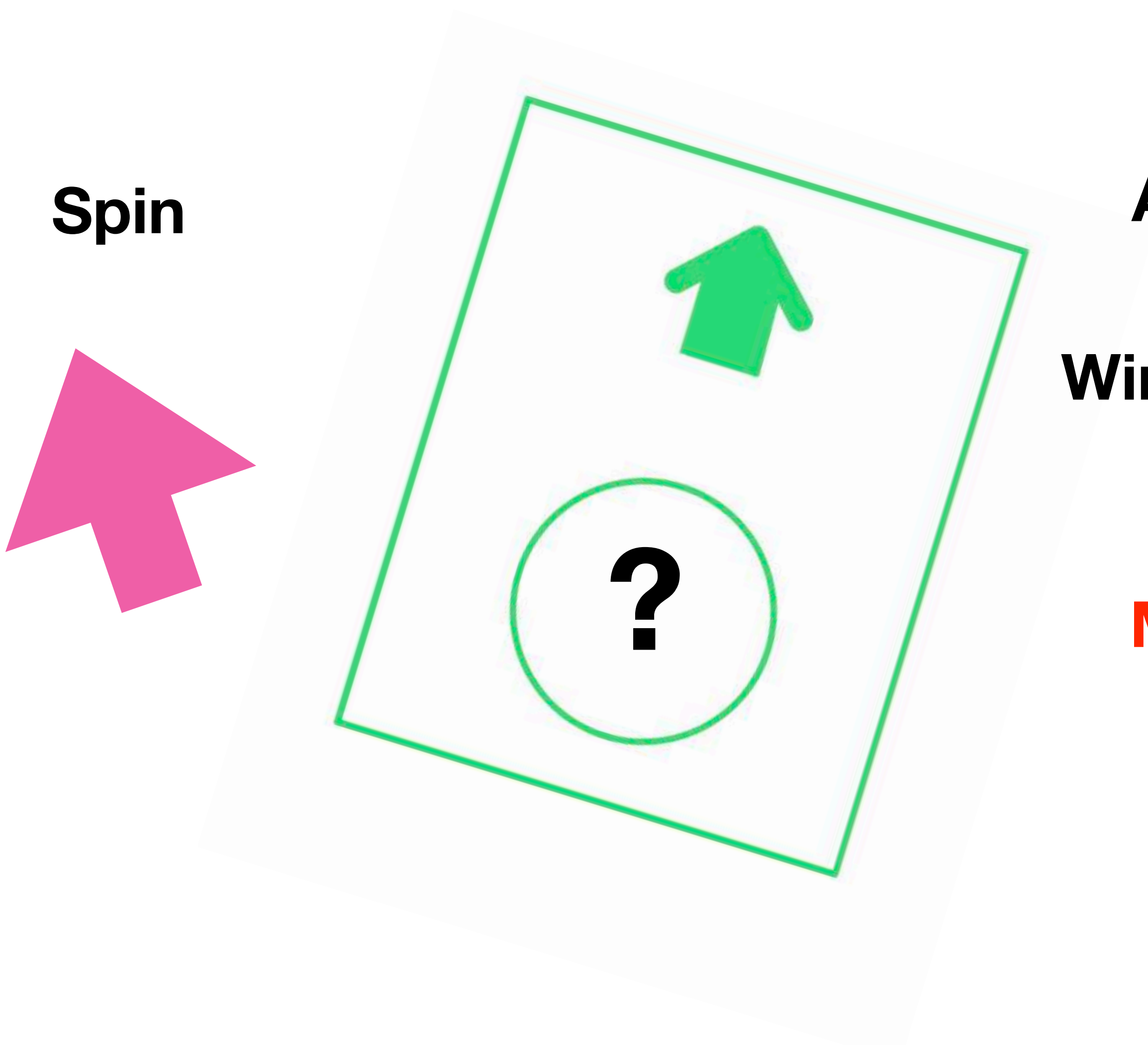
Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f

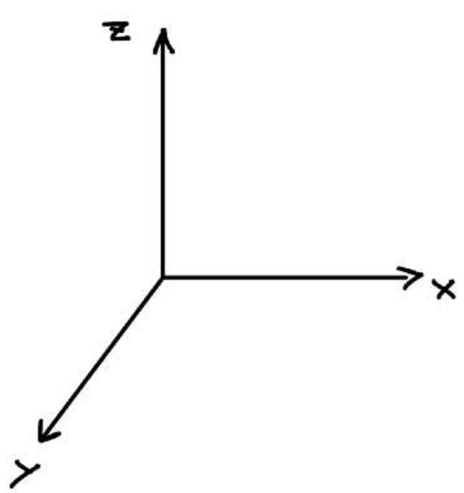
Also insgesamt 25% für f

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

50% σ_x=+1, 50% σ_x=-1

Methode 2 (B oder A): Messe zuerst σ_x

Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f und der Spin ist jetzt im Zustand $\sigma_x = -1$

Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f

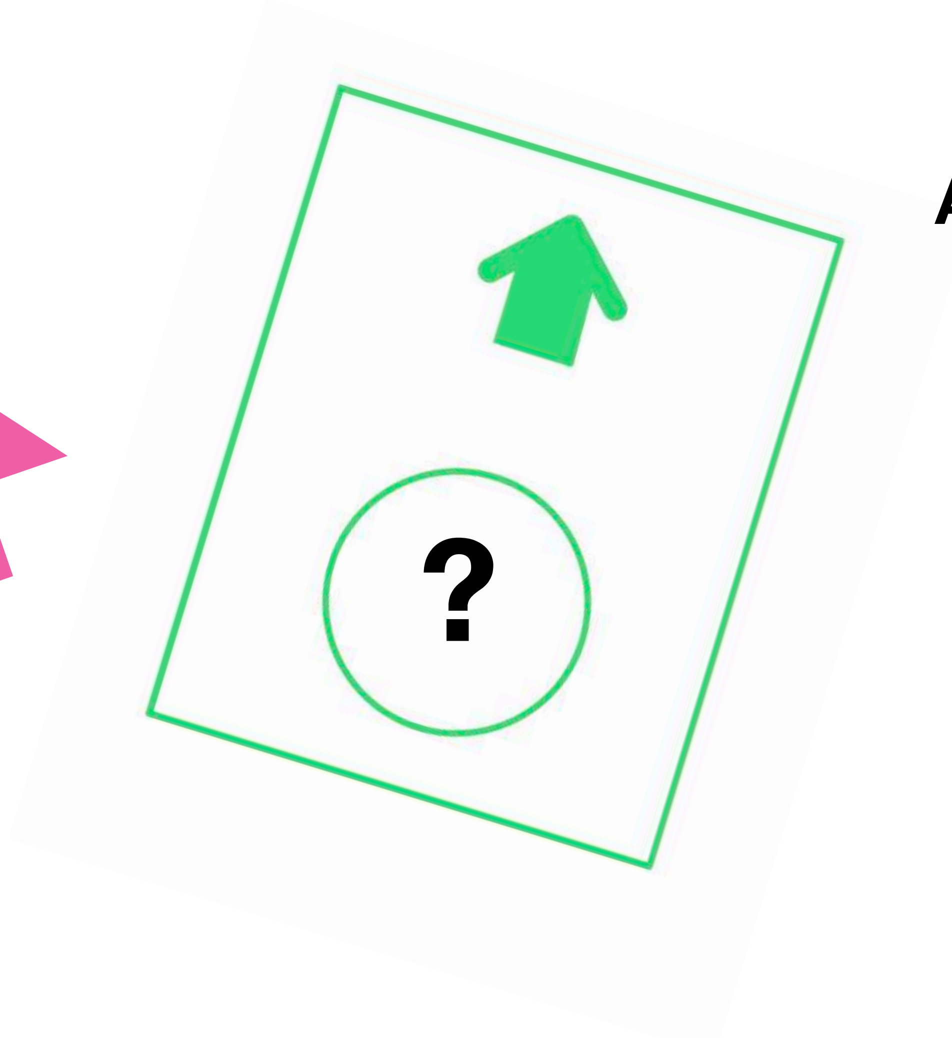
Also insgesamt 25% für f

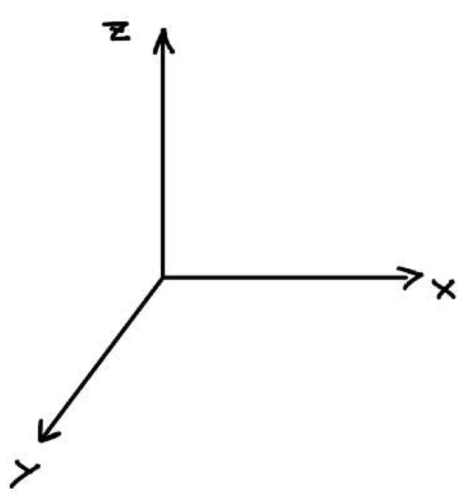
In Quanten Physik: (A oder B) $\neq$ (B oder A)

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





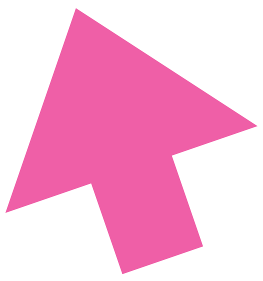
Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

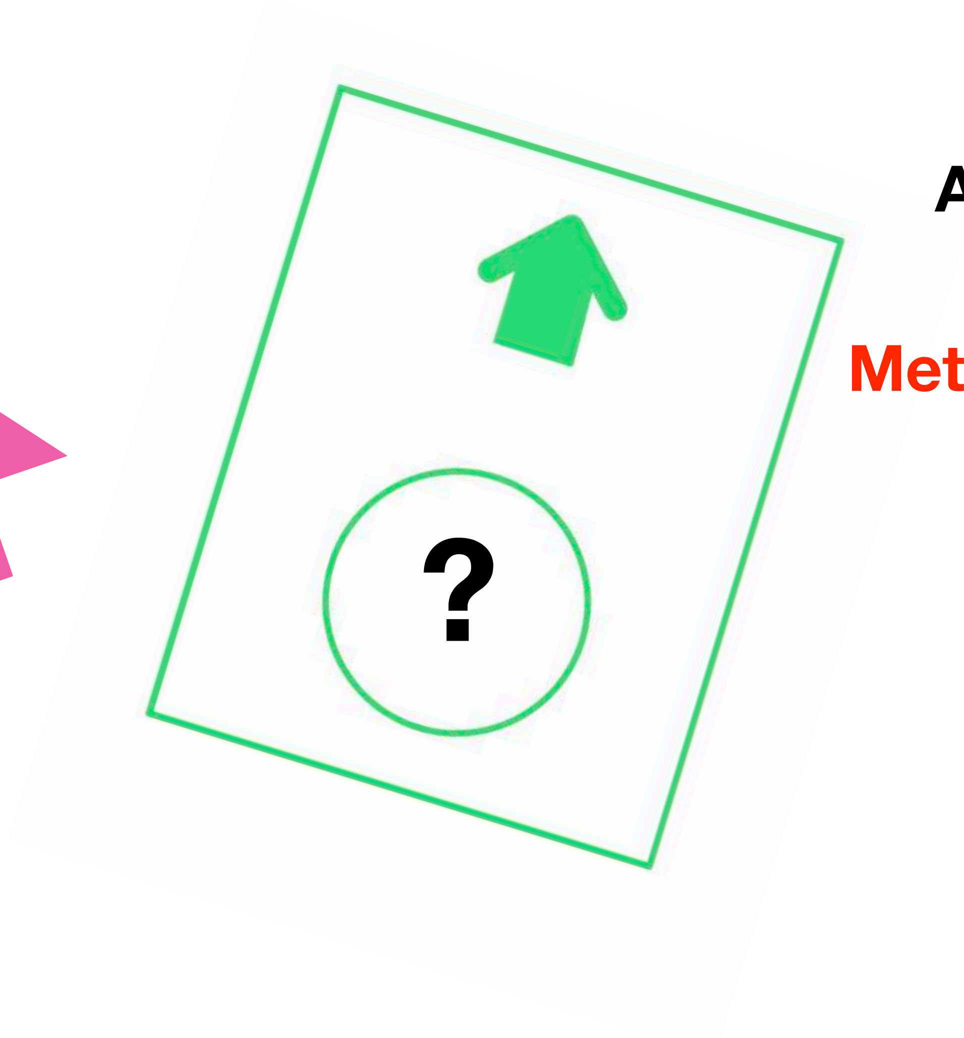
Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

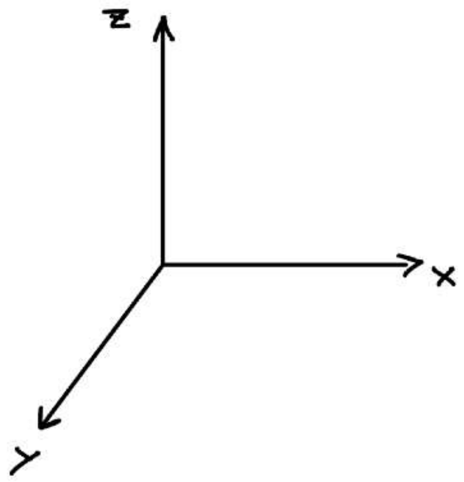
Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin







Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

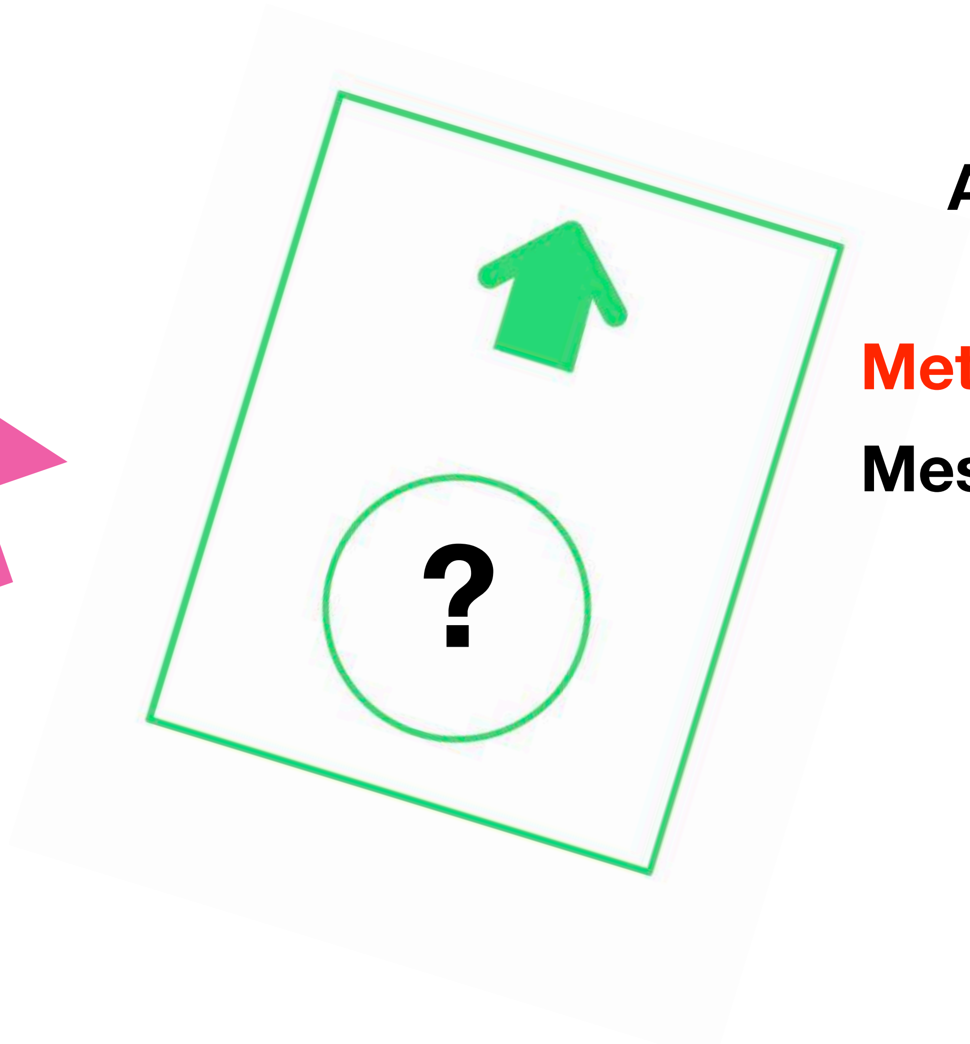
Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

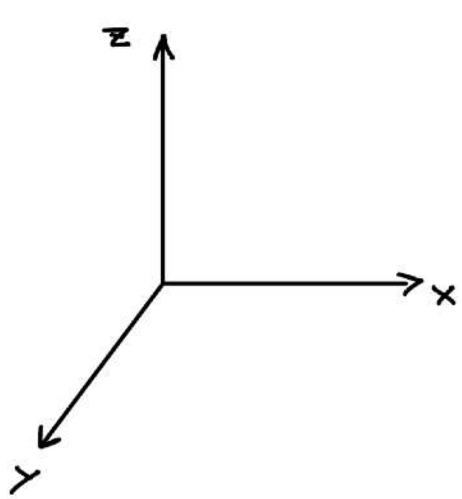
Spin



Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

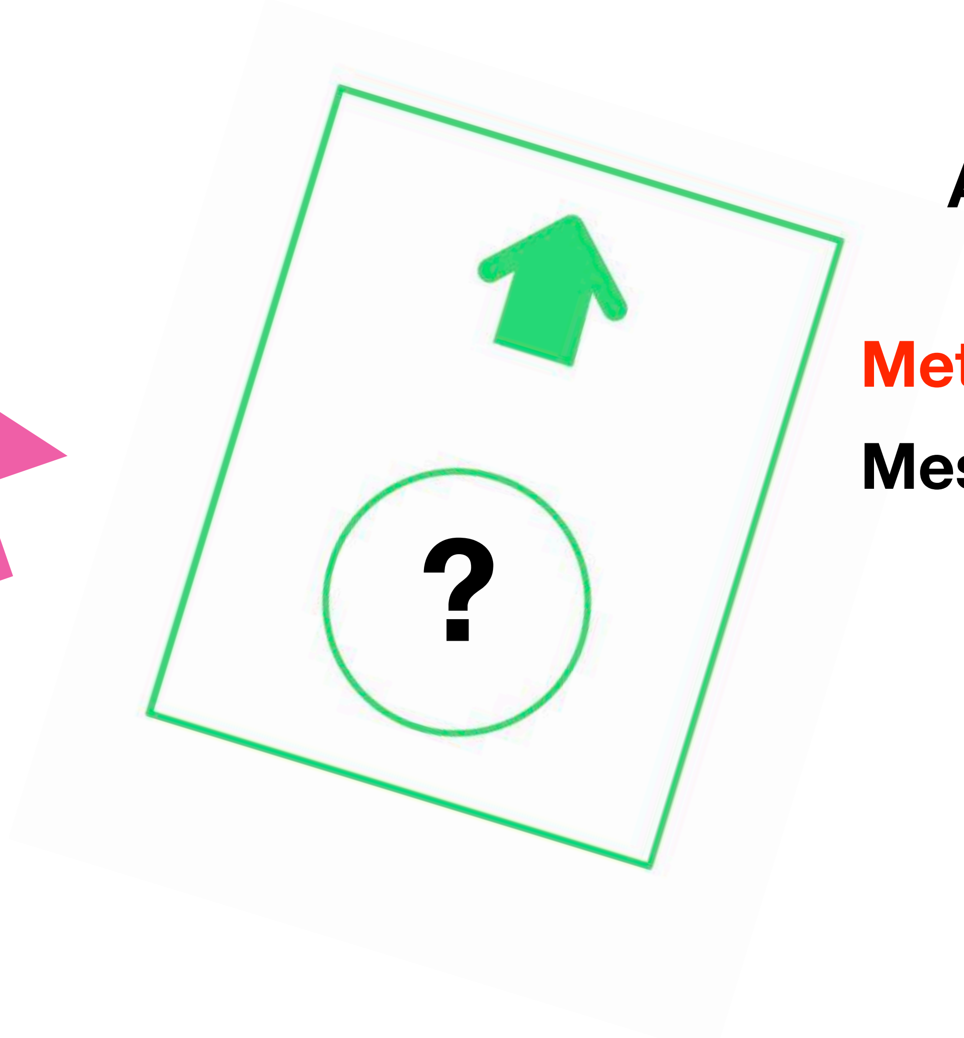
Messe σ_x:

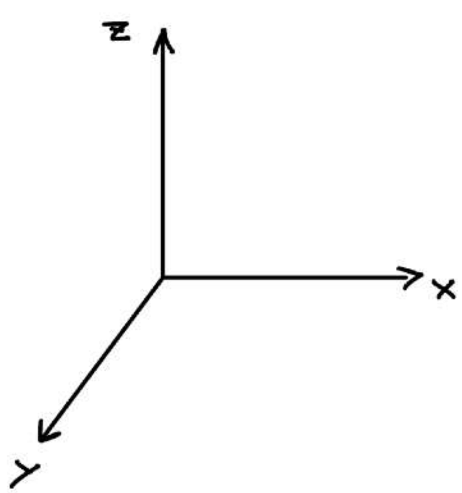


Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

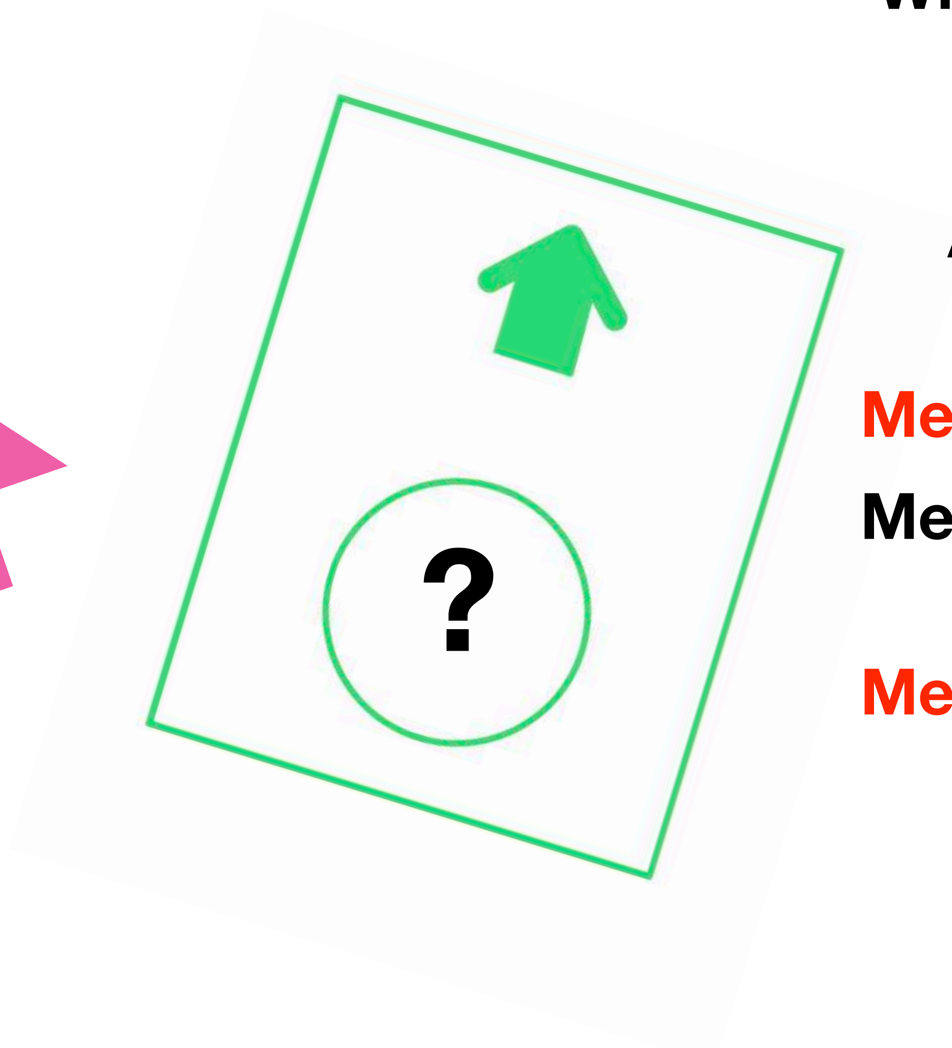
Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

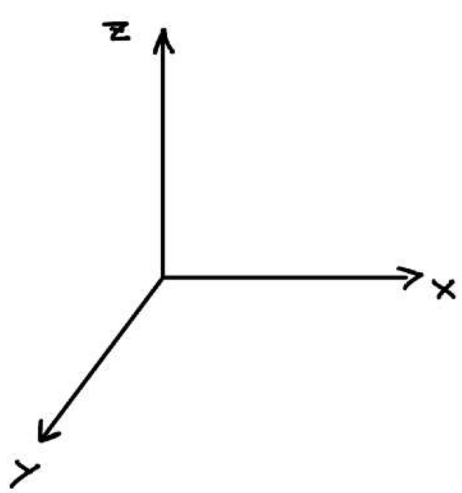
Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

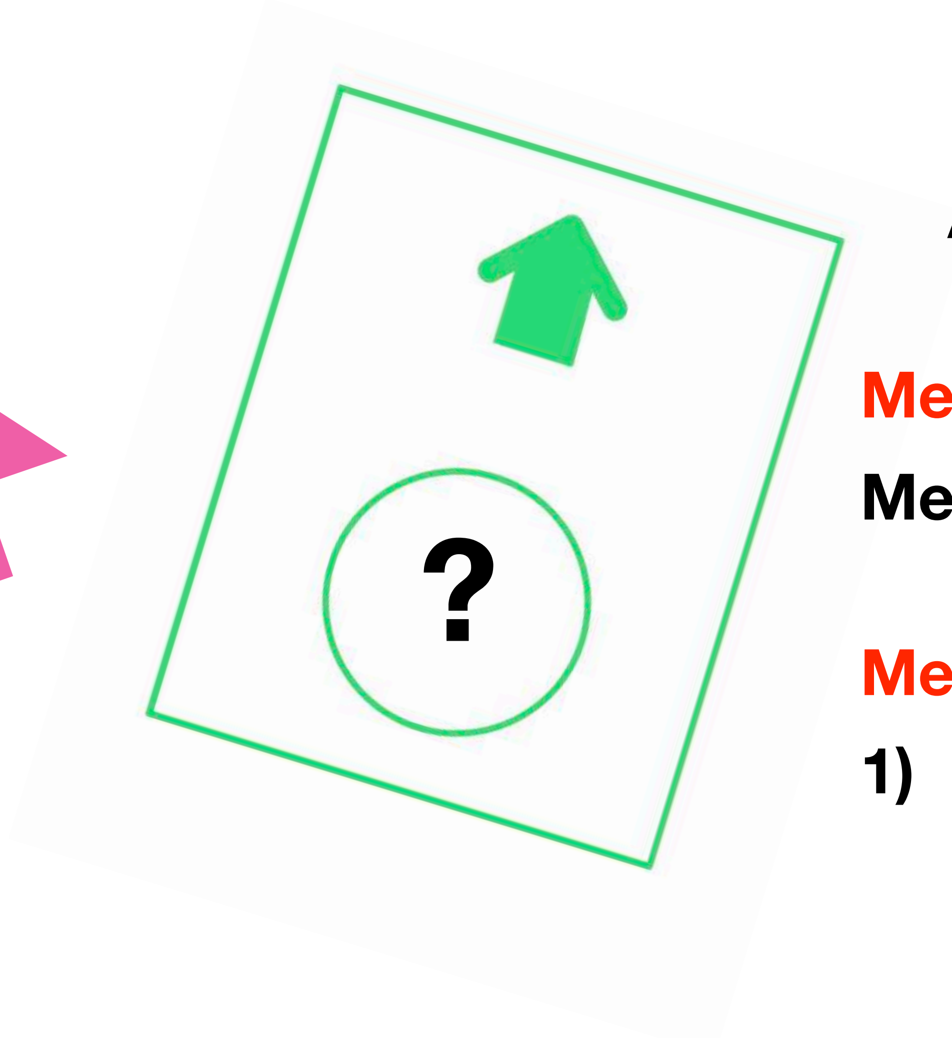
Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

