Quantum2025

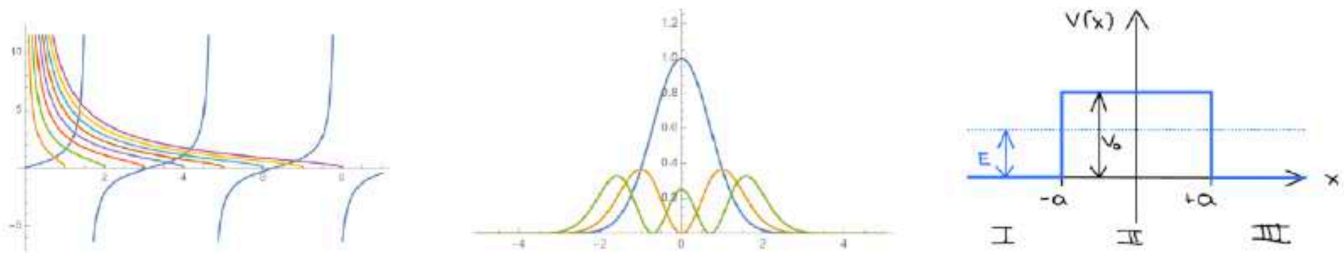
https://www.quantum2025.de

Schrödinger's Katze am Emmy Noether Campus: sie lebt!

Ankündigung für das Sommersemester 2025

Das theoretische Minimum II

Quantenmechanik - Prof. Dr. Alexander Lenz, 4PHY00011V



Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundprinzipen der theoretischen Physik.

2025 wird weltweit das 100 jährige Jubiläum der Entdeckung der Quantenmechanik gefeiert. Ursprünglich war dies über viele Jahrzehnte lang reinste Grundlagenforschung ohne jegliche Hinweise auf potentielle Anwendungen. 100 Jahre später finden wir, dass ein Großteil der technologischen Errungenschaften der Menschheit im letzten Jahrhundert auf der Quantenmechanik basiert - zuletzt gipfelte dies in den ersten Quantencomputern.

Im Sommersemester 2025 beschäftigen wir uns daher mit einer Einführung in die Grundprinzipien der Quantenmechanik:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x},t)$$

Die Vorlesung richtet sich an Mittwochsakademiker, Oberstufenschülerinnen und -schüler, Lehrkräfte und Physikenthusiasten mit einem großen Interesse an aktuellen Themen der Physik. Es werden mathematische Konzepte (auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe) eingeführt und benutzt. Die Vorlesung ist an die erfolgreiche Vorlesungs- und Buchreihe "**The theoretical Minimum**" von Leonard Susskind angelehnt, welche auf dieselbe Zielgruppe ausgerichtet war. Vom Niveau her wird sich die Veranstaltung auf dem schmalen Grat zwischen einer rein populärwissenschaftlichen Bildershow und einer theoretischen Physikvorlesung im Bachelorstudium bewegen.

11 Termine im Sommersemester 25:
7.5., 14.5., 21.5., 28.5., 4.6., 11.6., 18.6., 25.6., 2.7., 9.7., 16.7.
Mittwochs 16-18
Emmy Noether Campus ENC-D-114
Infos unter: alexander.lenz@uni-siegen.de
https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/

Termine:

7.5:
14.5:
21.5:
28.5: Vertretung
4.6:
11.6:
18.6:
25.6: Prof. Tao Han
2.7:
9.7:
+ Oppenheimer
16.7:

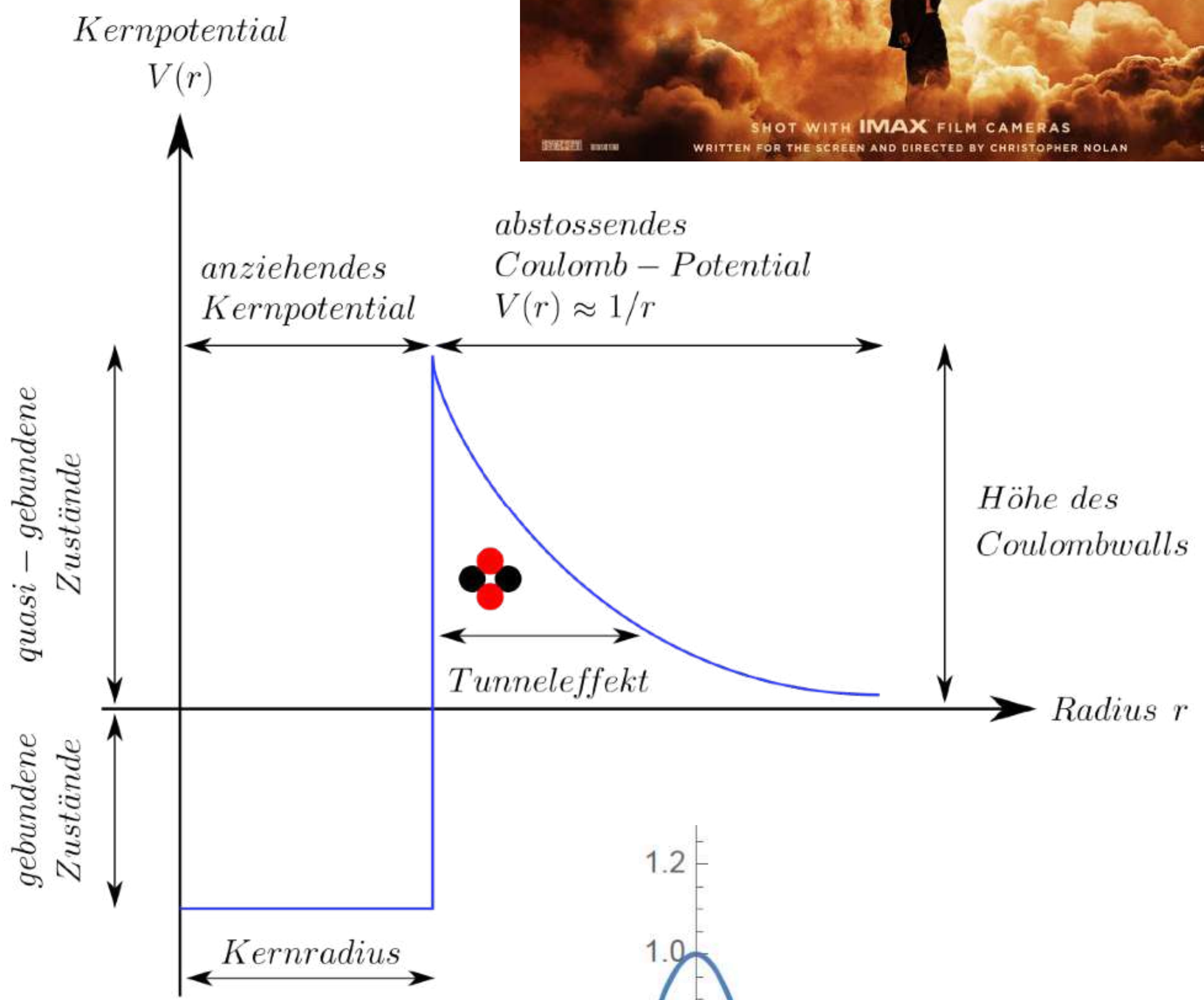
Prof. Dr. Tao Han forscht mit Unterstützung der Humboldt-Stiftung an der Uni Siegen

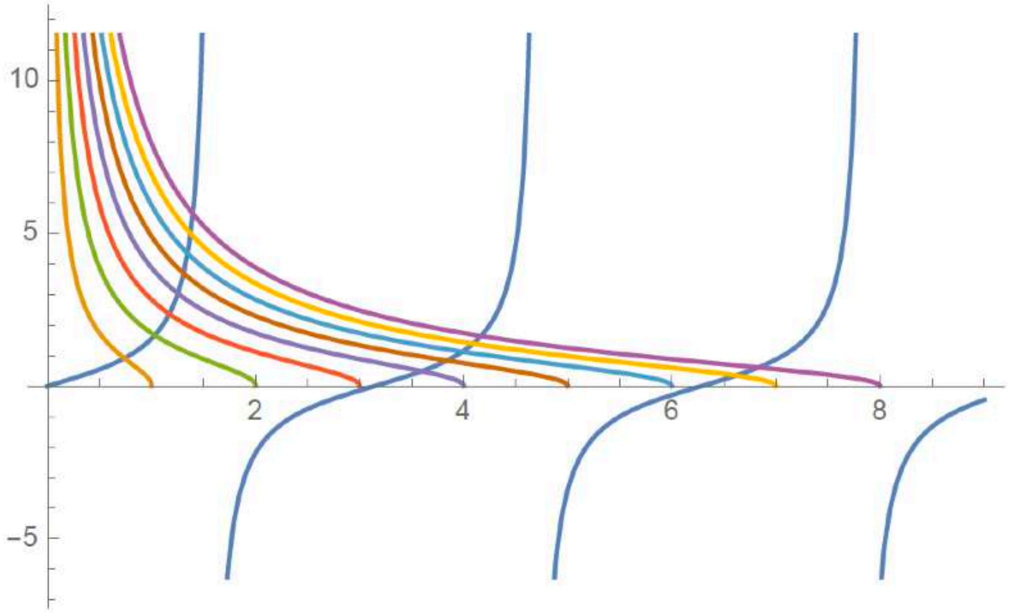
Vorlesung: Das theoretische Minimum

Mittwochsakademie

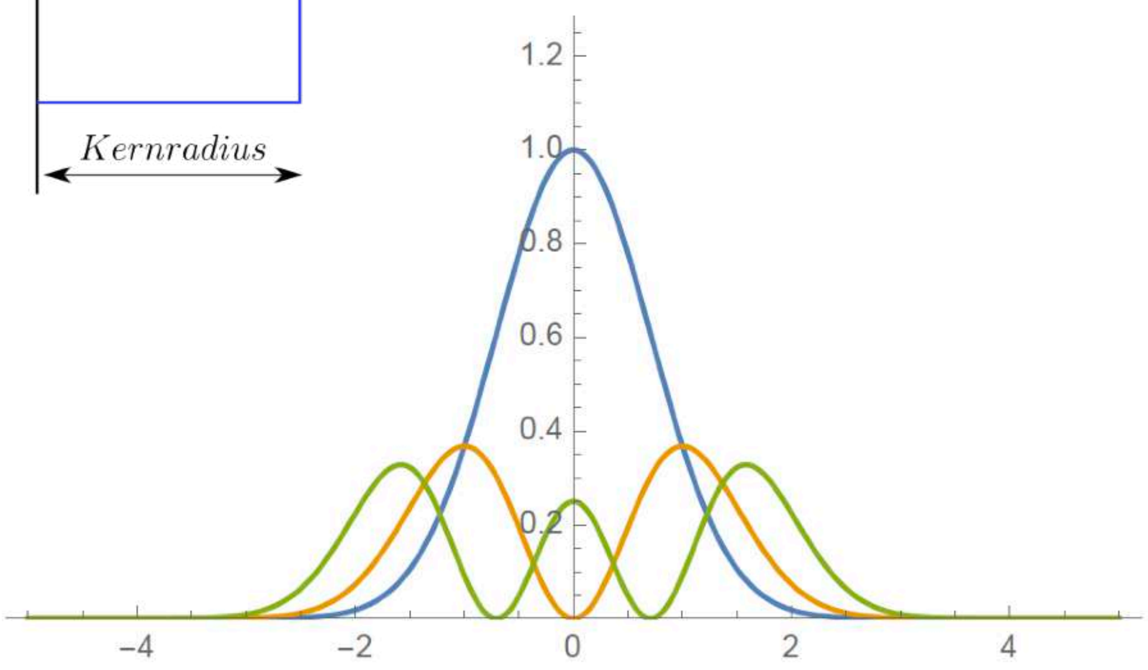
Ablauf

7.5.: Einführung
14.5.: Zustände, Vektorräume
21.5.: Grundprinzipien der QM
28.5.: Vertretung - Zeitentwicklung
4.6.: Unschärferelation
11.6.: Verschränklung
18.6.: Verschränklung II
25.6.: **Festkolloquium: Prof. Tao Han**
2.7.: Teilchen und Wellen
9.7.: Dynamik **+ Film: Oppenheimer**
16.7.: Harmonischer Oszillator