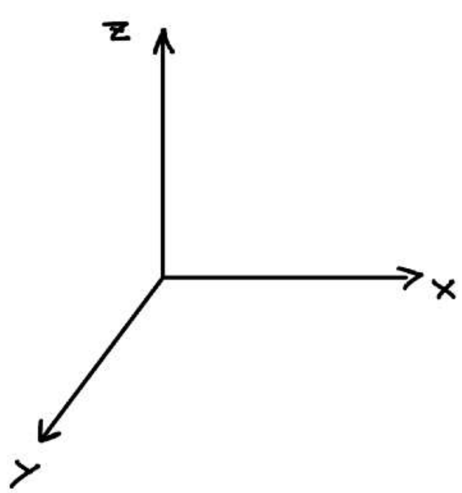
Methode 2: Messe zuerst σ_x;

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

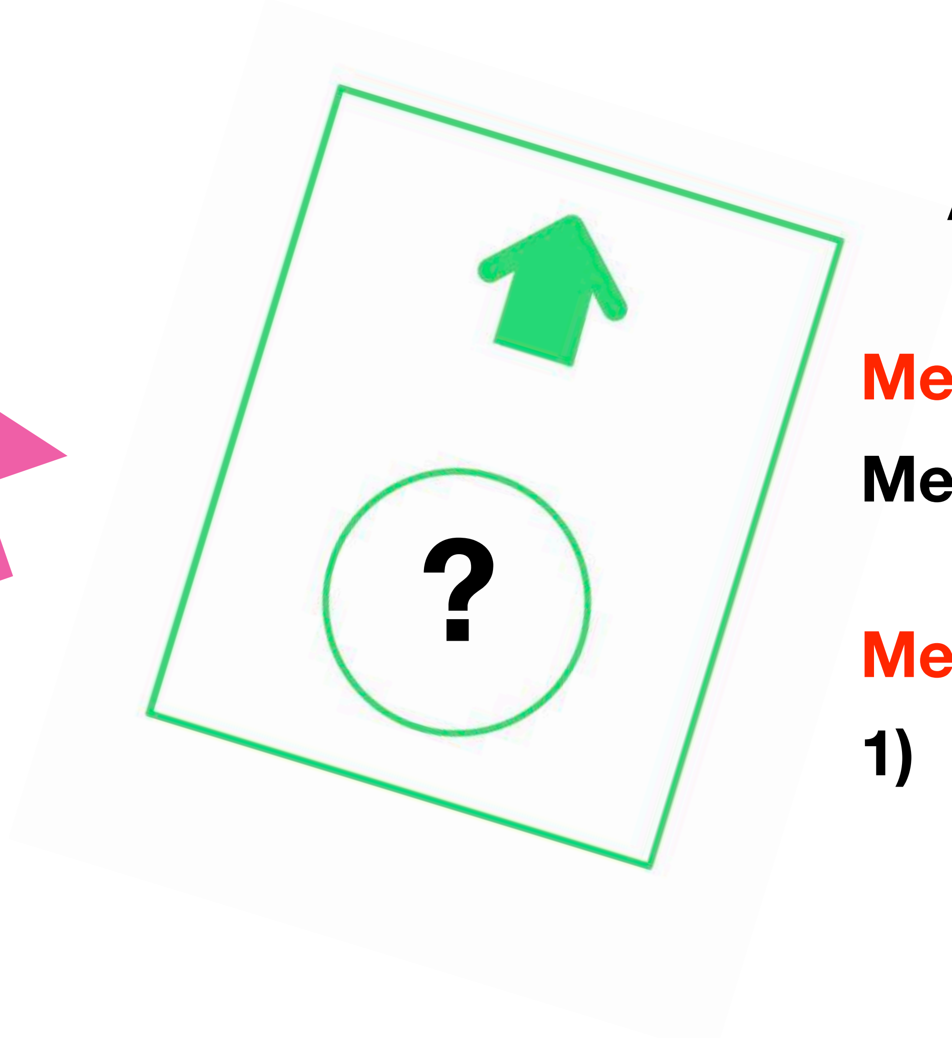
Methode 2: Messe zuerst σ_x; Auvs:

1) 50% σ_x=+1, Messe nun σ_z:

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin



Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

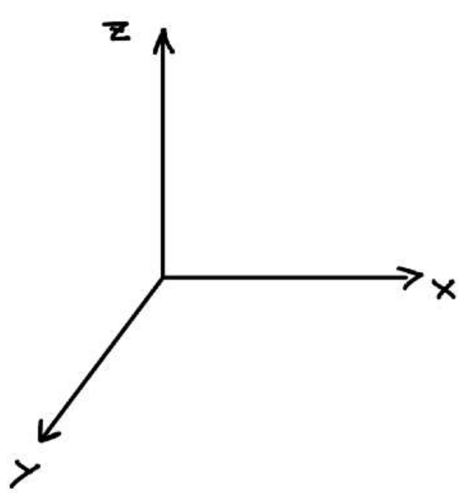
Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

Methode 2: Messe zuerst σ_x; Auvs:

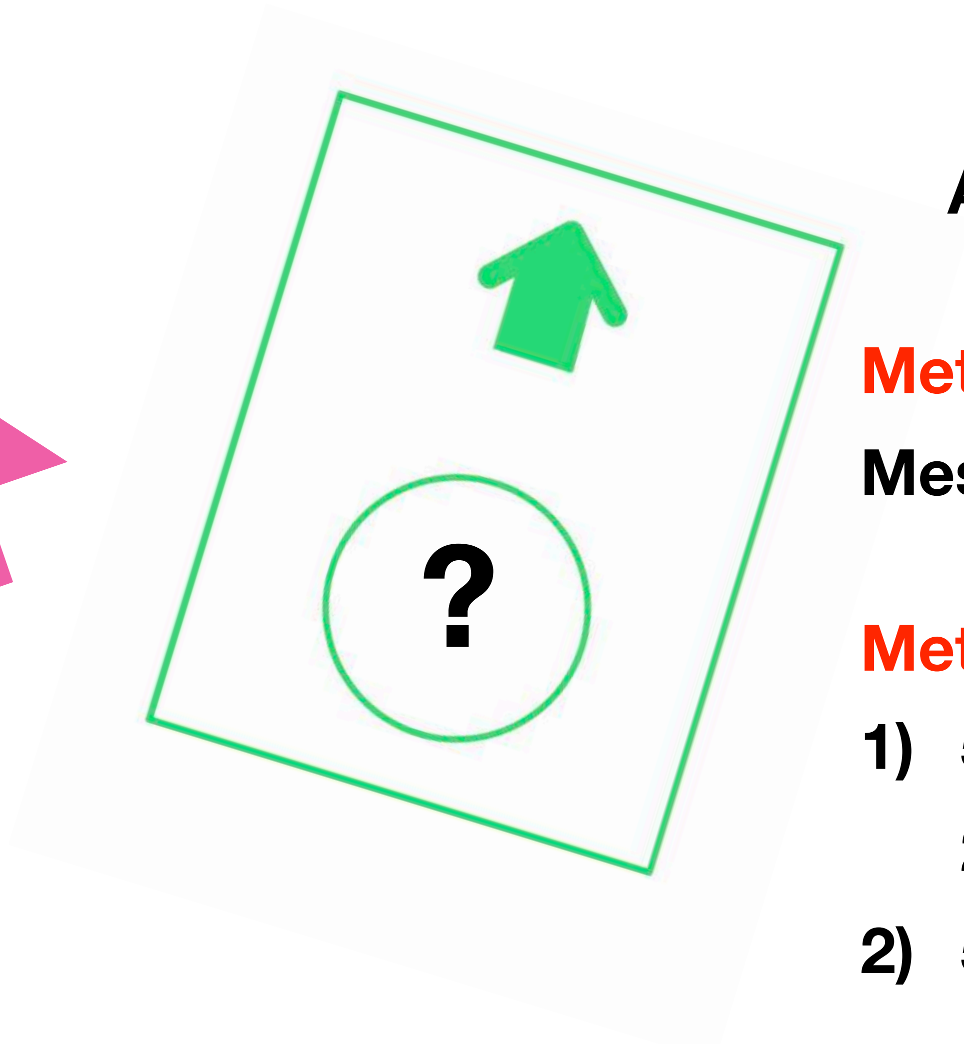
1) 50% σ_x=+1, Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f

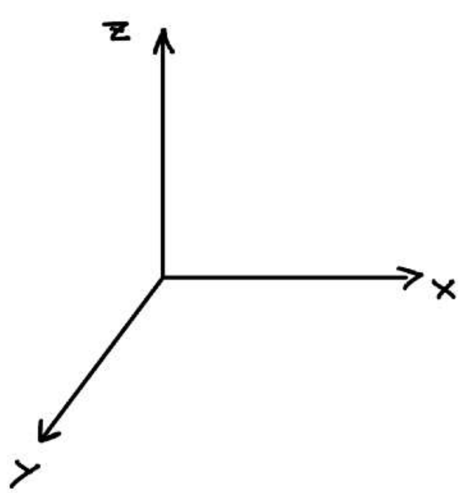


Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

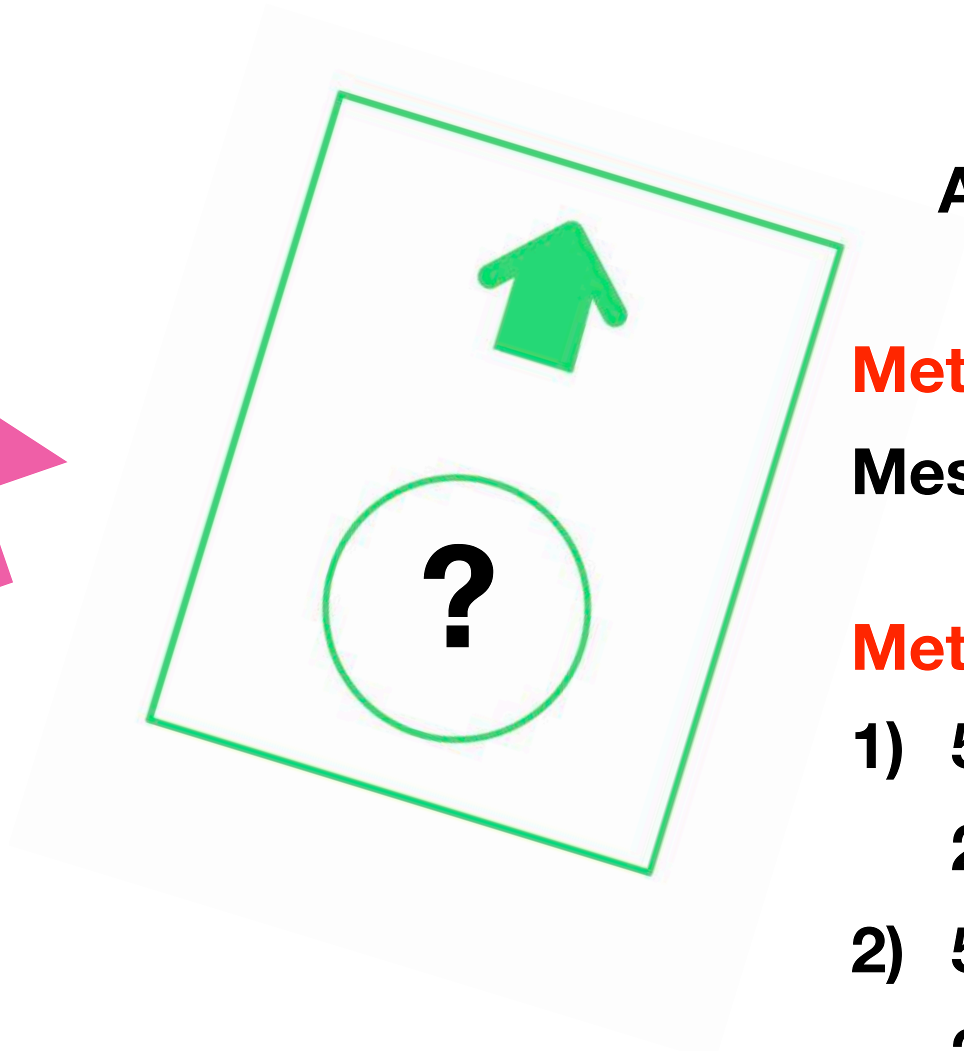
Methode 2: Messe zuerst σ_x; Auvs:

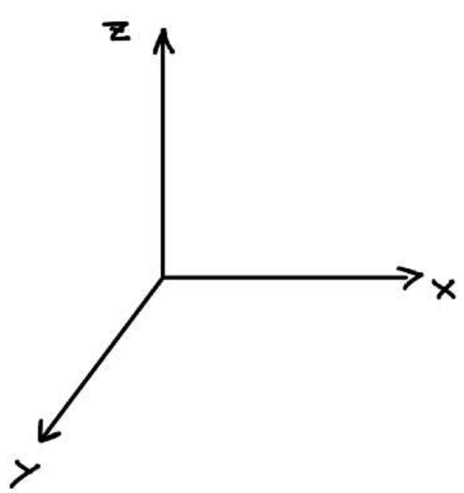
1) **50% σ_x=+1, Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f**
2) **50% σ_x=-1 Messe nun σ_z:**

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

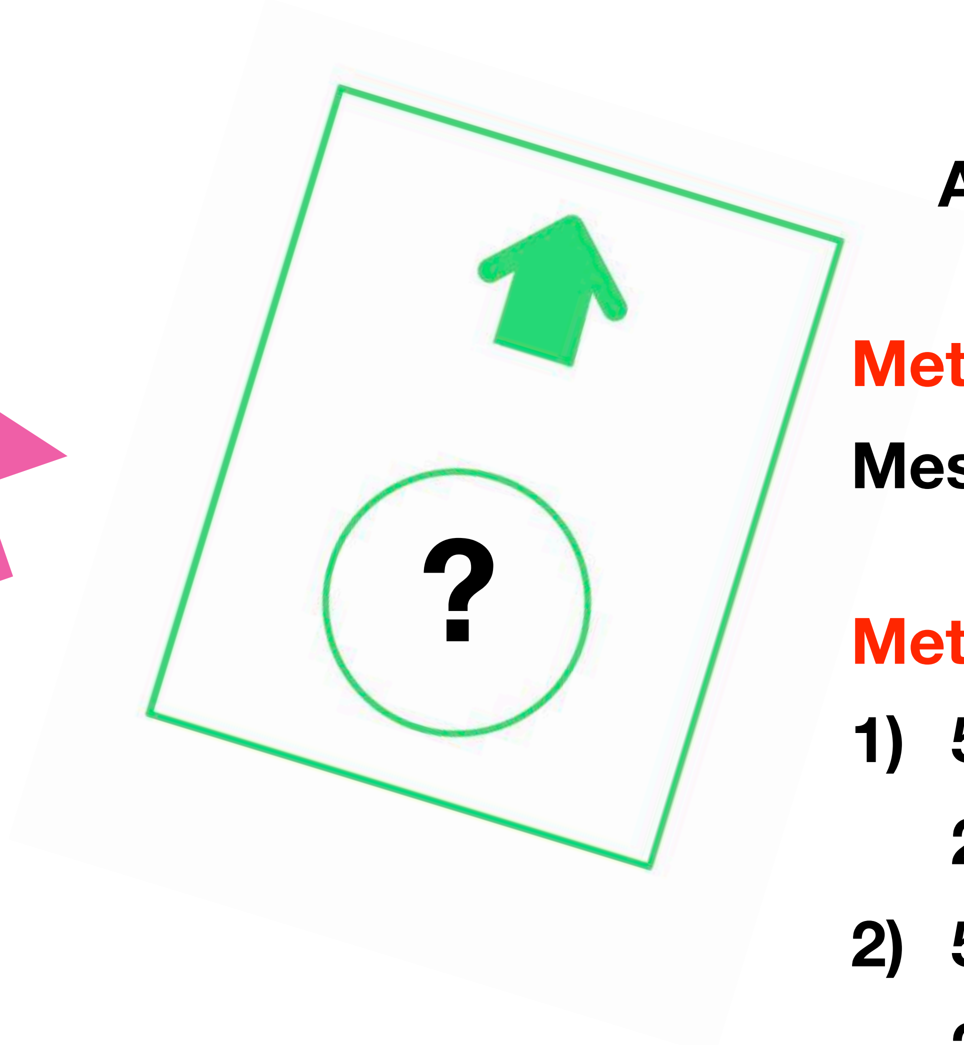
Methode 2: Messe zuerst σ_x; Auvs:

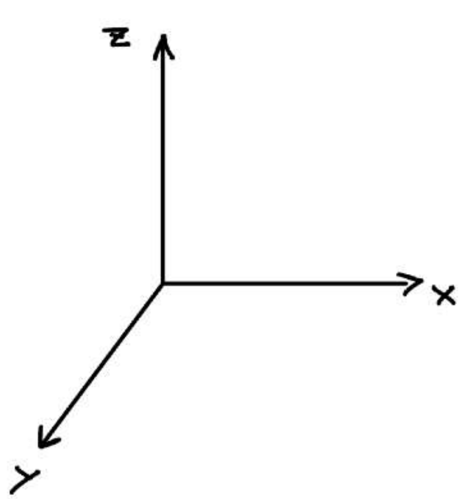
1) 50% σ_x=+1, Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f
2) 50% σ_x=-1 Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 f, 25% σ_z=-1 f

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

Methode 2: Messe zuerst σ_x; Auvs:

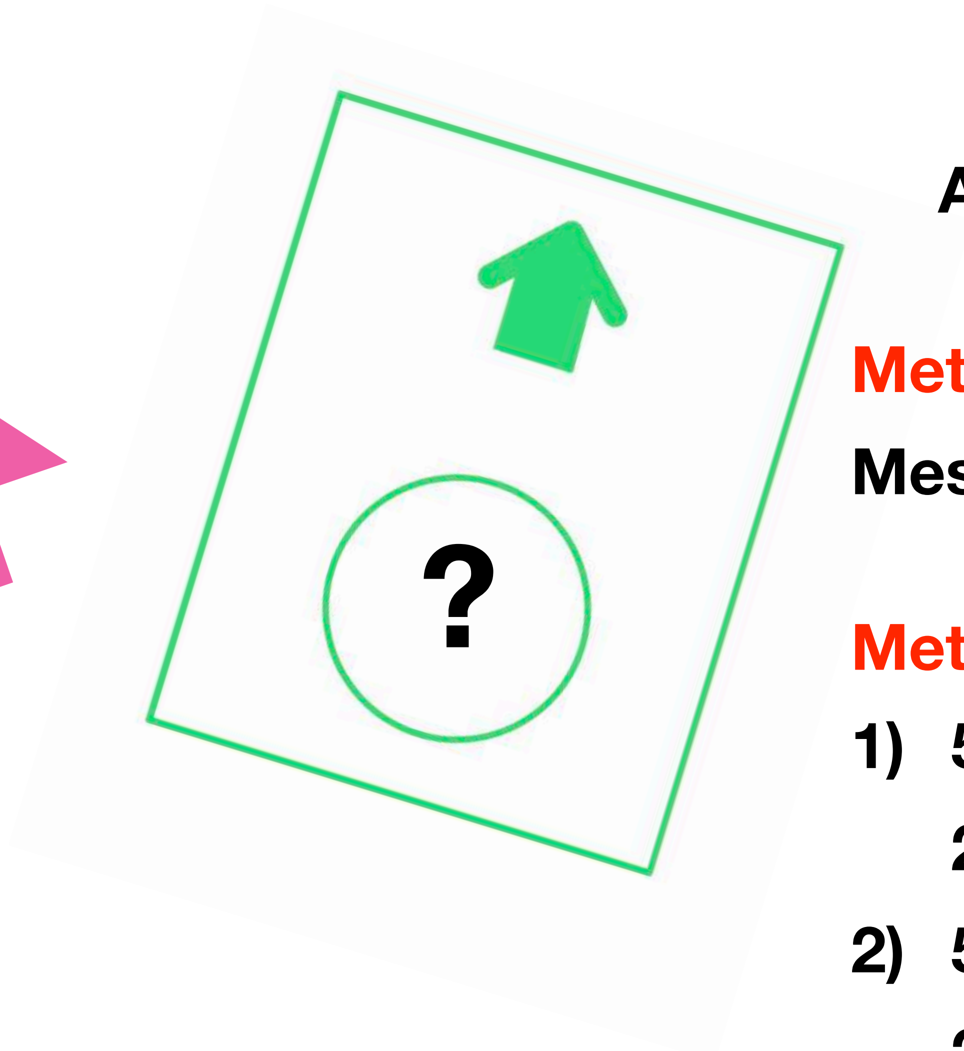
1) **50% σ_x=+1, Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f**
2) **50% σ_x=-1 Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 f, 25% σ_z=-1 f**

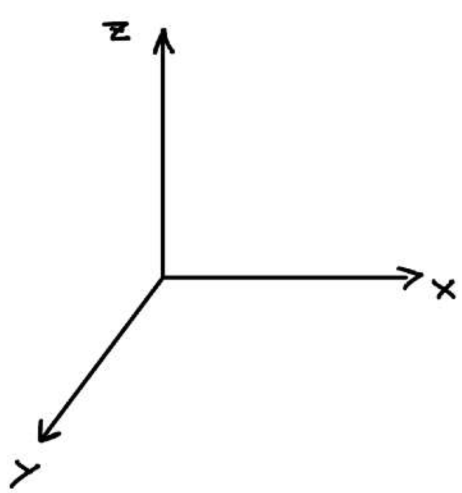
Also insgesamt 25% für w

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: **Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1**

Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

Methode 2: **Messe zuerst σ_x; Auvs:**

1) **50% σ_x=+1, Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f**
2) **50% σ_x=-1 Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 f, 25% σ_z=-1 f**

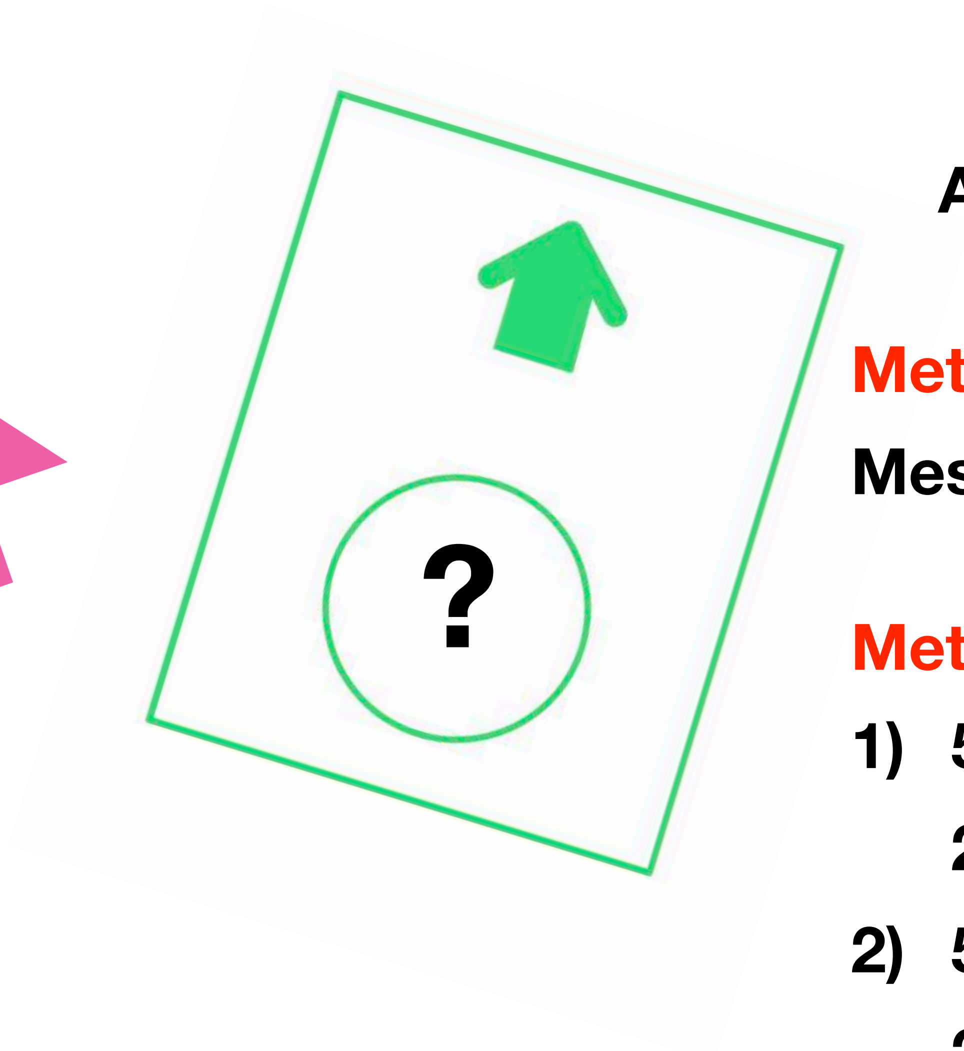
Also insgesamt 25% für w

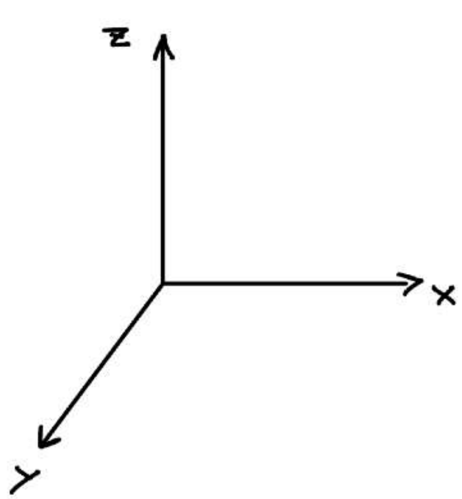
In Quanten Physik: (A und B) $\neq$ (B und A)

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

Methode 2: Messe zuerst σ_x; Auvs:

1) 50% σ_x=+1, Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f

2) 50% σ_x=-1 Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 f, 25% σ_z=-1 f