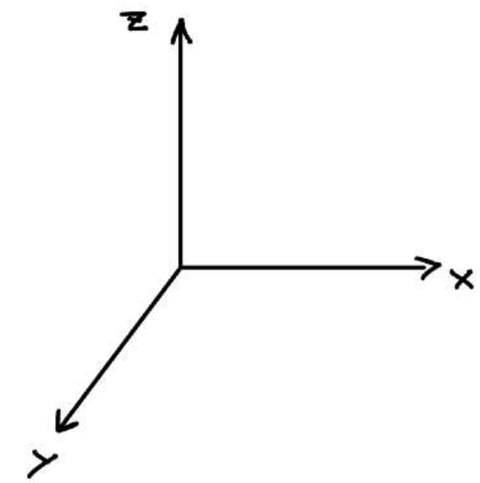


Streuung an Kastenpotential



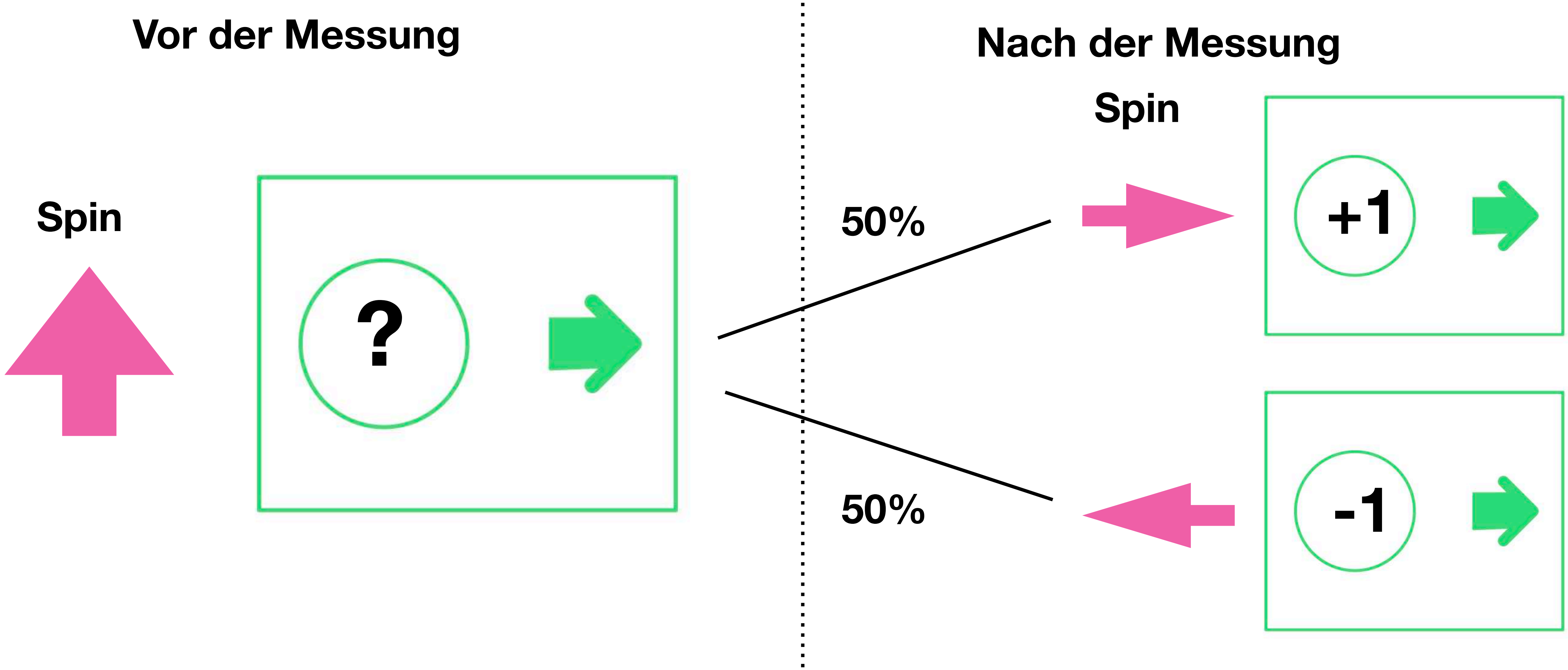
Aufenthaltswahrscheinlichkeit beim harmonischen Oszillator

Wdh.: 1 Quanten Bit



Beispiele für Messergebnisse:

Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin



Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz
sondern eine experimentelle Tatsache,
die nun verstanden/interpretiert werden muss

Wdh.: Zustände

In der klassischen Physik ist der Zustandsraum eine mathematische Menge:

1. **Beispiel Münze: Zustandsraum** $= \{K, Z\}$
2. **Beispiel Würfel: Zustandsraum** $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Boolsche Algebra

Es gibt Wahrheitswerte für Aussagen:

r **richtig,** f **falsch - gehören zu verschieden Untermengen**

Beispiel:

A. **Der Würfel zeigt eine gerade Zahl:** $r = \{2,4,6\}$; $f = \{1,3,5\}$
B. **Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4:** $r = \{1,2,3\}$; $f = \{4,5,6\}$

Es gibt Gegen-Aussagen:

Beispiel:

Not A: Der Würfel zeigt keine gerade Zahl: $r = \{1,3,5\}$; $f = \{2,4,6\}$

Not B: Der Würfel zeigt keine Zahl kleiner als 4: $r = \{4,5,6\}$; $f = \{1,2,3\}$

Wdh.: Zustände

Weitere Verknüpfungen (neben “not A”) von Aussagen:

“A und B” sowohl A also auch B erfüllt
A und B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 und eine gerade Zahl:

$$r = \{2\}; \quad f = \{1,3,4,5,6\}$$

Schnittmenge

“A oder B” A oder B erfüllt (kann auch beides sein)
A oder B: Der Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4 oder eine gerade Zahl:

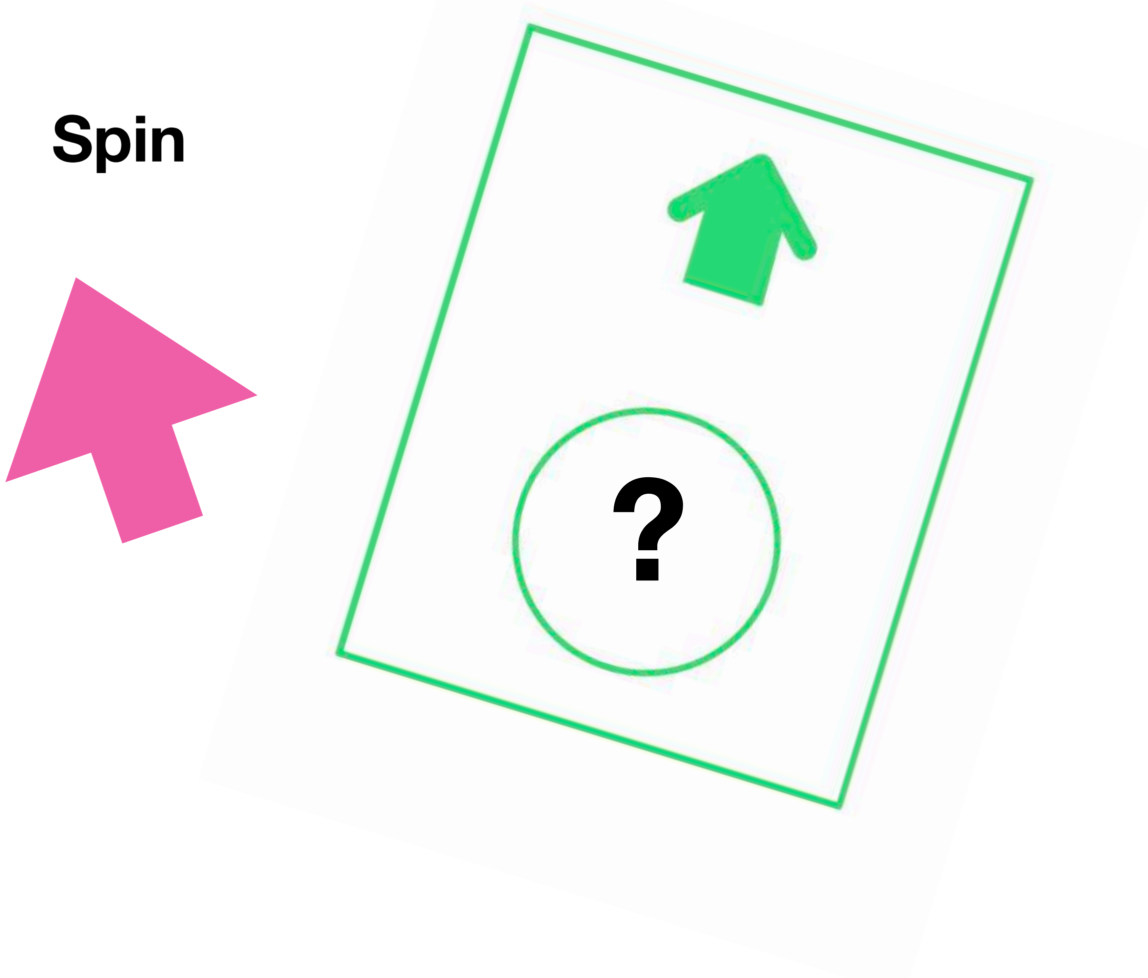
$$r = \{1,2,3,4,6\}; \quad f = \{5\}$$

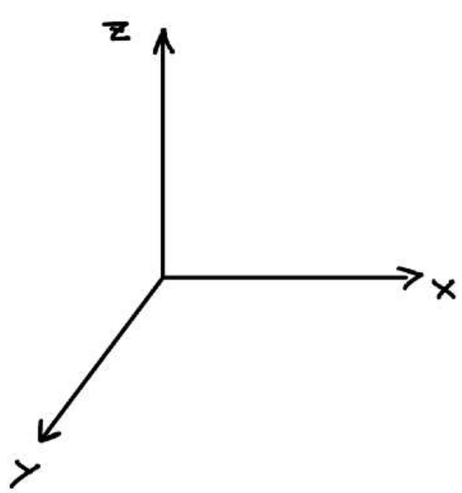
Vereinigungsmenge

Wdh.: Zustände

Test klassischer Aussagen:
(Spin = Münze)

Spin





Mögliche Aussagen:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Sinnvoll und können getestet werden

Ebenso

Not A: die z-Komponente vom Spin ist -1

Not B: die x-Komponente vom Spin ist -1

Wie steht es mit

A und B: $z = +1$ und $x = +1$

A oder B: $z = +1$ oder $x = +1$

Wie testet man A oder B?

Schritt 1: Messe σ_z: +1 -> wahr

σ_z: -1: Schritt 2 Messe σ_x: +1 -> wahr, sonst falsch

Alternativ B oder A: Schritt 1: Messe σ_x: +1 -> wahr

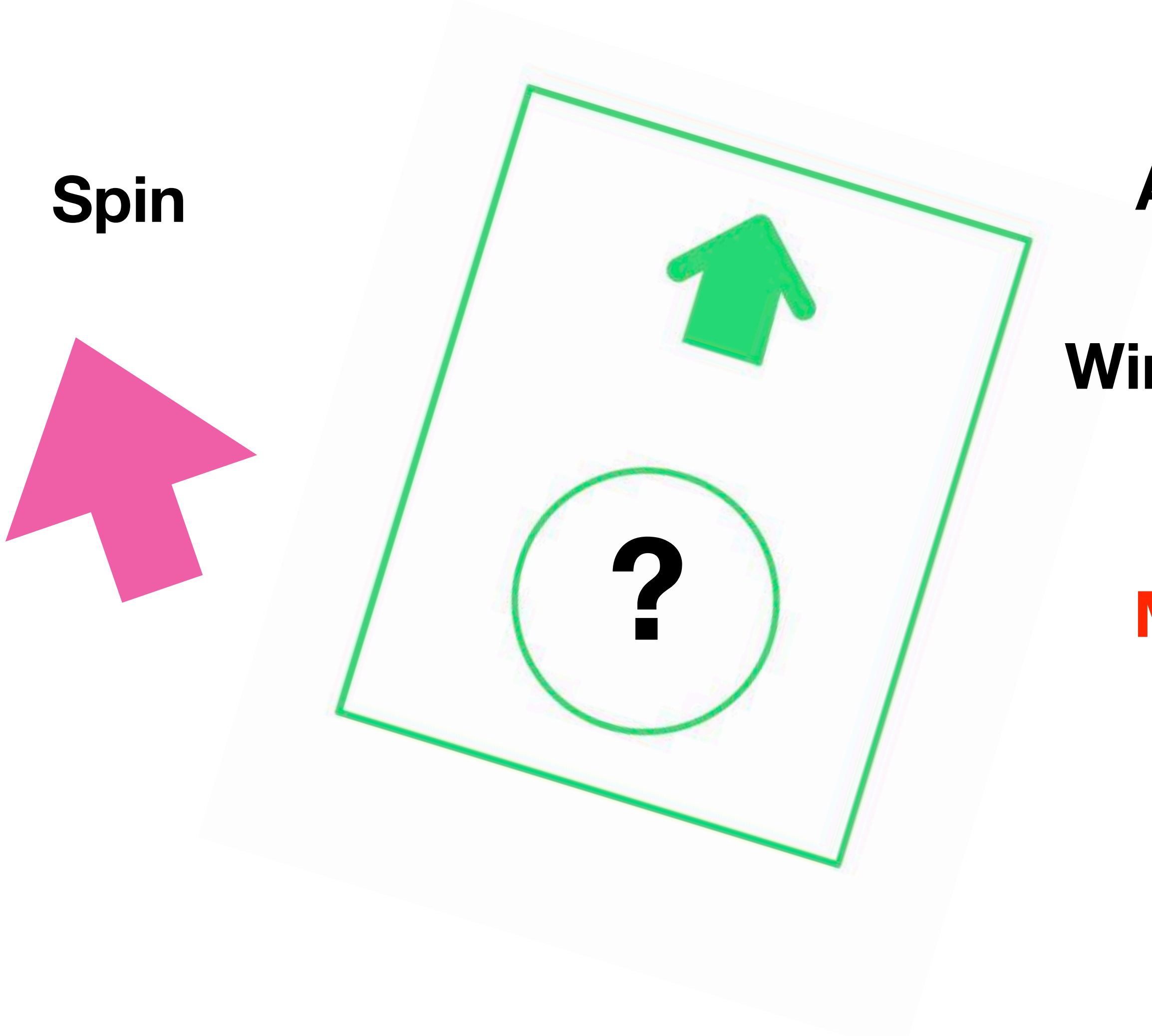
σ_x: -1: Schritt 2 Messe σ_z: +1 -> wahr, sonst falsch