Also insgesamt 25% für w

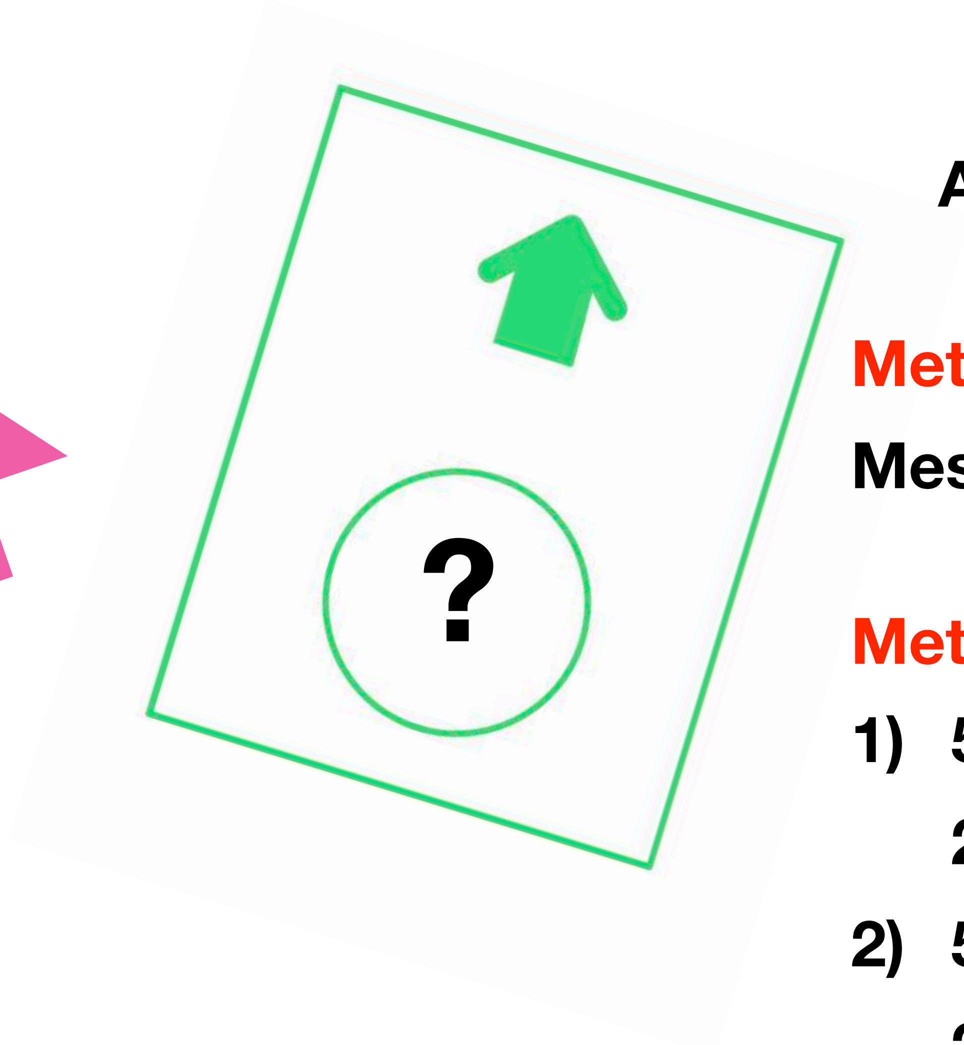
In Quanten Physik: (A und B) $\neq$ (B und A)

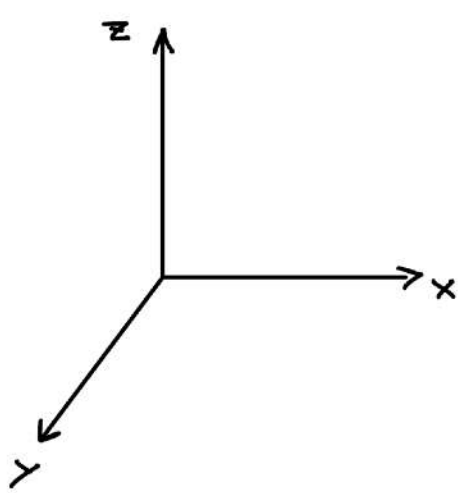
Dies ist ein erstes Beispiel für Unschärferelationen:

Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

Methode 2: Messe zuerst σ_x; Auvs:

1) **50% σ_x=+1, Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f**
2) **50% σ_x=-1 Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 f, 25% σ_z=-1 f**

Also insgesamt 25% für w

In Quanten Physik: (A und B) $\neq$ (B und A)

Dies ist ein erstes Beispiel für Unschärferelationen:
σ_x und σ_z können nicht gleichzeitig gemessen werden

Zustände

Aussagen:

Das Teilchen ist am Ort x und hat den Impuls p

Zustände

Aussagen:

Das Teilchen ist am Ort x und hat den Impuls p

Macht Sinn in klassischer Physik

Zustände

Aussagen:

Das Teilchen ist am Ort x und hat den Impuls p

Macht Sinn in klassischer Physik

Aber nicht in Quantenphysik

Zustände

Aussagen:

Das Teilchen ist am Ort x und hat den Impuls p

Macht Sinn in klassischer Physik

Aber nicht in Quantenphysik

Um das weiter zu vertiefen brauchen wir mehr Mathematik

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,....\}$

Komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,....\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,....\}$

Komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,....\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,....\}$

Rational Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z_1}{z_2} \right\}$ **mit** $z_i \in \mathbb{Z}$

Komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,....\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,....\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z_1}{z_2} \right\}$ **mit** $z_i \in \mathbb{Z}$

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} +$ **irrationale Zahlen wie** $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$

Komplexe Zahlen

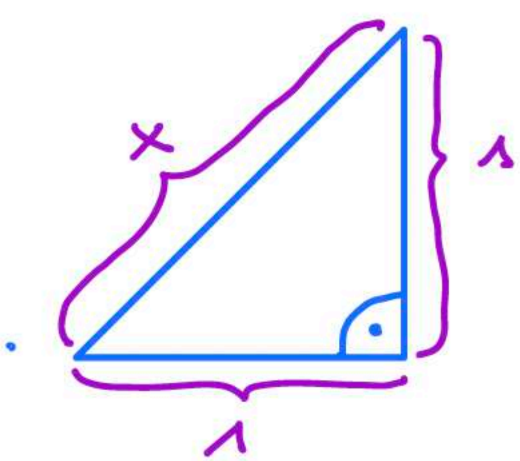
Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,....\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,....\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z_1}{z_2} \right\}$ **mit** $z_i \in \mathbb{Z}$

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q}+$**irrationale Zahlen wie** $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$



$$1^2 + 1^2 = x^2$$
$$2 = x^2$$
$$\sqrt{2} = x$$

Komplexe Zahlen

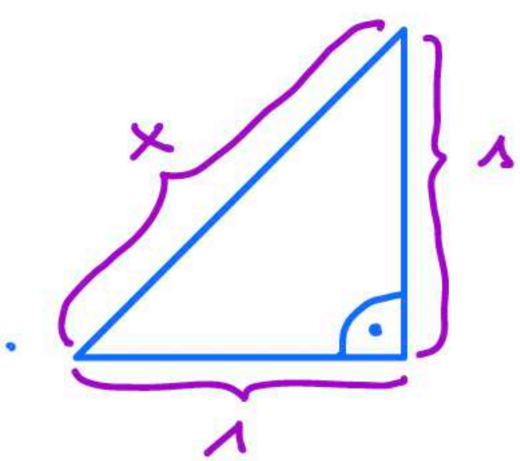
Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,....\}$

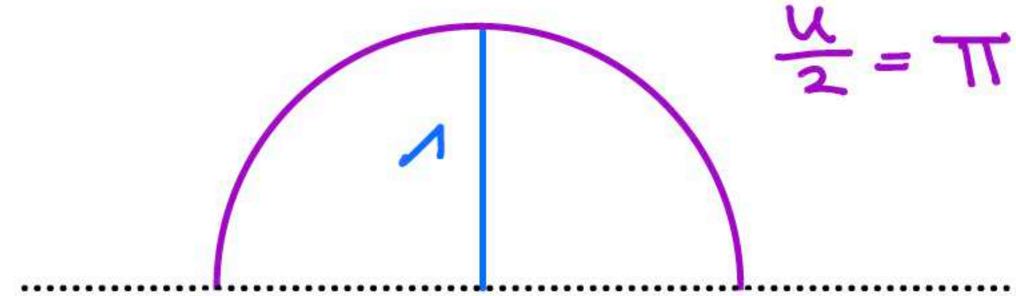
Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,....\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{z_1}{z_2} \right\}$ **mit** $z_i \in \mathbb{Z}$

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q}+$**irrationale Zahlen wie** $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$



$$1^2 + 1^2 = x^2$$
$$2 = x^2$$
$$\sqrt{2} = x$$



$$\frac{U}{2} = \pi$$

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$$x^2 - 1 = 0$$

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$$

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Definiere imaginäre Einheit i**, für die gilt** $i^2 = -1$**,**

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Definiere imaginäre Einheit i, für die gilt $i^2 = -1$, und sonst wird mit i wie mit einer gewöhnlichen Variable gerechnet

$(-i)^2$

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Definiere imaginäre Einheit i, für die gilt $i^2 = -1$, und sonst wird mit i wie mit einer gewöhnlichen Variable gerechnet

$(-i)^2 = (-1)^2(i^2)$

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Definiere imaginäre Einheit i, für die gilt $i^2 = -1$, und sonst wird mit i wie mit einer gewöhnlichen Variable gerechnet

$(-i)^2 = (-1)^2(i^2) = (+1)(-1)$

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Definiere imaginäre Einheit i, für die gilt $i^2 = -1$, und sonst wird mit i wie mit einer gewöhnlichen Variable gerechnet

$(-i)^2 = (-1)^2(i^2) = (+1)(-1) = -1$

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Definiere imaginäre Einheit i, für die gilt $i^2 = -1$, und sonst wird mit i wie mit einer gewöhnlichen Variable gerechnet

$(-i)^2 = (-1)^2(i^2) = (+1)(-1) = -1$

$x^2 + 1 = 0$

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Definiere imaginäre Einheit i, für die gilt $i^2 = -1$, und sonst wird mit i wie mit einer gewöhnlichen Variable gerechnet

$(-i)^2 = (-1)^2(i^2) = (+1)(-1) = -1$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = +i, -i$

Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Definiere imaginäre Einheit i, für die gilt $i^2 = -1$, und sonst wird mit i wie mit einer gewöhnlichen Variable gerechnet

$$(-i)^2 = (-1)^2(i^2) = (+1)(-1) = -1$$

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = +i, -i$$

Eine allgemeine komplexe Zahl lautet

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Zahlen

Addition von komplexen Zahlen

$$\left(a_1 + ib_1\right) + \left(a_2 + ib_2\right)$$

Komplexe Zahlen

Addition von komplexen Zahlen

$$\left(a_1 + ib_1\right) + \left(a_2 + ib_2\right) = \left(a_1 + a_2\right) + i\left(b_1 + b_2\right)$$

Komplexe Zahlen

Addition von komplexen Zahlen

$$\left(a_1 + ib_1\right) + \left(a_2 + ib_2\right) = \left(a_1 + a_2\right) + i\left(b_1 + b_2\right)$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

$$\left(a_1 + ib_1\right) \cdot \left(a_2 + ib_2\right)$$

Komplexe Zahlen

Addition von komplexen Zahlen

$$\left(a_1 + ib_1\right) + \left(a_2 + ib_2\right) = \left(a_1 + a_2\right) + i\left(b_1 + b_2\right)$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

$$\left(a_1 + ib_1\right) \cdot \left(a_2 + ib_2\right) = a_1 \cdot \left(a_2 + ib_2\right) + ib_1 \cdot \left(a_2 + ib_2\right)$$

Komplexe Zahlen

Addition von komplexen Zahlen

$$\left(a_1 + ib_1\right) + \left(a_2 + ib_2\right) = \left(a_1 + a_2\right) + i\left(b_1 + b_2\right)$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

$$\begin{aligned}\left(a_1 + ib_1\right) \cdot \left(a_2 + ib_2\right) &= a_1 \cdot \left(a_2 + ib_2\right) + ib_1 \cdot \left(a_2 + ib_2\right) \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Addition von komplexen Zahlen

$$\left(a_1 + ib_1\right) + \left(a_2 + ib_2\right) = \left(a_1 + a_2\right) + i\left(b_1 + b_2\right)$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

$$\begin{aligned}\left(a_1 + ib_1\right) \cdot \left(a_2 + ib_2\right) &= a_1 \cdot \left(a_2 + ib_2\right) + ib_1 \cdot \left(a_2 + ib_2\right) \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 \\ &= \left(a_1a_2 - b_1b_2\right) + i\left(a_1b_2 + b_1a_2\right)\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

Damit folgt: $zz^* = \left(a + ib\right)\left(a - ib\right)$

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

Damit folgt: $zz^* = \left(a + ib\right)\left(a - ib\right) = a^2 - i^2b^2$

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

Damit folgt: $zz^* = \left(a + ib\right)\left(a - ib\right) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

Damit folgt: $zz^* = \left(a + ib\right)\left(a - ib\right) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$

Stellen Sie $\dfrac{1}{3 + 4i}$ **in der Standardform einer komplexen Zahl dar,** $z = \left(a + ib\right)$

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

Damit folgt: $zz^* = \left(a + ib\right)\left(a - ib\right) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Stellen Sie $\dfrac{1}{3 + 4i}$ **in der Standardform einer komplexen Zahl dar,** $z = \left(a + ib\right)$

$$\frac{1}{3 + 4i}$$

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

Damit folgt: $zz^* = \left(a + ib\right)\left(a - ib\right) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Stellen Sie $\dfrac{1}{3+4i}$ **in der Standardform einer komplexen Zahl dar,** $z = \left(a + ib\right)$

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\frac{3-4i}{3-4i}$$

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

Damit folgt: $zz^* = \left(a + ib\right)\left(a - ib\right) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Stellen Sie $\dfrac{1}{3+4i}$ **in der Standardform einer komplexen Zahl dar,** $z = \left(a + ib\right)$

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\,\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{3^2+4^2}$$

Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

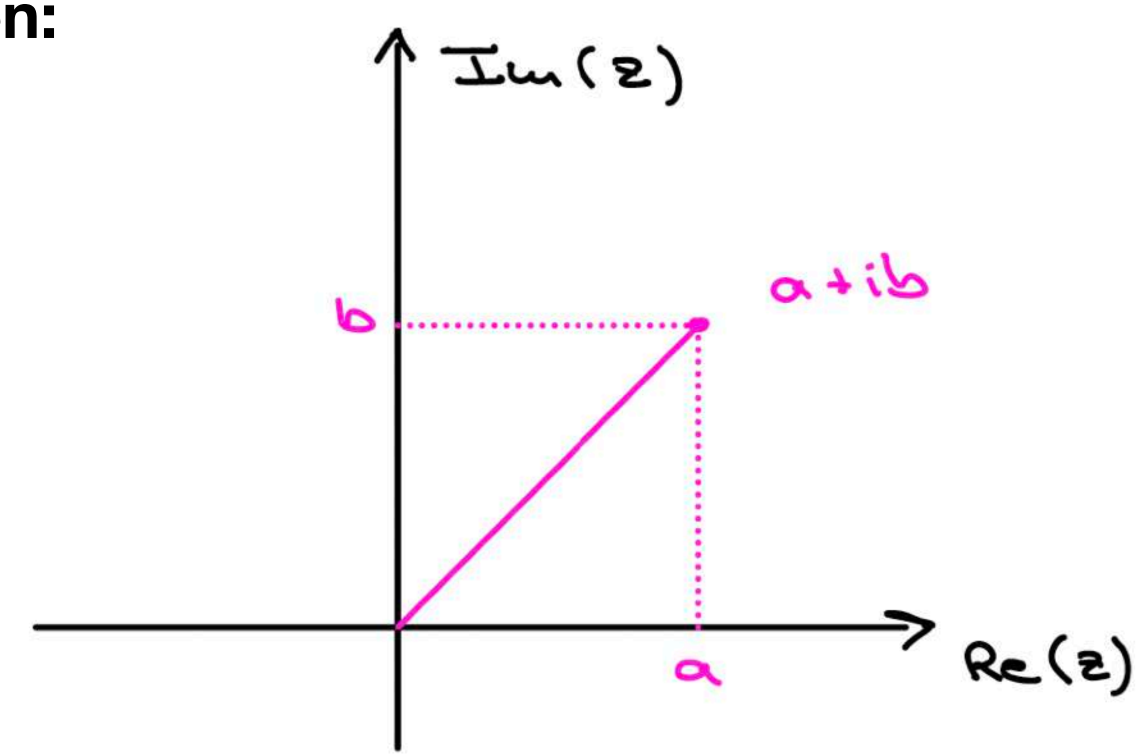
Damit folgt: $zz^* = \left(a + ib\right)\left(a - ib\right) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Stellen Sie $\dfrac{1}{3 + 4i}$ **in der Standardform einer komplexen Zahl dar,** $z = \left(a + ib\right)$

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$$

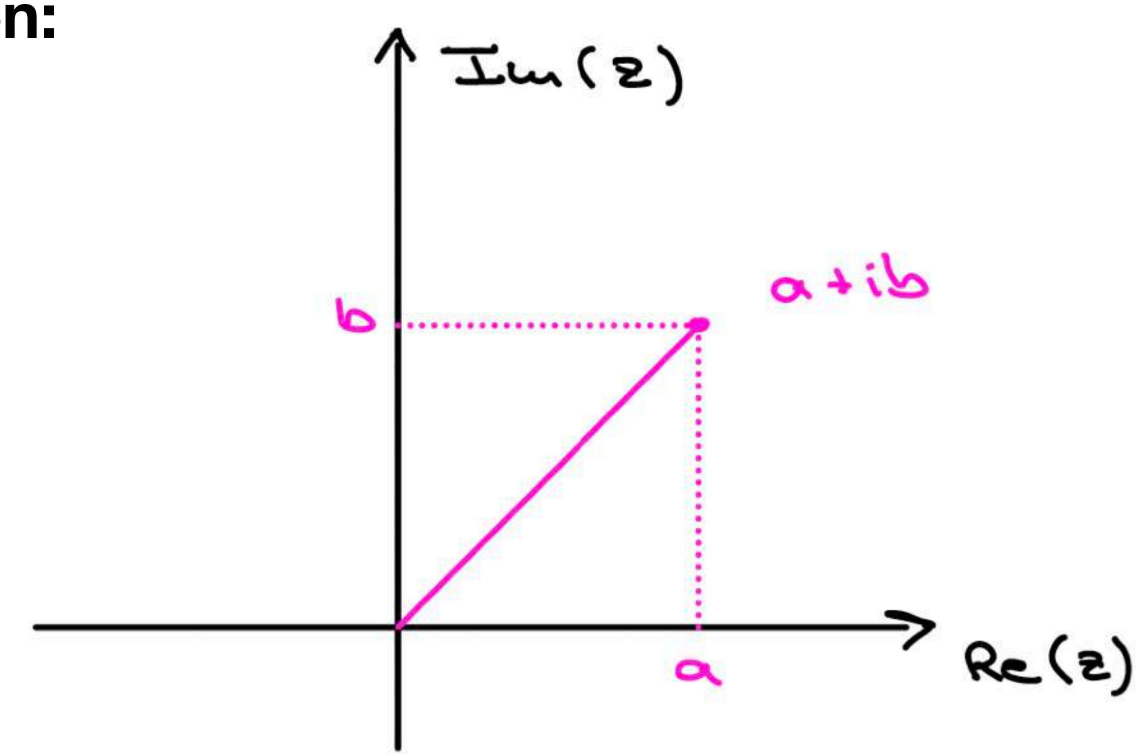
Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = (a + ib)$ **kann auch in der 2-dimensionalen Ebene dargestellt werden:**

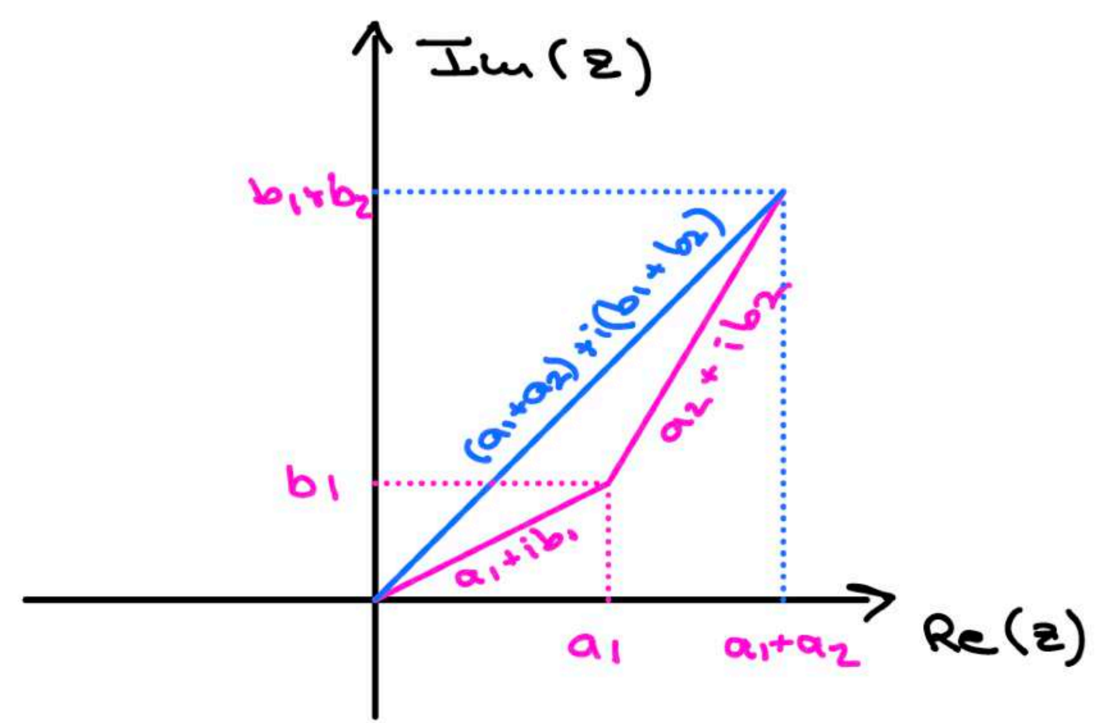


Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **kann auch in der 2-dimensionalen Ebene dargestellt werden:**



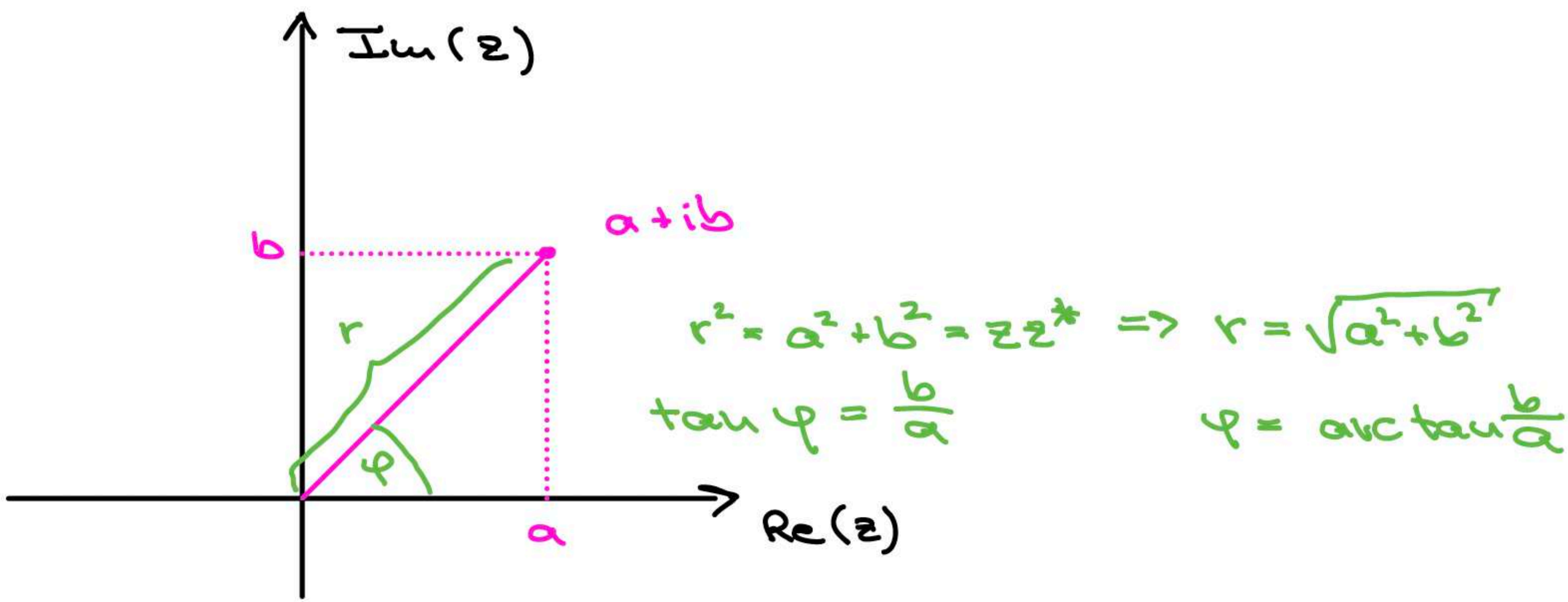
Der Addition von zwei komplexen Zahlen entspricht dann die Vektoraddition



Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = (a + ib)$ **kann auch eindeutig durch seinen Betrag** r **und den Winkel** φ **in der komplexen Ebene dargestellt werden:**

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \equiv re^{i\varphi}$$



Komplexe Zahlen

Der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen kann einfach in der Polardarstellung $z = a + ib \equiv re^{i\varphi}$ **durchgeführt werden**

Komplexe Zahlen

Der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen kann einfach in der Polardarstellung $z = a + ib \equiv re^{i\varphi}$ **durchgeführt werden**

$$\left(a_1 + ib_1\right) \cdot \left(a_2 + ib_2\right) = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Komplexe Zahlen

Der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen kann einfach in der Polardarstellung $z = a + ib \equiv re^{i\varphi}$ **durchgeführt werden**

$$\left(a_1 + ib_1\right) \cdot \left(a_2 + ib_2\right) = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Die komplex konjugierte Zahl lautet

$$z^* = a - ib \equiv re^{-i\varphi}$$

Komplexe Zahlen

Der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen kann einfach in der Polardarstellung $z = a + ib \equiv re^{i\varphi}$ durchgeführt werden

$$\left(a_1 + ib_1\right) \cdot \left(a_2 + ib_2\right) = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Die komplex konjugierte Zahl lautet

$$z^* = a - ib \equiv re^{-i\varphi}$$

Der Betrag einer Zahl kann dann wie folgt definiert werden

$$r^2 = zz^* = re^{i\varphi} re^{-i\varphi} = r^2$$

Komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,....\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,....\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z_1}{z_2} \right\}$ **mit** $z_i \in \mathbb{Z}$

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q}+$**irrationale Zahlen wie** $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$

Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{a + ib; a, b \in \mathbb{R}\}$

Vektorräume

Die zwei dimensionale Ebene kann man sich auch als Vektorraum vorstellen.

Vektorräume

Die zwei dimensionale Ebene kann man sich auch als Vektorraum vorstellen.