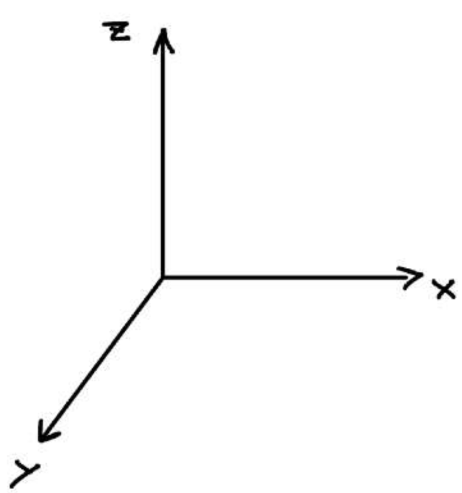
In klassischer Physik: (A oder B) = (B oder A)

Wdh.: Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Weiterhin:

A: die z-Komponente vom Spin ist $+1$

B: die x-Komponente vom Spin ist $+1$

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A oder B) gilt

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

$\Rightarrow$ (A oder B) ist wahr, d.h. 0% für f

wir sind fertig, falls wir trotzdem σ_x messen:

Ausgang unverhersehbar (Auvs):

50% σ_x=+1, 50% σ_x=-1

Methode 2 (B oder A): Messe zuerst σ_x

Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f und der Spin ist jetzt im Zustand $\sigma_x = -1$

Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f

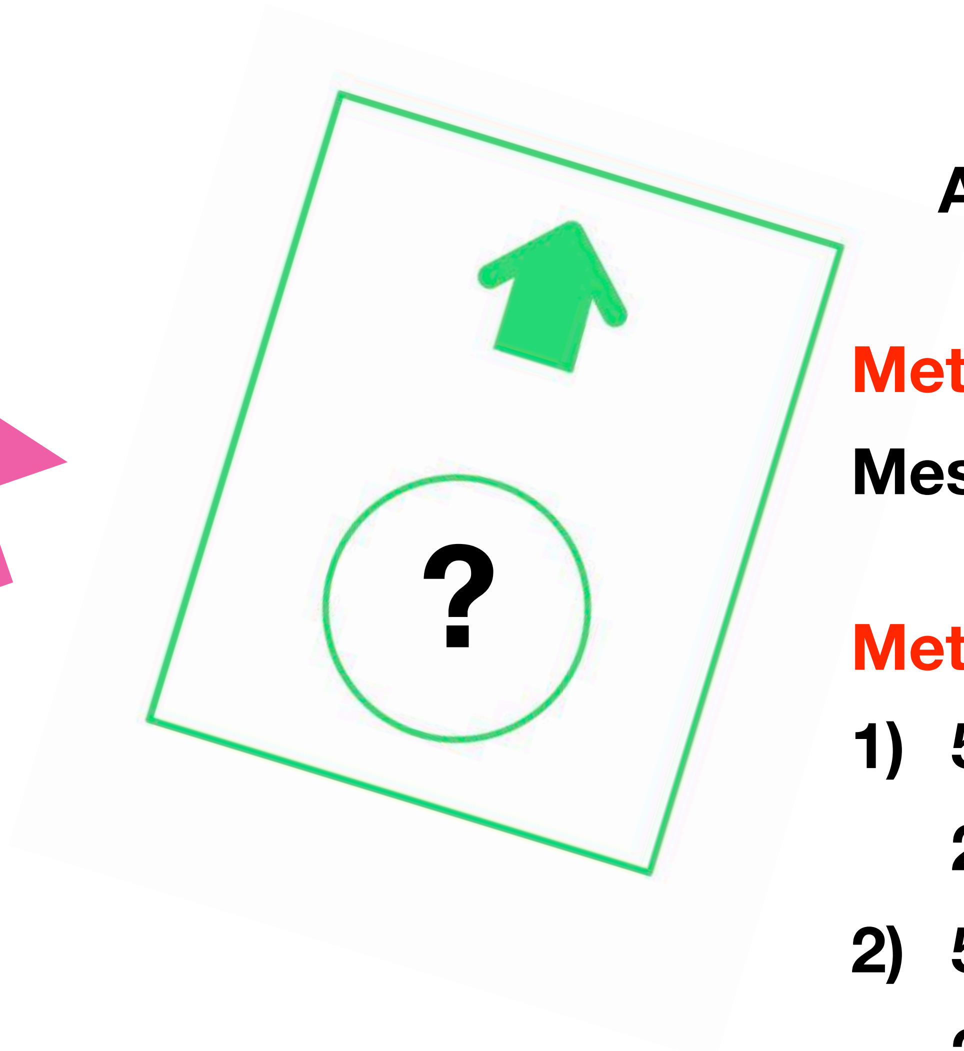
Also insgesamt 25% für f

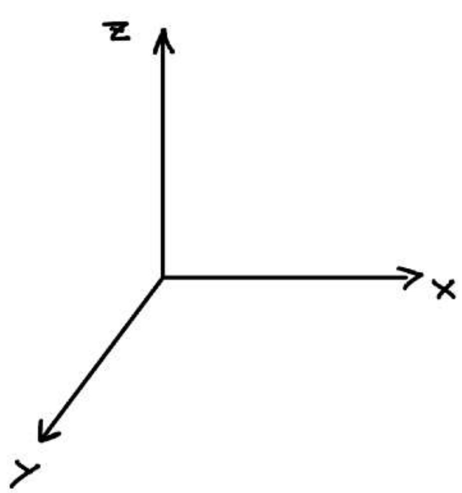
In Quanten Physik: (A oder B) $\neq$ (B oder A)

Wdh.: Zustände

JETZT: Spin in der Quantenwelt

Spin





Wir benutzen den Apparat $\mathscr{A}$ um zu bestimmen ob (A und B) gilt

Annahme das System ist im Zustand $\sigma_z = +1$

Methode 1: Messe σ_z und erhalte immer σ_z=+1

Messe σ_x: Auvs: 50% σ_x=+1 w, 50% σ_x=-1 f

Methode 2: Messe zuerst σ_x; Auvs:

1) **50% σ_x=+1, Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 w, 25% σ_z=-1 f**
2) **50% σ_x=-1 Messe nun σ_z: Auvs : 25% σ_z=+1 f, 25% σ_z=-1 f**

Also insgesamt 25% für w

In Quanten Physik: (A und B) $\neq$ (B und A)

Dies ist ein erstes Beispiel für Unschärferelationen: σ_x und σ_z können nicht gleichzeitig gemessen werden

Wdh.: Zustände

Aussagen:
Das Teilchen ist am Ort x und hat den Impuls p

Macht Sinn in klassischer Physik

Aber nicht in Quantenphysik

Um das weiter zu vertiefen brauchen wir mehr Mathematik

Wdh.: Komplexe Zahlen

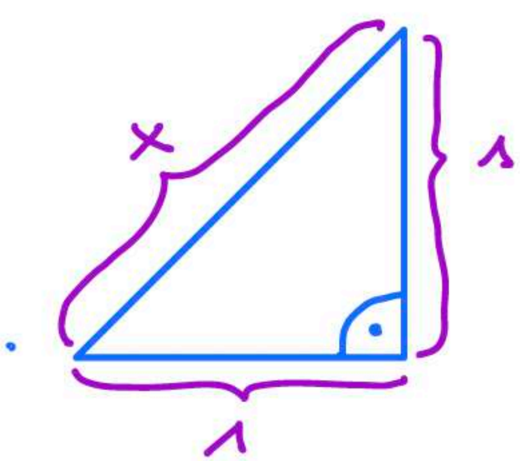
Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,....\}$

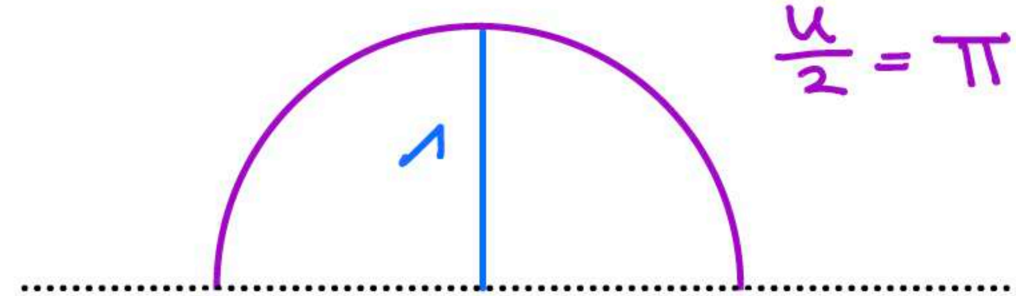
Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,....\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z_1}{z_2} \right\}$ **mit** $z_i \in \mathbb{Z}$

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q}+$**irrationale Zahlen wie** $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$



$$1^2 + 1^2 = x^2$$
$$2 = x^2$$
$$\sqrt{2} = x$$



$$\frac{U}{2} = \pi$$

Wdh.: Komplexe Zahlen

Lösung von algebraischen Gleichungen

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +1, -1$

Was ist mit:

$x^2 + 1 = 0$**?**

Definiere imaginäre Einheit i, für die gilt $i^2 = -1$, und sonst wird mit i wie mit einer gewöhnlichen Variable gerechnet

$(-i)^2 = (-1)^2(i^2) = (+1)(-1) = -1$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = +i, -i$

Eine allgemeine komplexe Zahl lautet

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Wdh.: Komplexe Zahlen

Addition von komplexen Zahlen

$$\left(a_1 + ib_1\right) + \left(a_2 + ib_2\right) = \left(a_1 + a_2\right) + i\left(b_1 + b_2\right)$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

$$\begin{aligned}\left(a_1 + ib_1\right) \cdot \left(a_2 + ib_2\right) &= a_1 \cdot \left(a_2 + ib_2\right) + ib_1 \cdot \left(a_2 + ib_2\right) \\ &= a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 \\ &= \left(a_1 a_2 - b_1 b_2\right) + i\left(a_1 b_2 + b_1 a_2\right)\end{aligned}$$

Wdh.: Komplexe Zahlen

Für jede komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **gilt:**

1) **Der Realteil von** z **lautet** a
2) **Der Imaginärteil von** z **lautet** b
3) **Die zu** z **komplex konjugierte Zahl** z^* **oder** $\bar{z}$ **lautet:** $z^* = \left(a - ib\right)$

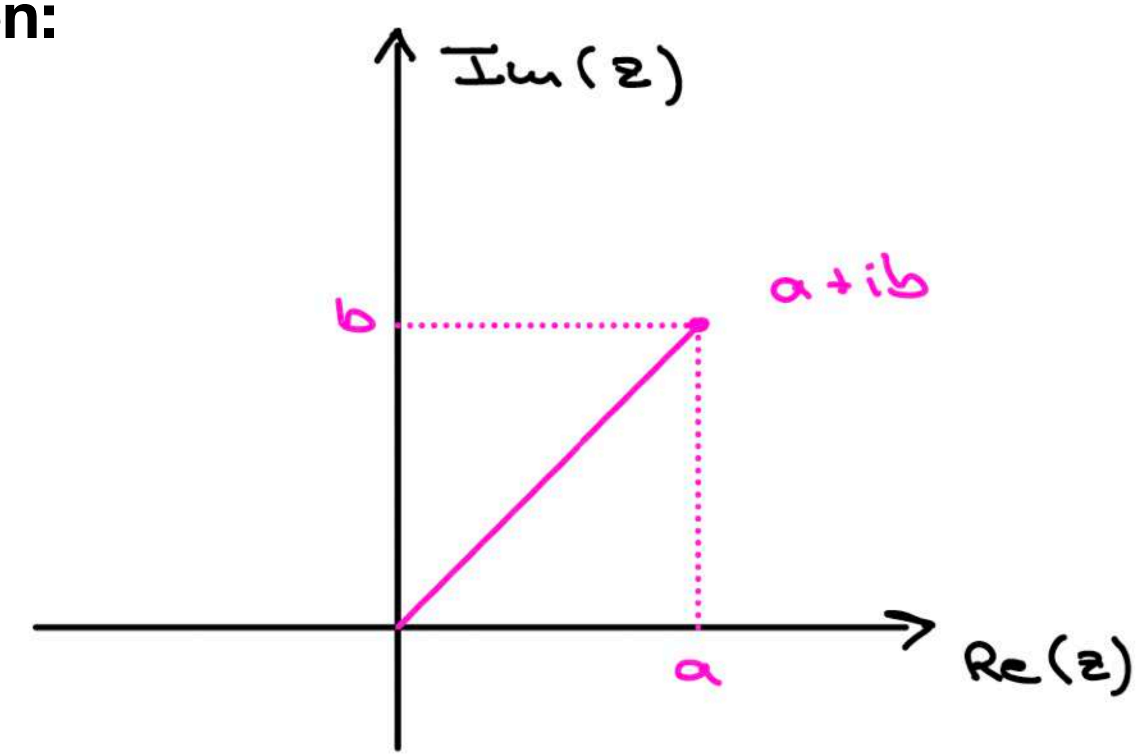
Damit folgt: $zz^* = \left(a + ib\right)\left(a - ib\right) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Stellen Sie $\frac{1}{3 + 4i}$ **in der Standardform einer komplexen Zahl dar,** $z = \left(a + ib\right)$

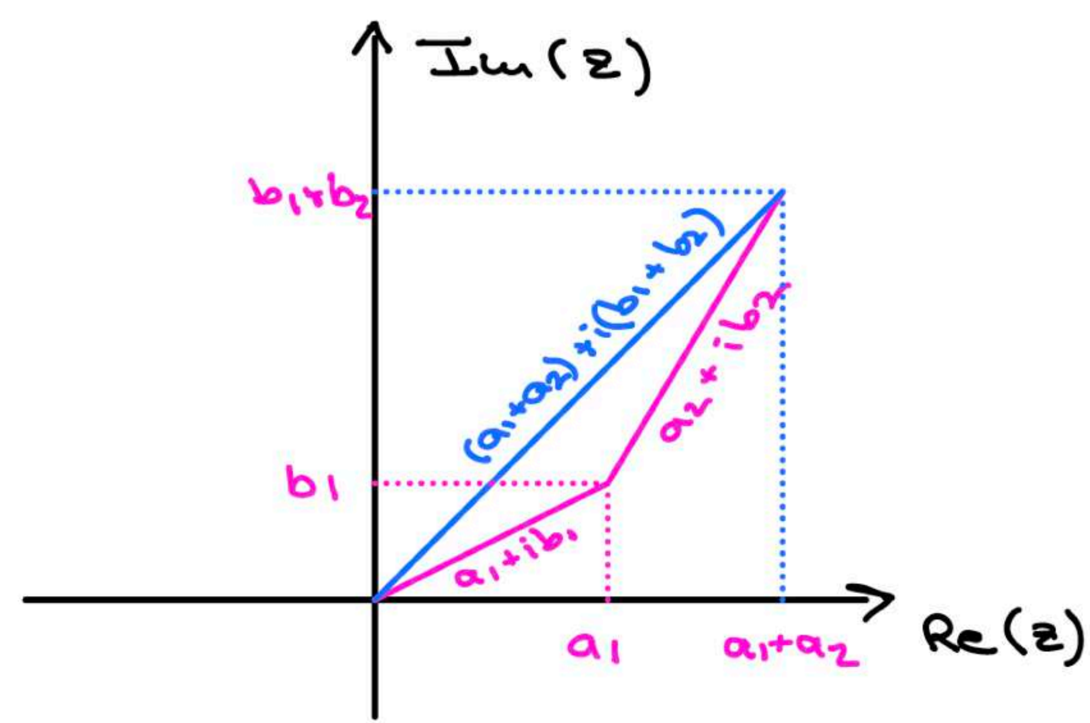
$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$$

Wdh.: Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = (a + ib)$ **kann auch in der 2-dimensionalen Ebene dargestellt werden:**



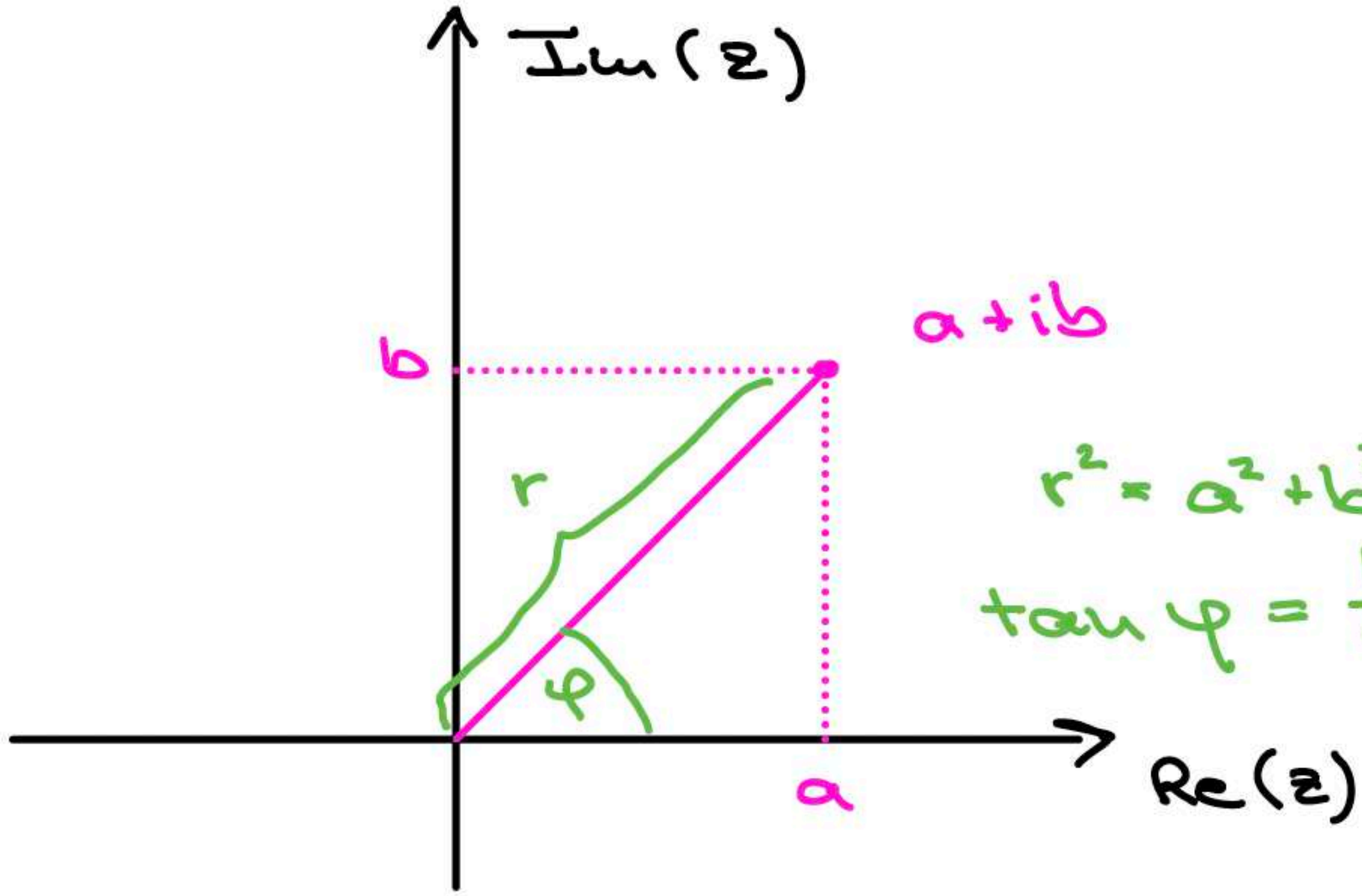
Der Addition von zwei komplexen Zahlen entspricht dann die Vektoraddition



Wdh.: Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = \left(a + ib\right)$ **kann auch eindeutig durch seinen Betrag** r **und den Winkel** φ **in der komplexen Ebene dargestellt werden:**

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \equiv re^{i\varphi}$$



$r^2 = a^2 + b^2 = zz^* \Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$ $\qquad \varphi = \arctan\frac{b}{a}$

Wdh.: Komplexe Zahlen

Der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen kann einfach in der Polardarstellung $z = a + ib \equiv re^{i\varphi}$ **durchgeführt werden**

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Die komplex konjugierte Zahl lautet

$$z^* = a - ib \equiv re^{-i\varphi}$$

Der Betrag einer Zahl kann dann wie folgt definiert werden

$$r^2 = zz^* = re^{i\varphi} re^{-i\varphi} = r^2$$

Wdh.: Komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,....\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,....\}$

Rational Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}$ **mit** $z_i \in \mathbb{Z}$

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q}+$**irrationale Zahlen wie** $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$

Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{a + ib; a, b \in \mathbb{R}\}$

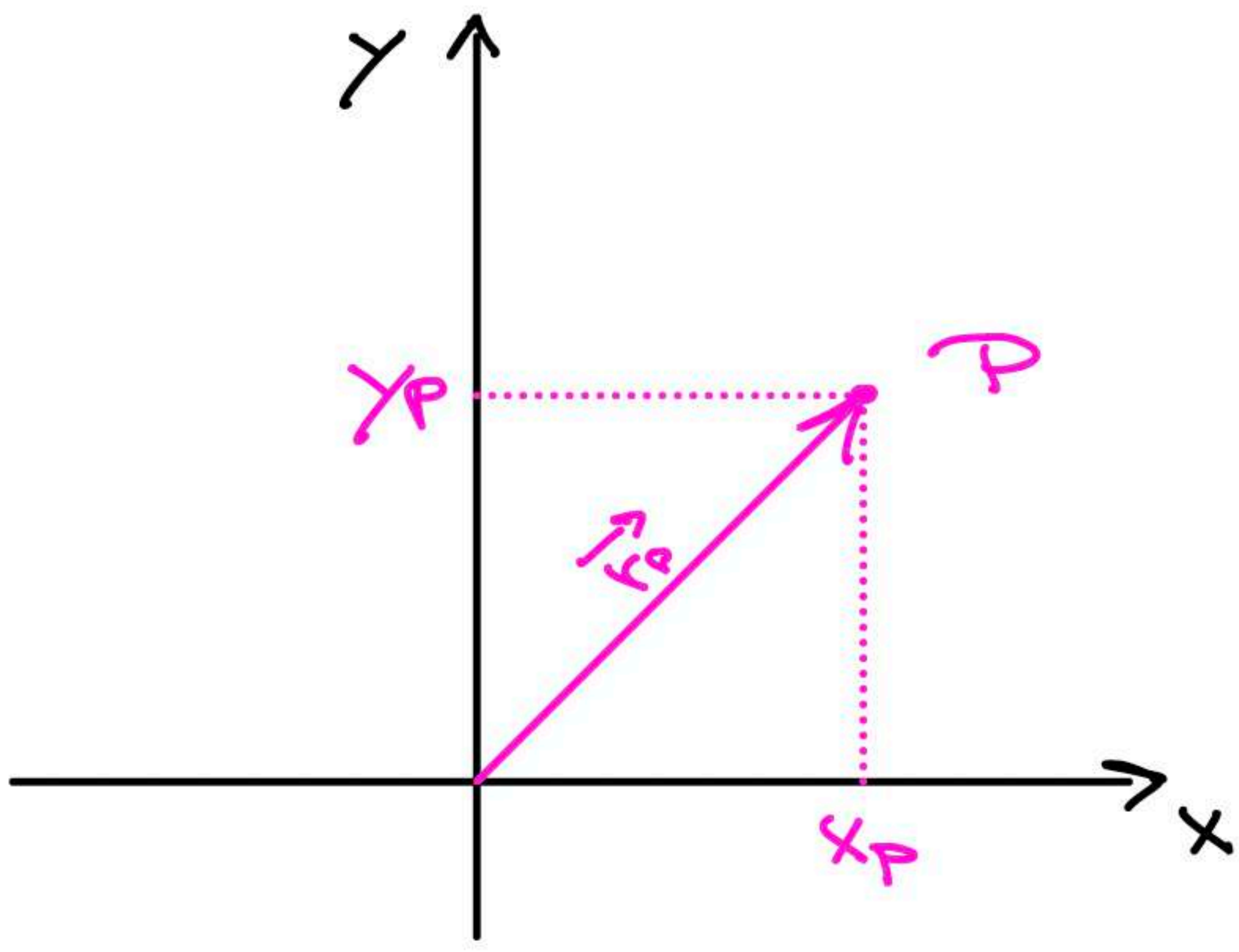
Wdh.: Vektorräume

Die zwei dimensionale Ebene kann man sich auch als Vektorraum vorstellen.