Jedem Punkt $P = (x_P, y_P)$ **mit den Koordinaten** x_P **und** y_P

Vektorräume

Die zwei dimensionale Ebene kann man sich auch als Vektorraum vorstellen.

Jedem Punkt $P = (x_P, y_P)$ mit den Koordinaten x_P und y_P ist eindeutig ein Vektor

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

zugeordnet, den man sich als Pfeil vom Ursprung zum Punkt P vorstellen kann

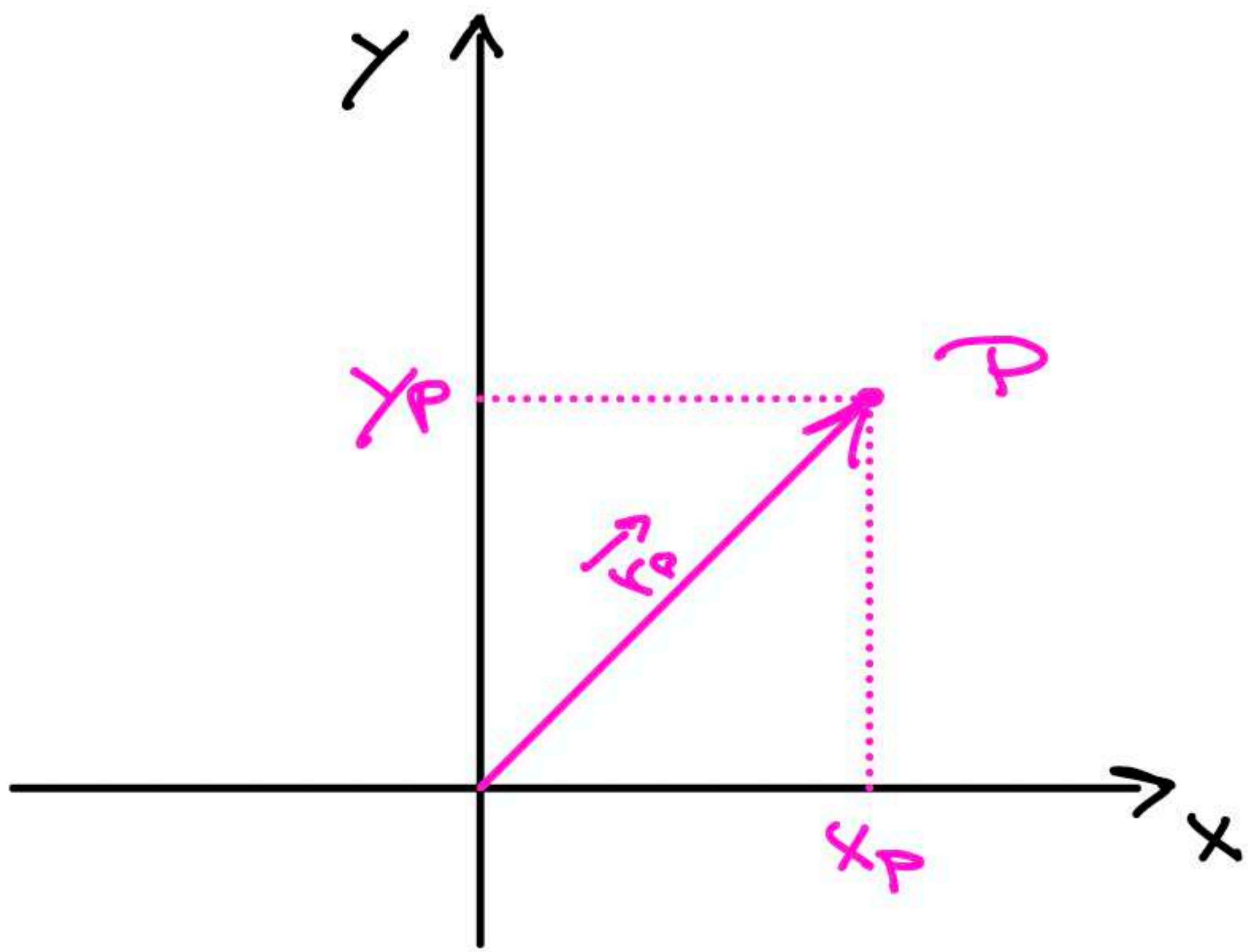
Vektorräume

Die zwei dimensionale Ebene kann man sich auch als Vektorraum vorstellen.

Jedem Punkt $P = (x_P, y_P)$ mit den Koordinaten x_P und y_P ist eindeutig ein Vektor

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

zugeordnet, den man sich als Pfeil vom Ursprung zum Punkt P vorstellen kann

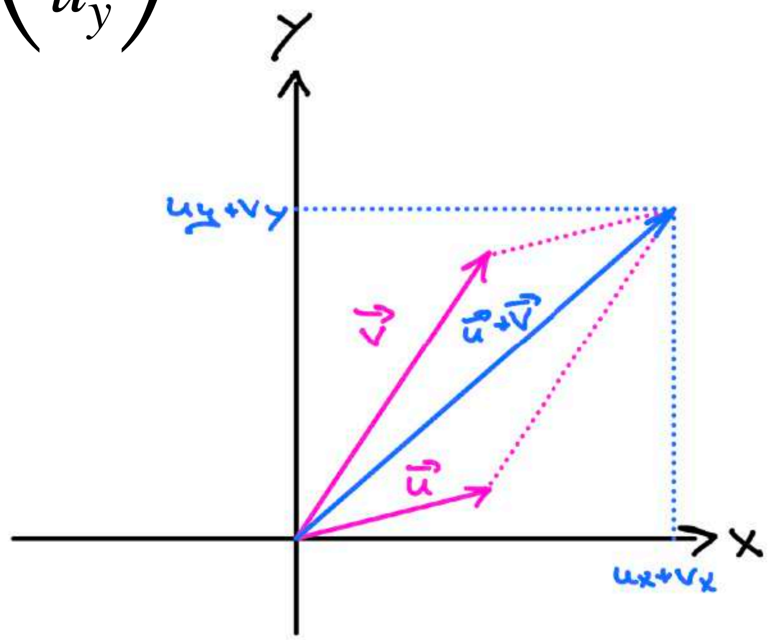


Vektorräume

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können addiert werden:** $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{pmatrix}$

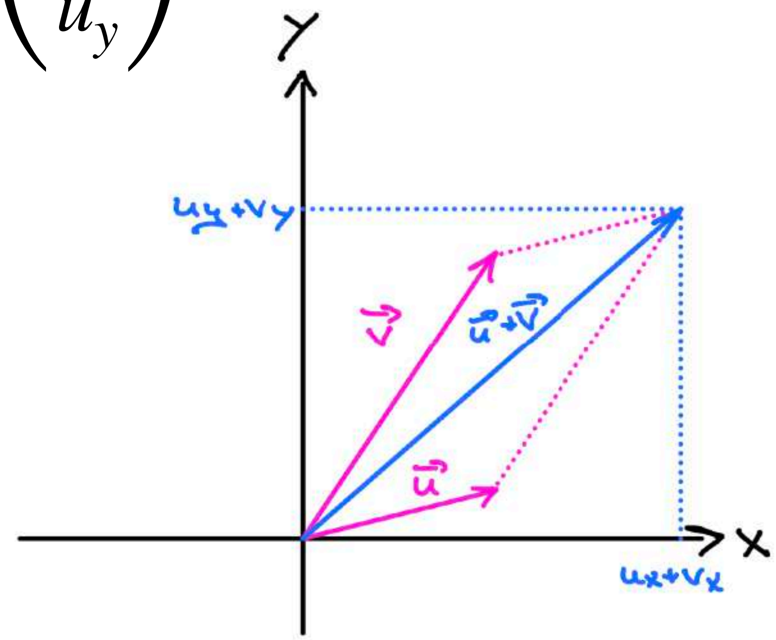
Vektorräume

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können addiert werden:** $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{pmatrix}$



Vektorräume

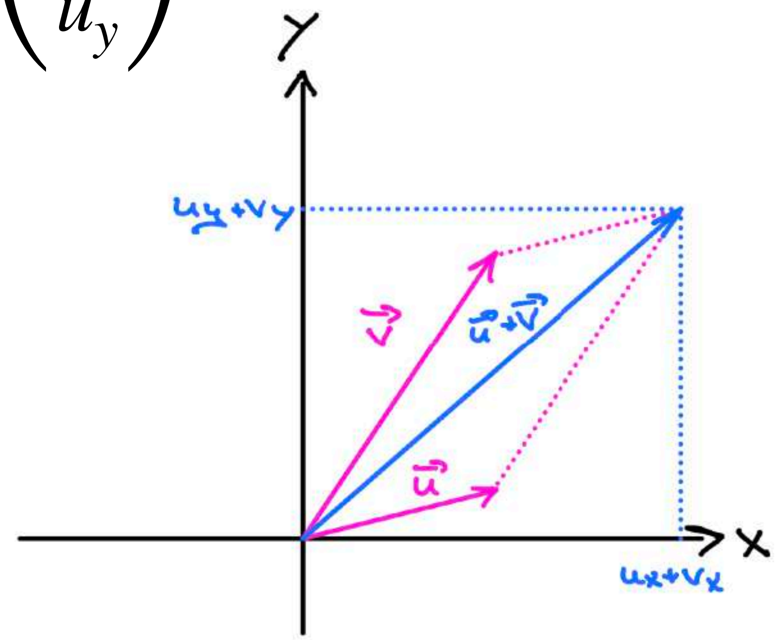
Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können addiert werden:** $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{pmatrix}$



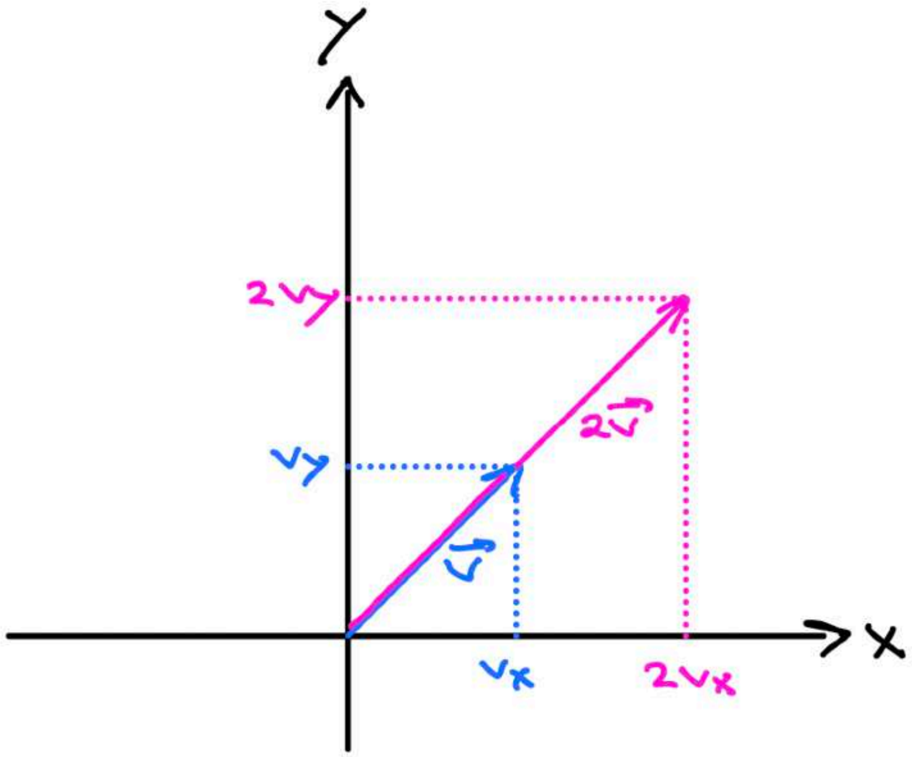
Vektoren können mit Zahlen (Skalaren) multipliziert werden: $\alpha\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_x \\ \alpha v_y \end{pmatrix}$

Vektorräume

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können addiert werden:** $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{pmatrix}$



Vektoren können mit Zahlen (Skalaren) multipliziert werden: $\alpha\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_x \\ \alpha v_y \end{pmatrix}$



Vektorräume - Skalarprodukt

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können mit einander multipliziert werden**

Vektorräume - Skalarprodukt

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können mit einander multipliziert werden**

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x^* u_x + v_y^* u_y$$

Vektorräume - Skalarprodukt

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können mit einander multipliziert werden**

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x^* u_x + v_y^* u_y$$

Im Rellen gilt dann: $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x u_x + v_y u_y$

Vektorräume - Skalarprodukt

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können mit einander multipliziert werden**

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x^* u_x + v_y^* u_y$$

Im Rellen gilt dann: $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x u_x + v_y u_y$

Und man findet

$\vec{v} \cdot \vec{v} \equiv \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2$ **Länge des Vektors zum Quadrat! (Norm),**

Vektorräume - Skalarprodukt

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können mit einander multipliziert werden**

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x^* u_x + v_y^* u_y$$

Im Rellen gilt dann: $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x u_x + v_y u_y$

Und man findet

$\vec{v} \cdot \vec{v} \equiv \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2$ **Länge des Vektors zum Quadrat! (Norm),**

sowie $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = |\vec{v}||\vec{u}| \cos\theta$

Vektorräume - Skalarprodukt

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können mit einander multipliziert werden**

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x^* u_x + v_y^* u_y$$

Im Rellen gilt dann: $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x u_x + v_y u_y$

Und man findet

$\vec{v} \cdot \vec{v} \equiv \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2$ **Länge des Vektors zum Quadrat! (Norm),**

sowie $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = |\vec{v}||\vec{u}| \cos\theta$

Es gilt:

1. $\langle \vec{v}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle$ **Linearität (Teil 1)**

Vektorräume - Skalarprodukt

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können mit einander multipliziert werden**