Jedem Punkt $P = (x_P, y_P)$ **mit den Koordinaten** x_P **und** y_P **ist eindeutig ein Vektor**

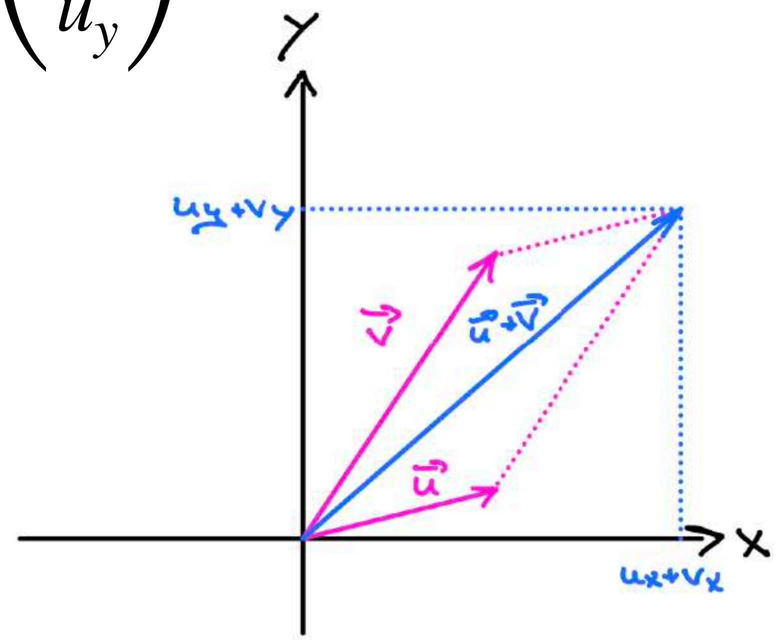
$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

zugeordnet, den man sich als Pfeil vom Ursprung zum Punkt P vorstellen kann

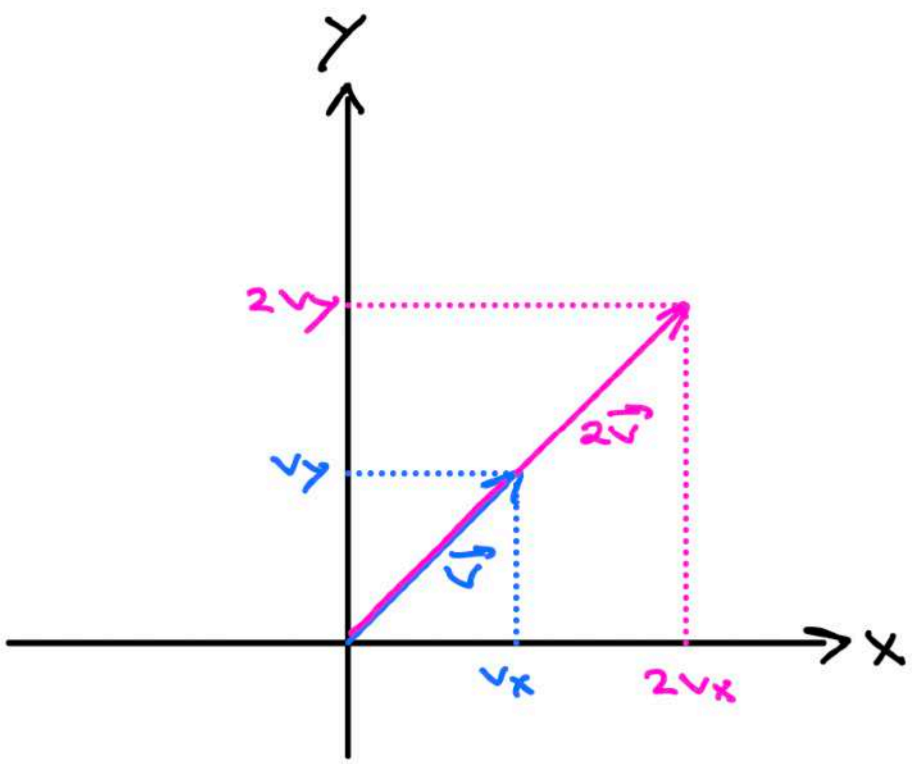


Wdh.: Vektorräume

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können addiert werden:** $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{pmatrix}$



Vektoren können mit Zahlen (Skalaren) multipliziert werden: $\alpha\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_x \\ \alpha v_y \end{pmatrix}$



Wdh.: Vektorräume - Skalarprodukt

Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ **können mit einander multipliziert werden**

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x^* u_x + v_y^* u_y$$

Im Rellen gilt dann: $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_x u_x + v_y u_y$

Und man findet

$\vec{v} \cdot \vec{v} \equiv \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x^2 + v_y^2 = |\vec{v}|^2$ **Länge des Vektors zum Quadrat! (Norm),**

sowie $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$

Es gilt:

1. $\langle \vec{v}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle$ **Linearität (Teil 1)**
2. $\langle \vec{v}, \alpha\vec{u} \rangle = \alpha \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ **Linearität (Teil 2)**
3. $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^*$ **Symmetrie**

Wdh.: Vektorräume - Basis

Den 2 dimensionalen Raum, kann man sich auch als aufgespannt durch die Basis $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ vorstellen

Definition: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **und** $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit gilt:

1. $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_x \rangle = 1 = \langle \vec{e}_y, \vec{e}_y \rangle$ **und** $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle = 0$

2. **Jeder beliebige Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ **mit** $v_x = \langle \vec{v}, \vec{e}_x \rangle$ **und** $v_y = \langle \vec{v}, \vec{e}_y \rangle$

Wdh.: Vektorräume - Allgemein

Diese anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**

   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$

   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$

   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$

   Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$

   assoziativ $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. **Es gibt eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$**

   $\vec{v} \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda\vec{v} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda|\alpha\rangle \in V$

   Linear 1: $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ **oder** $(\lambda + \mu)|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle + \mu|\alpha\rangle$

   Linear 2: $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$ **oder** $\lambda(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = \lambda|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle$

   $\lambda(\mu)\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ **oder** $\lambda(\mu)|\alpha\rangle) = (\lambda\mu)|\alpha\rangle$

   $1\vec{v} = \vec{v}$ **oder** $1|\alpha\rangle) = |\alpha\rangle$

Wdh.: Vektorräume - Allgemein

Eine Menge V, die die vorherigen Eigenschaften besitzt, heisst ein K-Vektorraum V:

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^2$**: 2-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^3$**: 3-dimensionaler Raum,** $\mathbb{R}^n$**: n-dimensionaler Raum**
2. $\mathbb{L}$**: Raum aller Funktionen**
3. **....**

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine Basis: $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}, \ldots\}$ **und jeder Vektor** $\vec{v}$ **aus dem Vektorraum kann durch diese Basis dargestellt werden** $\vec{v} = \sum_i c_i \overrightarrow{b_i}$

Es kann ein Skalarprodukt (inneres Produkt) definiert werden:

$$V \times V \to K, \qquad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \mapsto \langle\alpha|\beta\rangle$$

$$\langle\alpha|\beta_1 + \beta_2\rangle = \langle\alpha|\beta_1\rangle + \langle\alpha|\beta_2\rangle \quad \textbf{Linearität (Teil 1)}$$

$$\langle\alpha|\lambda\beta\rangle = \lambda\langle\alpha|\beta\rangle \quad \textbf{Linearität (Teil 2)}$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* \quad \textbf{Symmetrie}$$

Wdh.: Vektorräume - Allgemein- Beispiel

Die Menge aller Funktionen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V:

Zeige, dass die Vektorraum Eigenschaften erfüllt sind!

Es gibt eine Basis: $\{b_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$ **ist eine Basis**

Das Skalarprodukt ist definiert als $\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) dx$

Zeige, dass die Skalarprodukt Eigenschaften erfüllt sind!

Insbesondere ist unsere Basis eine Orthonormalbasis, d.h. $\langle b_i \,|\, b_j \rangle = \delta_{ij}$

Jeder Vektor f aus dem Vektorraum kann durch diese Basis dargestellt werden

$$f = \sum_i c_i b_i \text{ und es gilt } c_i = \langle b_i \,|\, f \rangle$$

Dies ist die Fourier-Reihe :-)

Hilbert-Raum

Die Zustände in der Quantenmechanik werden durch Vektoren in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, dem Hilbert-Raum, beschrieben

Hilbert-Raum

Die Zustände in der Quantenmechanik werden durch Vektoren in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, dem Hilbert-Raum, beschrieben

Oft werden die Zustände auch KET oder KET-Vektor genannt $|A\rangle$

Hilbert-Raum

Die Zustände in der Quantenmechanik werden durch Vektoren in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, dem Hilbert-Raum, beschrieben

Oft werden die Zustände auch KET oder KET-Vektor genannt $|A\rangle$

Zu jedem $|A\rangle$**, gibt es einen dualen Vektor oder BRA oder BRA-Vektor** $\langle A|$

Hilbert-Raum

Die Zustände in der Quantenmechanik werden durch Vektoren in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, dem Hilbert-Raum, beschrieben

Oft werden die Zustände auch KET oder KET-Vektor genannt $|A\rangle$

Zu jedem $|A\rangle$**, gibt es einen dualen Vektor oder BRA oder BRA-Vektor** $\langle A|$

Im Vektorraum $\mathbb{R}^2$: Der duale Vektor zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **lautet** $\vec{v}^\dagger = (x^*, y^*)$

Hilbert-Raum

Die Zustände in der Quantenmechanik werden durch Vektoren in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, dem Hilbert-Raum, beschrieben

Oft werden die Zustände auch KET oder KET-Vektor genannt $|A\rangle$

Zu jedem $|A\rangle$**, gibt es einen dualen Vektor oder BRA oder BRA-Vektor** $\langle A|$

Im Vektorraum $\mathbb{R}^2$: Der duale Vektor zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **lautet** $\vec{v}^\dagger = (x^*, y^*)$

Das Skalar-Produkt ist dann das Produkt von dualem Vektor $\langle A|$ **und Vektor** $|B\rangle$

$$\langle A|B\rangle$$

Hilbert-Raum

Die Zustände in der Quantenmechanik werden durch Vektoren in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, dem Hilbert-Raum, beschrieben

Oft werden die Zustände auch KET oder KET-Vektor genannt $|A\rangle$

Zu jedem $|A\rangle$**, gibt es einen dualen Vektor oder BRA oder BRA-Vektor** $\langle A|$

Im Vektorraum $\mathbb{R}^2$**: Der duale Vektor zu** $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **lautet** $\vec{v}^\dagger = (x^*, y^*)$

Das Skalar-Produkt ist dann das Produkt von dualem Vektor $\langle A|$ **und Vektor** $|B\rangle$

$$\langle A|B\rangle$$

Im Vektorraum $\mathbb{R}^2$**:** $\vec{v}^\dagger\vec{v} = (x^*, y^*)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^*x + y^*y$

Hilbert-Raum II

$|\, i \rangle$ **sei eine Basis im Hilbert-Raum,** $\langle i \,|$ **die duale Basis**

Hilbert-Raum II

$|\, i \rangle$ **sei eine Basis im Hilbert-Raum,** $\langle i \,|$ **die duale Basis**

Diese Basis ist orthonormiert, d.h. $\langle i \,|\, j \rangle = \delta_{ij}$

Hilbert-Raum II

$|\,i\rangle$ sei eine Basis im Hilbert-Raum, $\langle i\,|$ die duale Basis

Diese Basis ist orthonormiert, d.h. $\langle i\,|\,j\rangle = \delta_{ij}$

Jeder Zustand $|\,A\rangle$ aus dem Hilbert-Raum kann in dieser Basis dargestellt werden

$$|A\rangle = \sum_i \alpha_i\,|\,i\rangle$$

Hilbert-Raum II

$|i\rangle$ **sei eine Basis im Hilbert-Raum,** $\langle i|$ **die duale Basis**

Diese Basis ist orthonormiert, d.h. $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

Jeder Zustand $|A\rangle$ **aus dem Hilbert-Raum kann in dieser Basis dargestellt werden**

$$|A\rangle = \sum_i \alpha_i |i\rangle$$

Für die Koeffizienten gilt $\alpha_i = \langle i|A\rangle$**, also** $|A\rangle = \sum_i \langle i|A\rangle|i\rangle$

Hilbert-Raum II

$|\,i\rangle$ **sei eine Basis im Hilbert-Raum,** $\langle i\,|$ **die duale Basis**

Diese Basis ist orthonormiert, d.h. $\langle i\,|\,j\rangle = \delta_{ij}$

Jeder Zustand $|\,A\rangle$ **aus dem Hilbert-Raum kann in dieser Basis dargestellt werden**

$$|\,A\rangle = \sum_i \alpha_i\,|\,i\rangle$$

Für die Koeffizienten gilt $\alpha_i = \langle i\,|\,A\rangle$**, also** $|\,A\rangle = \sum_i \langle i\,|\,A\rangle\,|\,i\rangle$

Der duale Zustand $\langle A\,|$ **lautet**

Hilbert-Raum II

$|i\rangle$ **sei eine Basis im Hilbert-Raum,** $\langle i|$ **die duale Basis**

Diese Basis ist orthonormiert, d.h. $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

Jeder Zustand $|A\rangle$ **aus dem Hilbert-Raum kann in dieser Basis dargestellt werden**

$$|A\rangle = \sum_i \alpha_i |i\rangle$$

Für die Koeffizienten gilt $\alpha_i = \langle i|A\rangle$**, also** $|A\rangle = \sum_i \langle i|A\rangle |i\rangle$

Der duale Zustand $\langle A|$ **lautet**

$$\langle A| = \sum_i \alpha_i^* \langle i|$$

Quanten-Zustände

Klassische Physik: Kenntnis des Zustandes reicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen

Quanten-Zustände

Klassische Physik: Kenntnis des Zustandes reicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen

Quanten Physik: Kenntnis des Zustandes reicht nicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen.

Quanten-Zustände

Klassische Physik: Kenntnis des Zustandes reicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen

Quanten Physik: Kenntnis des Zustandes reicht nicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen.

Beispiel: $\sigma_z = +1$**, messe** σ_x

Quanten-Zustände

Klassische Physik: Kenntnis des Zustandes reicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen

Quanten Physik: Kenntnis des Zustandes reicht nicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen.

Beispiel: $\sigma_z = +1$, **messe** σ_x

Maximales Wissen = Kenntnis des Zustandes

Quanten-Zustände

Klassische Physik: Kenntnis des Zustandes reicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen

Quanten Physik: Kenntnis des Zustandes reicht nicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen.

Beispiel: $\sigma_z = +1$, **messe** σ_x

Maximales Wissen = Kenntnis des Zustandes

2 Denkschulen:

Quanten-Zustände

Klassische Physik: Kenntnis des Zustandes reicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen

Quanten Physik: Kenntnis des Zustandes reicht nicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen.

Beispiel: $\sigma_z = +1$, messe σ_x

Maximales Wissen = Kenntnis des Zustandes

2 Denkschulen:

1) **Es gibt versteckte Variablen; wenn wir die auch kennen würden und den Zustand auch damit charakterisieren würden, dann würde die Kenntnis des Zustandes ausreichen, um die Zukunft exakt zu kennen**

Quanten-Zustände

Klassische Physik: Kenntnis des Zustandes reicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen

Quanten Physik: Kenntnis des Zustandes reicht nicht aus, um die Zukunft des Systems exakt zu kennen.

Beispiel: $\sigma_z = +1$, **messe** σ_x

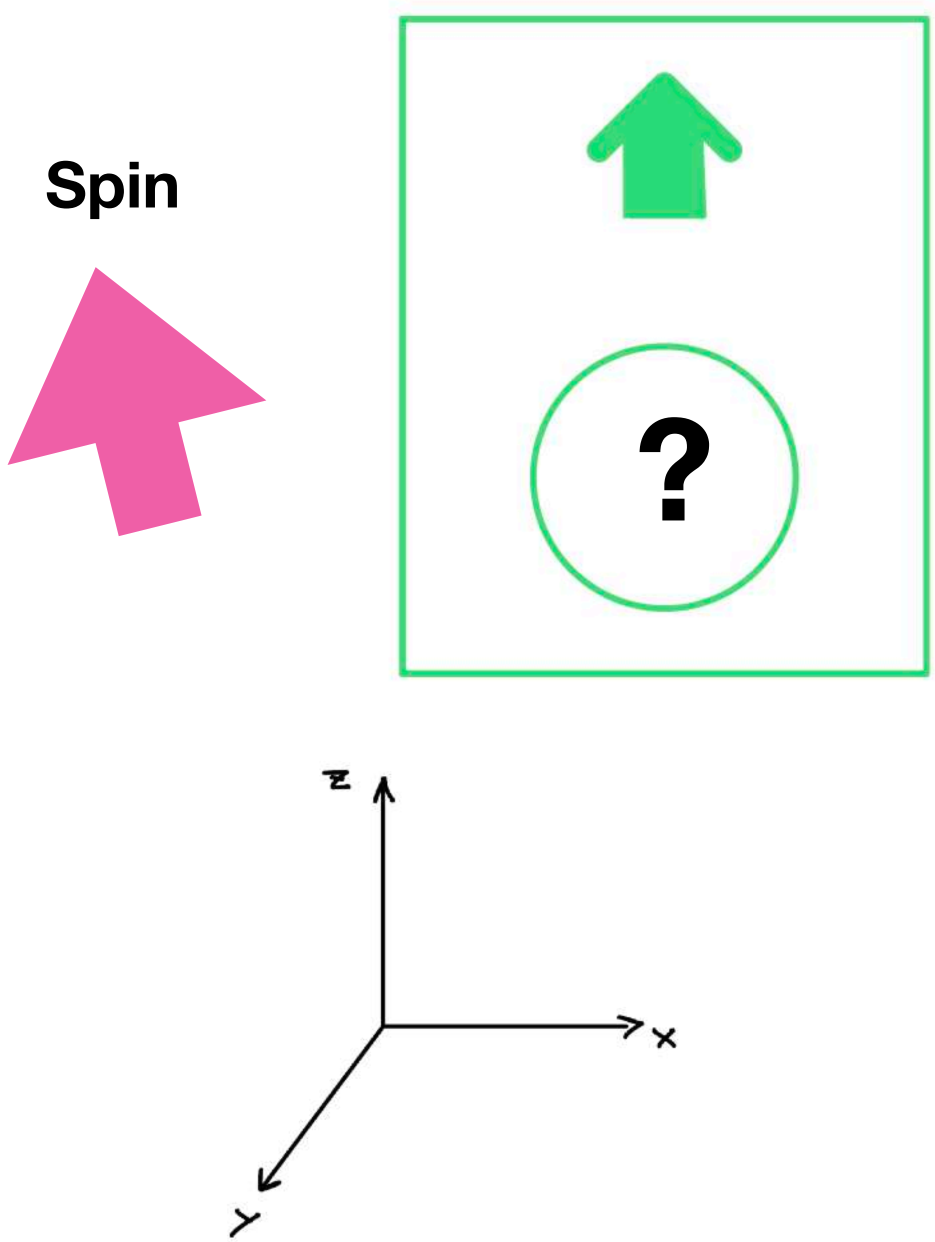
Maximales Wissen = Kenntnis des Zustandes

2 Denkschulen:

1) **Es gibt versteckte Variablen; wenn wir die auch kennen würden und den Zustand auch damit charakterisieren würden, dann würde die Kenntnis des Zustandes ausreichen, um die Zukunft exakt zu kennen**
2) **Natur ist im mikroskopischen nicht deterministisch! That’s it. (Kopenhagener Schule)**

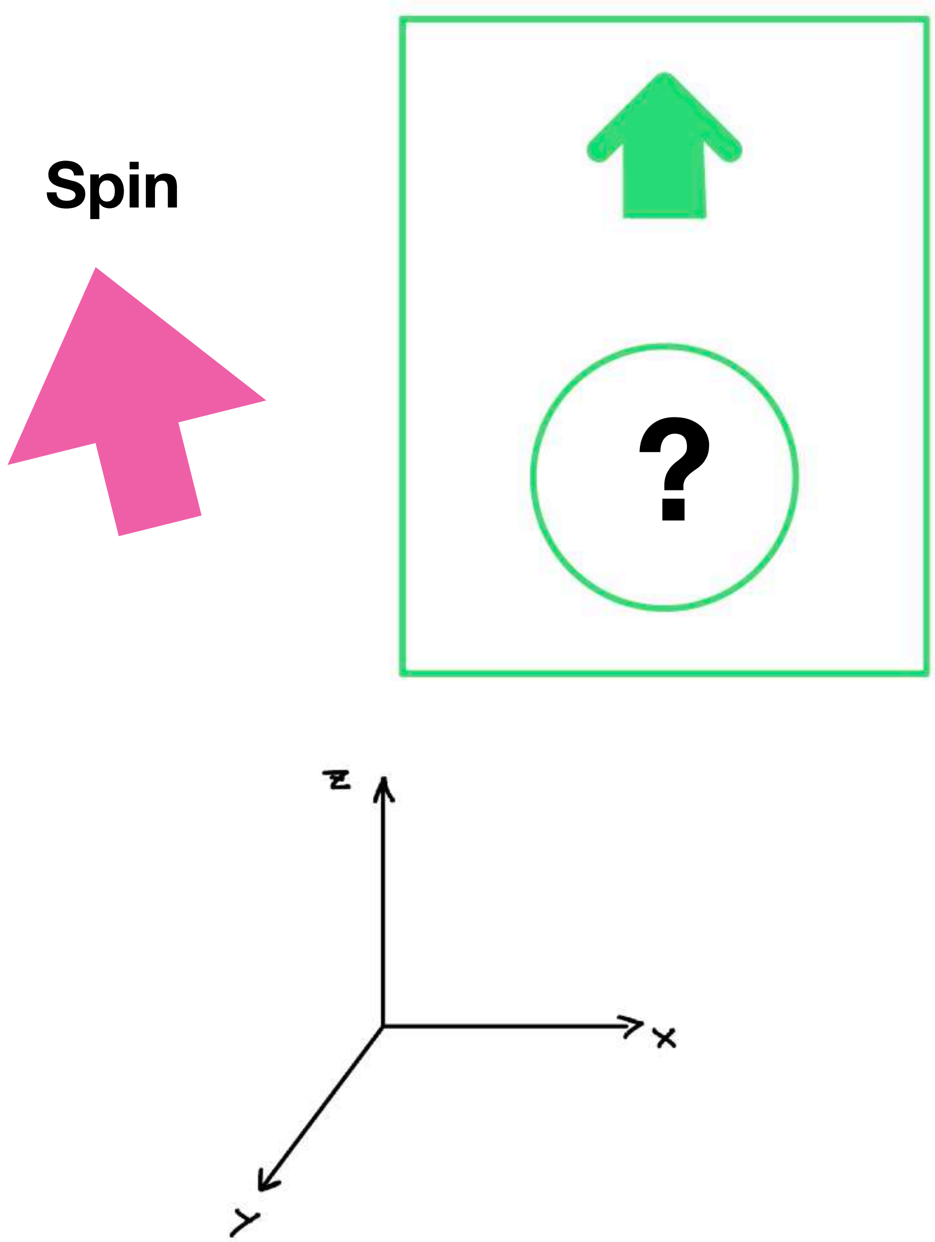
Darstellung des Spin Zustandes

Wenn das Messgerät $\mathscr{A}$ in z-Richtung ausgerichtet ist, dann kann es die Spin-Komponenten $\sigma_z = \pm 1$ messen.



Darstellung des Spin Zuständes

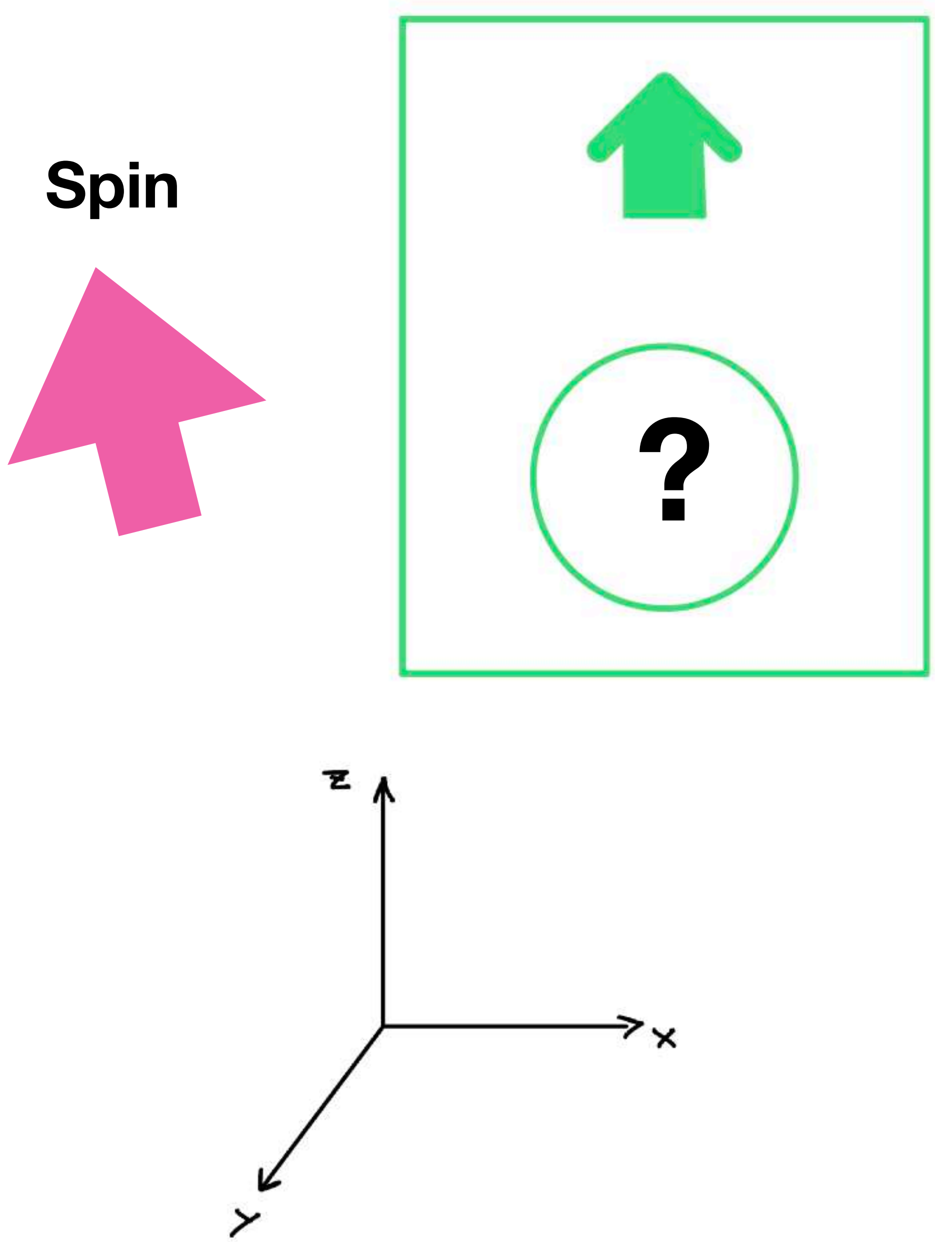
Wenn das Messgerät $\mathscr{A}$ in z-Richtung ausgerichtet ist, dann kann es die Spin-Komponenten $\sigma_z = \pm 1$ messen.