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x^* u_x + v_y^* u_y$$

Im Rellen gilt dann: $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x u_x + v_y u_y$

Und man findet

$\vec{v} \cdot \vec{v} \equiv \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2$ **Länge des Vektors zum Quadrat! (Norm),**

sowie $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$

Es gilt:

1. $\langle \vec{v}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle$ **Linearität (Teil 1)**
2. $\langle \vec{v}, \alpha\vec{u} \rangle = \alpha \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ **Linearität (Teil 2)**

Vektorräume - Skalarprodukt

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können mit einander multipliziert werden**

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x^* u_x + v_y^* u_y$$

Im Rellen gilt dann: $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x u_x + v_y u_y$

Und man findet

$\vec{v} \cdot \vec{v} \equiv \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2$ **Länge des Vektors zum Quadrat! (Norm),**

sowie $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = |\vec{v}||\vec{u}| \cos \theta$

Es gilt:

1. $\langle \vec{v}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle$ **Linearität (Teil 1)**
2. $\langle \vec{v}, \alpha \vec{u} \rangle = \alpha \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ **Linearität (Teil 2)**
3. $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^*$ **Symmetrie**

Vektorräume - Basis

Den 2 dimensionalen Raum, kann man sich auch als aufgespannt durch die Basis $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ vorstellen

Vektorräume - Basis

Den 2 dimensionalen Raum, kann man sich auch als aufgespannt durch die Basis $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ vorstellen

Definition: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **und** $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorräume - Basis

Den 2 dimensionalen Raum, kann man sich auch als aufgespannt durch die Basis $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ vorstellen

Definition: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **und** $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit gilt:

1. $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = 1 = \langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle$ **und** $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0$

Vektorräume - Basis

Den 2 dimensionalen Raum, kann man sich auch als aufgespannt durch die Basis $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ vorstellen

Definition: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **und** $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit gilt:

1. $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = 1 = \langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle$ **und** $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0$

2. **Jeder beliebige Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **kann in dieser Basis dargestellt werden**

Vektorräume - Basis

Den 2 dimensionalen Raum, kann man sich auch als aufgespannt durch die Basis $\vec{e}_x$und $\vec{e}_y$ vorstellen

Definition: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**und** $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit gilt:

1. $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = 1 = \langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle$ **und** $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0$

2. **Jeder beliebige Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$$

Vektorräume - Basis

Den 2 dimensionalen Raum, kann man sich auch als aufgespannt durch die Basis $\vec{e}_x$und $\vec{e}_y$ vorstellen

Definition: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**und** $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit gilt:

1. $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = 1 = \langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle$ **und** $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0$

2. **Jeder beliebige Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ **mit** $v_x = \langle \vec{v}, \vec{e}_x \rangle$ **und** $v_y = \langle \vec{v}, \vec{e}_y \rangle$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 Dimensionen erweitert werden

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**
   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**
   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$
   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**
   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$
   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$
   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**

   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$

   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$

   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$

   Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**
   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$
   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$
   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$
   Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$
   assoziativ $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**
   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$
   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$
   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$
   Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$
   assoziativ $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. **Es gibt eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$**

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**
   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$
   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$
   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$
   Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$
   assoziativ $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. **Es gibt eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$**
   $\vec{v} \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda\vec{v} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda|\alpha\rangle \in V$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**
   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$
   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$
   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$
   Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$
   assoziativ $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. **Es gibt eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$**
   $\vec{v} \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda\vec{v} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda|\alpha\rangle \in V$
   Linear 1: $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ **oder** $(\lambda + \mu)|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle + \mu|\alpha\rangle$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**
   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$
   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$
   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$
   Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$
   assoziativ $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. **Es gibt eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$**
   $\vec{v} \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda\vec{v} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda|\alpha\rangle \in V$
   Linear 1: $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ **oder** $(\lambda + \mu)|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle + \mu|\alpha\rangle$
   Linear 2: $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$ **oder** $\lambda(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = \lambda|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**

   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$

   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$

   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$

   Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$

   assoziativ $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. **Es gibt eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$**

   $\vec{v} \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda\vec{v} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda|\alpha\rangle \in V$

   Linear 1: $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ **oder** $(\lambda + \mu)|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle + \mu|\alpha\rangle$

   Linear 2: $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$ **oder** $\lambda(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = \lambda|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle$

   $\lambda(\mu)\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ **oder** $\lambda(\mu)|\alpha\rangle) = (\lambda\mu)|\alpha\rangle$

Vektorräume - Allgemein

Dieses anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**

$\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$

kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$

Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$

Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$

assoziativ $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. **Es gibt eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$**

$\vec{v} \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda\vec{v} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda|\alpha\rangle \in V$

Linear 1: $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ **oder** $(\lambda + \mu)|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle + \mu|\alpha\rangle$

Linear 2: $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$ **oder** $\lambda(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = \lambda|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle$

$\lambda(\mu)\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ **oder** $\lambda(\mu)|\alpha\rangle) = (\lambda\mu)|\alpha\rangle$

$1\vec{v} = \vec{v}$ **oder** $1|\alpha\rangle) = |\alpha\rangle$

Vektorräume - Allgemein

Eine Menge V, die die vorherigen Eigenschaften besitzt, heisst ein K-Vektorraum V:

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^2$: **2-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^3$: **3-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^n$: **n-dimensionaler Raum**
2. $\mathbb{L}$: **Raum aller Funktionen**
3. **….**

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine Basis: $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}, \ldots\}$ **und jeder Vektor** $\vec{v}$ **aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden** $\vec{v} = \sum_i c_i \overrightarrow{b_i}$

Vektorräume - Allgemein

Eine Menge V, die die vorherigen Eigenschaften besitzt, heisst ein K-Vektorraum V:

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^2$**: 2-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^3$**: 3-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^n$**: n-dimensionaler Raum**
2. $\mathbb{L}$**: Raum aller Funktionen**
3. **….**

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine Basis: $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}, \ldots\}$ **und jeder Vektor** $\vec{v}$ **aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden** $\vec{v} = \sum_i c_i \overrightarrow{b_i}$

Es kann ein Skalarprodukt (inneres Produkt) definiert werden:

Vektorräume - Allgemein

Eine Menge V, die die vorherigen Eigenschaften besitzt, heisst ein K-Vektorraum V:

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^2$**: 2-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^3$**: 3-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^n$**: n-dimensionaler Raum**
2. $\mathbb{L}$**: Raum aller Funktionen**
3. **....**

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine Basis: $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}, \ldots\}$ **und jeder Vektor** $\vec{v}$ **aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden** $\vec{v} = \sum_i c_i \overrightarrow{b_i}$

Es kann ein Skalarprodukt (inneres Produkt) definiert werden:

$$V \times V \to K, \qquad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \mapsto \langle\alpha|\beta\rangle$$

Vektorräume - Allgemein

Eine Menge V, die die vorherigen Eigenschaften besitzt, heisst ein K-Vektorraum V:

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^2$**: 2-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^3$**: 3-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^n$**: n-dimensionaler Raum**
2. $\mathbb{L}$**: Raum aller Funktionen**
3. **....**

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine Basis: $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}, \ldots\}$ **und jeder Vektor** $\vec{v}$ **aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden** $\vec{v} = \sum_i c_i \overrightarrow{b_i}$

Es kann ein Skalarprodukt (inneres Produkt) definiert werden:

$$V \times V \to K, \qquad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \mapsto \langle\alpha|\beta\rangle$$

$$\langle\alpha|\beta_1 + \beta_2\rangle = \langle\alpha|\beta_1\rangle + \langle\alpha|\beta_2\rangle \quad \textbf{Linearität (Teil 1)}$$

Vektorräume - Allgemein

Eine Menge V, die die vorherigen Eigenschaften besitzt, heisst ein K-Vektorraum V:

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^2$: **2-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^3$: **3-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^n$: **n-dimensionaler Raum**
2. $\mathbb{L}$: **Raum aller Funktionen**
3. **….**

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine Basis: $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}, \ldots\}$ **und jeder Vektor** $\vec{v}$ **aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden** $\vec{v} = \sum_i c_i \overrightarrow{b_i}$

Es kann ein Skalarprodukt (inneres Produkt) definiert werden:

$$V \times V \to K, \qquad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \mapsto \langle\alpha|\beta\rangle$$

$$\langle\alpha|\beta_1 + \beta_2\rangle = \langle\alpha|\beta_1\rangle + \langle\alpha|\beta_2\rangle$$ **Linearität (Teil 1)**

$$\langle\alpha|\lambda\beta\rangle = \lambda\langle\alpha|\beta\rangle$$ **Linearität (Teil 2)**

Vektorräume - Allgemein

Eine Menge V, die die vorherigen Eigenschaften besitzt, heisst ein K-Vektorraum V:

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^2$: **2-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^3$: **3-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^n$: **n-dimensionaler Raum**
2. $\mathbb{L}$: **Raum aller Funktionen**
3. **….**

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine Basis: $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}, \ldots\}$ **und jeder Vektor** $\vec{v}$ **aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden** $\vec{v} = \sum_i c_i \overrightarrow{b_i}$

Es kann ein Skalarprodukt (inneres Produkt) definiert werden:

$$V \times V \to K, \qquad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \mapsto \langle\alpha|\beta\rangle$$

$$\langle\alpha|\beta_1 + \beta_2\rangle = \langle\alpha|\beta_1\rangle + \langle\alpha|\beta_2\rangle \quad \textbf{Linearität (Teil 1)}$$

$$\langle\alpha|\lambda\beta\rangle = \lambda\langle\alpha|\beta\rangle \quad \textbf{Linearität (Teil 2)}$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* \quad \textbf{Symmetrie}$$

Vektorräume - Allgemein

Es kann ein Skalarprodukt (inneres Produkt) definiert werden:

$$V \times V \to K, \qquad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \mapsto \langle\alpha|\beta\rangle$$

$\langle\alpha|\beta_1 + \beta_2\rangle = \langle\alpha|\beta_1\rangle + \langle\alpha|\beta_2\rangle$ **Linearität (Teil 1)**

$\langle\alpha|\lambda\beta\rangle = \lambda\langle\alpha|\beta\rangle$ **Linearität (Teil 2)**

$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$ **Symmetrie**

2 Vektoren $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ **heissen orthogonal, wenn** $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$

1 Vektoren $|\alpha\rangle$ **heisst normiert, wenn** $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V:

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$**,** $x \mapsto f(x)$ **ist ein** $\mathbb{C}$**-Vektorraum** V**:**

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$**,** $x \mapsto f(x)$ **ist ein** $\mathbb{C}$**-Vektorraum** V**:**

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis:

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$**,** $x \mapsto f(x)$ **ist ein** $\mathbb{C}$**-Vektorraum** V**:**

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis: $\{b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$ **ist eine Basis**

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$**,** $x \mapsto f(x)$ **ist ein** $\mathbb{C}$**-Vektorraum** V**:**

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis: $\{b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$ **ist eine Basis**

Das Skalarprodukt ist definiert als $\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) dx$

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ **ist ein** $\mathbb{C}$**-Vektorraum** V**:**

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis: $\{b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$ **ist eine Basis**

Das Skalarprodukt ist definiert als $\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) dx$

Zeige, dass die Skalarprodukt Eigenschaften erfüllt sind!

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$**,** $x \mapsto f(x)$ **ist ein** $\mathbb{C}$**-Vektorraum** V**:**

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis: $\{b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$ **ist eine Basis**

Das Skalarprodukt ist definiert als $\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) dx$

Zeige, dass die Skalarprodukt Eigenschaften erfüllt sind!

Insbesondere ist unsere Basis eine Orthonormalbasis, d.h. $\langle b_i \,|\, b_j \rangle = \delta_{ij}$

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V:

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis: $\{b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$ **ist eine Basis**

Das Skalarprodukt ist definiert als $\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) dx$

Zeige, dass die Skalarprodukt Eigenschaften erfüllt sind!

Insbesondere ist unsere Basis eine Orthonormalbasis, d.h. $\langle b_i \,|\, b_j \rangle = \delta_{ij}$

Jeder Vektor f aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x)$ **ist ein** $\mathbb{C}$**-Vektorraum** V**:**

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis: $\{b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$ **ist eine Basis**

Das Skalarprodukt ist definiert als $\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) dx$

Zeige, dass die Skalarprodukt Eigenschaften erfüllt sind!

Insbesondere ist unsere Basis eine Orthonormalbasis, d.h. $\langle b_i \,|\, b_j \rangle = \delta_{ij}$

Jeder Vektor f **aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden**

$$f = \sum_i c_i b_i$$

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V:

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis: $\{b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}$ **mit $k \in \mathbb{Z}$ ist eine Basis**

Das Skalarprodukt ist definiert als $\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) dx$

Zeige, dass die Skalarprodukt Eigenschaften erfüllt sind!

Insbesondere ist unsere Basis eine Orthonormalbasis, d.h. $\langle b_i \,|\, b_j \rangle = \delta_{ij}$

Jeder Vektor f aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden

$$f = \sum_i c_i b_i \text{ und es gilt } c_i = \langle b_i \,|\, f \rangle$$

Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x)$ **ist ein** $\mathbb{C}$**-Vektorraum** V**:**

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis: $\{b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$ **ist eine Basis**

Das Skalarprodukt ist definiert als $\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) dx$

Zeige, dass die Skalarprodukt Eigenschaften erfüllt sind!

Insbesondere ist unsere Basis eine Orthonormalbasis, d.h. $\langle b_i \,|\, b_j \rangle = \delta_{ij}$

Jeder Vektor f **aus dem Vektorraum kann in dieser Basis dargestellt werden**

$$f = \sum_i c_i b_i \text{ und es gilt } c_i = \langle b_i \,|\, f \rangle$$

Dies ist die Fourier-Reihe :-)