Wir nennen die Spin-Komponenten $\sigma_z = \pm 1$ up und down und bezeichnen die zugehörigen Zustände mit $|u\rangle$ und $|d\rangle$

Darstellung des Spin Zustándes

Wenn das Messgerät $\mathscr{A}$ in z-Richtung ausgerichtet ist, dann kann es die Spin-Komponenten $\sigma_z = \pm 1$ messen.

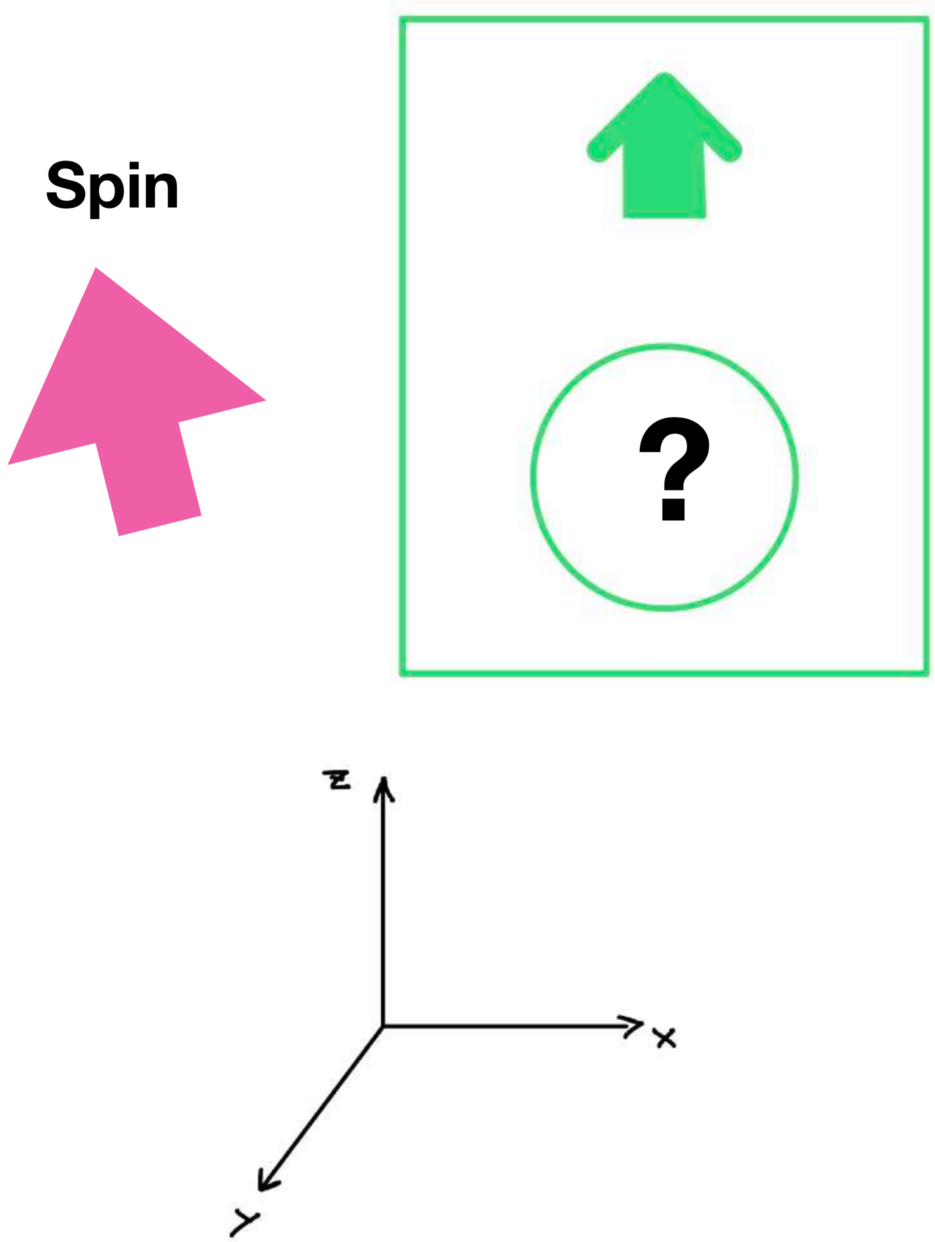


Wir nennen die Spin-Komponenten $\sigma_z = \pm 1$
up und down
und bezeichnen die zugehörigen Zustände mit $|u\rangle$ und $|d\rangle$

Ist das Messgerät $\mathscr{A}$ in z-Richtung ausgerichtet, und man misst $\sigma_z = +1$, dann befindet sich das System nach der Messung im Zustand $|u\rangle$

Darstellung des Spin Zuständes

Wenn das Messgerät $\mathscr{A}$ in z-Richtung ausgerichtet ist, dann kann es die Spin-Komponenten $\sigma_z = \pm 1$ messen.



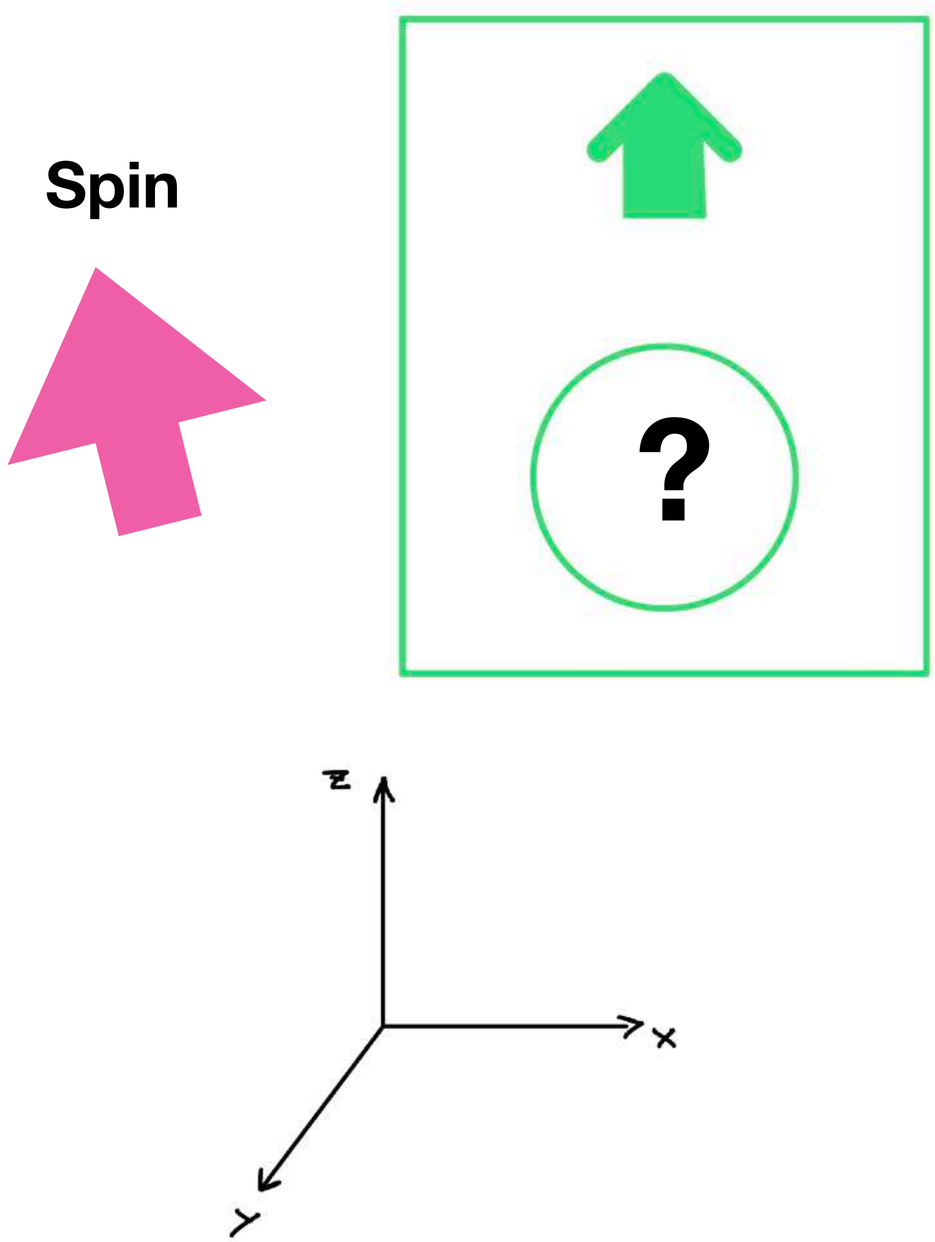
Wir nennen die Spin-Komponenten $\sigma_z = \pm 1$
up und down
und bezeichnen die zugehörigen Zustände mit $|u\rangle$ und $|d\rangle$

Ist das Messgerät $\mathscr{A}$ in z-Richtung ausgerichtet, und man misst $\sigma_z = +1$, dann befindet sich das System nach der Messung im Zustand $|u\rangle$

Ist das Messgerät $\mathscr{A}$ in x-Richtung ausgerichtet, und man misst $\sigma_x = +1$, dann befindet sich das System nach der Messung im Zustand $|r\rangle$ (rechts/links)

Darstellung des Spin Zustandes

Wenn das Messgerät $\mathscr{A}$ in z-Richtung ausgerichtet ist, dann kann es die Spin-Komponenten $\sigma_z = \pm 1$ messen.



Wir nennen die Spin-Komponenten $\sigma_z = \pm 1$
up und down
und bezeichnen die zugehörigen Zustände mit $|u\rangle$ und $|d\rangle$

Ist das Messgerät $\mathscr{A}$ in z-Richtung ausgerichtet, und man misst $\sigma_z = +1$, dann befindet sich das System nach der Messung im Zustand $|u\rangle$

Ist das Messgerät $\mathscr{A}$ in x-Richtung ausgerichtet, und man misst $\sigma_x = +1$, dann befindet sich das System nach der Messung im Zustand $|r\rangle$ (rechts/links)

Ist das Messgerät $\mathscr{A}$ in y-Richtung ausgerichtet, und man misst $\sigma_y = +1$, dann befindet sich das System nach der Messung im Zustand $|o\rangle$ (out/in)

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Quanten-Spin—Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

- **Die Koeffizienten $\alpha_{u,d}$ sind komplexe Zahlen**

Quanten-Spin—Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

- **Die Koeffizienten** $\alpha_{u,d}$ **sind komplexe Zahlen**
- **Postulat:** $|\alpha_{u,d}|^2$ **gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung den Zustand** $|u\rangle$**,** $|d\rangle$ **zu finden**

Quanten-Spin—Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

- **Die Koeffizienten** $\alpha_{u,d}$ **sind komplexe Zahlen**
- **Postulat:** $|\alpha_{u,d}|^2$ **gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung den Zustand** $|u\rangle, |d\rangle$ **zu finden**
- **Die Werte** $\alpha_{u,d}$ **heissen Wahrscheinlichkeitsamplituden**

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

- **Die Koeffizienten** $\alpha_{u,d}$ **sind komplexe Zahlen**
- **Postulat:** $|\alpha_{u,d}|^2$ **gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung den Zustand** $|u\rangle, |d\rangle$ **zu finden**
- **Die Werte** $\alpha_{u,d}$ **heissen Wahrscheinlichkeitsamplituden**
- **Die Wahrscheinlichkeiten können wie folgt dargestellt werden.**
  $|\alpha_u|^2 = \alpha_u^* \alpha_u$

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

- **Die Koeffizienten $\alpha_{u,d}$ sind komplexe Zahlen**
- **Postulat: $|\alpha_{u,d}|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung den Zustand $|u\rangle, |d\rangle$ zu finden**
- **Die Werte $\alpha_{u,d}$ heissen Wahrscheinlichkeitsamplituden**
- **Die Wahrscheinlichkeiten können wie folgt dargestellt werden**
  $|\alpha_u|^2 = \alpha_u^* \alpha_u = \langle A|u\rangle\langle u|A\rangle$

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$$|A\rangle = \alpha_u|u\rangle + \alpha_d|d\rangle = \langle u|A\rangle|u\rangle + \langle d|A\rangle|d\rangle$$

- **Die Koeffizienten** $\alpha_{u,d}$ **sind komplexe Zahlen**
- **Postulat:** $|\alpha_{u,d}|^2$ **gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung den Zustand** $|u\rangle, |d\rangle$ **zu finden**
- **Die Werte** $\alpha_{u,d}$ **heissen Wahrscheinlichkeitsamplituden**
- **Die Wahrscheinlichkeiten können wie folgt dargestellt werden**
  $|\alpha_u|^2 = \alpha_u^*\alpha_u = \langle A|u\rangle\langle u|A\rangle$ **und** $|\alpha_d|^2 = \alpha_d^*\alpha_d = \langle A|d\rangle\langle d|A\rangle$

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

- **Die Koeffizienten $\alpha_{u,d}$ sind komplexe Zahlen**
- **Postulat: $|\alpha_{u,d}|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung den Zustand $|u\rangle, |d\rangle$ zu finden**
- **Die Werte $\alpha_{u,d}$ heissen Wahrscheinlichkeitsamplituden**
- **Die Wahrscheinlichkeiten können wie folgt dargestellt werden**
  $|\alpha_u|^2 = \alpha_u^* \alpha_u = \langle A|u\rangle\langle u|A\rangle$ **und** $|\alpha_d|^2 = \alpha_d^* \alpha_d = \langle A|d\rangle\langle d|A\rangle$
- **Vor der Messung:**

Quanten-Spin — Zustände

z-Achse

Die Aussage, dass es keine versteckten Variablen gibt,

ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Aussage:

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

- **Die Koeffizienten $\alpha_{u,d}$ sind komplexe Zahlen**
- **Postulat: $|\alpha_{u,d}|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung den Zustand $|u\rangle, |d\rangle$ zu finden**
- **Die Werte $\alpha_{u,d}$ heissen Wahrscheinlichkeitsamplituden**
- **Die Wahrscheinlichkeiten können wie folgt dargestellt werden** $|\alpha_u|^2 = \alpha_u^* \alpha_u = \langle A|u\rangle\langle u|A\rangle$ **und** $|\alpha_d|^2 = \alpha_d^* \alpha_d = \langle A|d\rangle\langle d|A\rangle$
- **Vor der Messung: das System befindet sich im Zustand $|A\rangle$**

Quanten-Spin — Zustände II

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

Quanten-Spin — Zustände II

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

Bemerkungen:

- **Die Zustände $|u\rangle$ und $|d\rangle$ sind orthogonal, d.h. $\langle u|d\rangle = 0 = \langle d|u\rangle$, d.h. wenn der Zustand gleich $|u\rangle$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit $|d\rangle$ zu finden gleich Null!**

Quanten-Spin — Zustände II

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

Bemerkungen:

- **Die Zustände** $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$ **sind orthogonal, d.h.** $\langle u|d\rangle = 0 = \langle d|u\rangle$**, d.h. wenn der Zustand gleich** $|u\rangle$ **ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit** $|d\rangle$ **zu finden gleich Null!**

- **Es muss gelten:** $|\alpha_u|^2 + |\alpha_d|^2 = 1$**, d.h. es gibt 2 mögliche Messergebnisse und die Summe der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beträgt eins! D.h. es kommt immer ein Messergebnis raus.**

Quanten-Spin — Zustände II

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

Bemerkungen:

- **Die Zustände** $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$ **sind orthogonal, d.h.** $\langle u|d\rangle = 0 = \langle d|u\rangle$**, d.h. wenn der Zustand gleich** $|u\rangle$ **ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit** $|d\rangle$ **zu finden gleich Null!**

- **Es muss gelten:** $|\alpha_u|^2 + |\alpha_d|^2 = 1$**, d.h. es gibt 2 mögliche Messergebnisse und die Summe der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beträgt eins! D.h. es kommt immer ein Messergebnis raus.**

- **Ein allgemeiner Zustand ist auf eins normiert** $\langle A|A\rangle =$

Quanten-Spin—Zustände II

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **kann in dieser Basis dargestellt werden als**

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

Bemerkungen:

- **Die Zustände** $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$ **sind orthogonal, d.h.** $\langle u|d\rangle = 0 = \langle d|u\rangle$**, d.h. wenn der Zustand gleich** $|u\rangle$ **ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit** $|d\rangle$ **zu finden gleich Null!**

- **Es muss gelten:** $|\alpha_u|^2 + |\alpha_d|^2 = 1$**, d.h. es gibt 2 mögliche Messergebnisse und die Summe der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beträgt eins! D.h. es kommt immer ein Messergebnis raus.**

- **Ein allgemeiner Zustand ist auf eins normiert**
$\langle A|A\rangle = \alpha_u^*\alpha_u\langle u|u\rangle + \alpha_d^*\alpha_u\langle d|u\rangle + \alpha_u^*\alpha_d\langle u|d\rangle + \alpha_d^*\alpha_d\langle d|d\rangle$

Quanten-Spin—Zustände II

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

Bemerkungen:

- **Die Zustände $|u\rangle$ und $|d\rangle$ sind orthogonal, d.h. $\langle u|d\rangle = 0 = \langle d|u\rangle$, d.h. wenn der Zustand gleich $|u\rangle$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit $|d\rangle$ zu finden gleich Null!**

- **Es muss gelten: $|\alpha_u|^2 + |\alpha_d|^2 = 1$, d.h. es gibt 2 mögliche Messergebnisse und die Summe der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beträgt eins! D.h. es kommt immer ein Messergebnis raus.**

- **Ein allgemeiner Zustand ist auf eins normiert**
  $$\langle A|A\rangle = \alpha_u^* \alpha_u \underbrace{\langle u|u\rangle}_{=1} + \alpha_d^* \alpha_u \underbrace{\langle d|u\rangle}_{=0} + \alpha_u^* \alpha_d \underbrace{\langle u|d\rangle}_{=0} + \alpha_d^* \alpha_d \underbrace{\langle d|d\rangle}_{=1}$$

Quanten-Spin—Zustände II

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

Bemerkungen:

- **Die Zustände $|u\rangle$ und $|d\rangle$ sind orthogonal, d.h. $\langle u|d\rangle = 0 = \langle d|u\rangle$, d.h. wenn der Zustand gleich $|u\rangle$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit $|d\rangle$ zu finden gleich Null!**

- **Es muss gelten: $|\alpha_u|^2 + |\alpha_d|^2 = 1$, d.h. es gibt 2 mögliche Messergebnisse und die Summe der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beträgt eins! D.h. es kommt immer ein Messergebnis raus.**

- **Ein allgemeiner Zustand ist auf eins normiert**
  $$\langle A|A\rangle = \alpha_u^* \alpha_u \underbrace{\langle u|u\rangle}_{=1} + \alpha_d^* \alpha_u \underbrace{\langle d|u\rangle}_{=0} + \alpha_u^* \alpha_d \underbrace{\langle u|d\rangle}_{=0} + \alpha_d^* \alpha_d \underbrace{\langle d|d\rangle}_{=1} = 1$$

Quanten-Spin — Zustände II

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ und $|d\rangle$
Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in dieser Basis dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \langle u|A\rangle |u\rangle + \langle d|A\rangle |d\rangle$$

Bemerkungen:

- **Die Zustände $|u\rangle$ und $|d\rangle$ sind orthogonal, d.h. $\langle u|d\rangle = 0 = \langle d|u\rangle$, d.h. wenn der Zustand gleich $|u\rangle$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit $|d\rangle$ zu finden gleich Null! Orthogonalität ist hier nicht räumlich gedacht**

- **Es muss gelten: $|\alpha_u|^2 + |\alpha_d|^2 = 1$, d.h. es gibt 2 mögliche Messergebnisse und die Summe der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beträgt eins! D.h. es kommt immer ein Messergebnis raus.**

- **Ein allgemeiner Zustand ist auf eins normiert**
$$\langle A|A\rangle = \alpha_u^*\alpha_u \underbrace{\langle u|u\rangle}_{=1} + \alpha_d^*\alpha_u \underbrace{\langle d|u\rangle}_{=0} + \alpha_u^*\alpha_d \underbrace{\langle u|d\rangle}_{=0} + \alpha_d^*\alpha_d \underbrace{\langle d|d\rangle}_{=1} = 1$$

Quanten-Spin — Zustände III

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$

Quanten-Spin — Zustände III

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **bei dem** $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$ **gleichwahrscheinlich sind, lautet:**

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

Quanten-Spin—Zustände III

z-Achse

Der Zustandsraum für einen einzelnen Spin ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Dieser wird aufgespannt durch die Basis-Vektoren $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **bei dem** $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$ **gleichwahrscheinlich sind, lautet:**

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

Beachte: dies ist nicht die einzige Möglichkeit

$$|\tilde{A}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

Quanten-Spin — Zustände IV

x,y,z-Achse

Der 2-dimensionaler Vektorraum kann auch nicht nur durch die Basis-Vektoren {$|u\rangle$, $|d\rangle$}, aufgespannt werden.

Quanten-Spin — Zustände IV

x,y,z-Achse

Der 2-dimensionaler Vektorraum kann auch nicht nur durch die Basis-Vektoren {$|u\rangle, |d\rangle$}, sondern auch durch die Basis-Vektoren {$|l\rangle, |r\rangle$} oder {$|i\rangle, |o\rangle$} aufgespannt werden.

Quanten-Spin — Zustände IV

x,y,z-Achse

Der 2-dimensionaler Vektorraum kann auch nicht nur durch die Basis-Vektoren {$|u\rangle$, $|d\rangle$}, sondern auch durch die Basis-Vektoren {$|l\rangle$, $|r\rangle$} oder {$|i\rangle$, $|o\rangle$} aufgespannt werden.

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ lautet:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Quanten-Spin—Zustände IV

x,y,z-Achse

Der 2-dimensionaler Vektorraum kann auch nicht nur durch die Basis-Vektoren {$|u\rangle, |d\rangle$}, sondern auch durch die Basis-Vektoren {$|l\rangle, |r\rangle$} oder {$|i\rangle, |o\rangle$} aufgespannt werden.

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ lautet:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

$$|A\rangle = \beta_l |l\rangle + \beta_r |r\rangle$$

Quanten-Spin — Zustände IV

x,y,z-Achse

Der 2-dimensionaler Vektorraum kann auch nicht nur durch die Basis-Vektoren {$|u\rangle, |d\rangle$}, sondern auch durch die Basis-Vektoren {$|l\rangle, |r\rangle$} oder {$|i\rangle, |o\rangle$} aufgespannt werden.

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ lautet:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

$$|A\rangle = \beta_l |l\rangle + \beta_r |r\rangle$$

$$|A\rangle = \gamma_i |i\rangle + \gamma_o |o\rangle$$

Quanten-Spin — Zustände IV

x,y,z-Achse

Der 2-dimensionaler Vektorraum kann auch nicht nur durch die Basis-Vektoren {$|u\rangle, |d\rangle$}, sondern auch durch die Basis-Vektoren {$|l\rangle, |r\rangle$} oder {$|i\rangle, |o\rangle$} aufgespannt werden.

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ lautet:

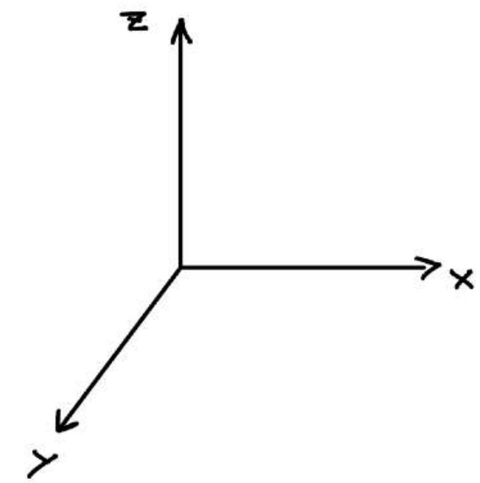
$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

$$|A\rangle = \beta_l |l\rangle + \beta_r |r\rangle$$

$$|A\rangle = \gamma_i |i\rangle + \gamma_o |o\rangle$$

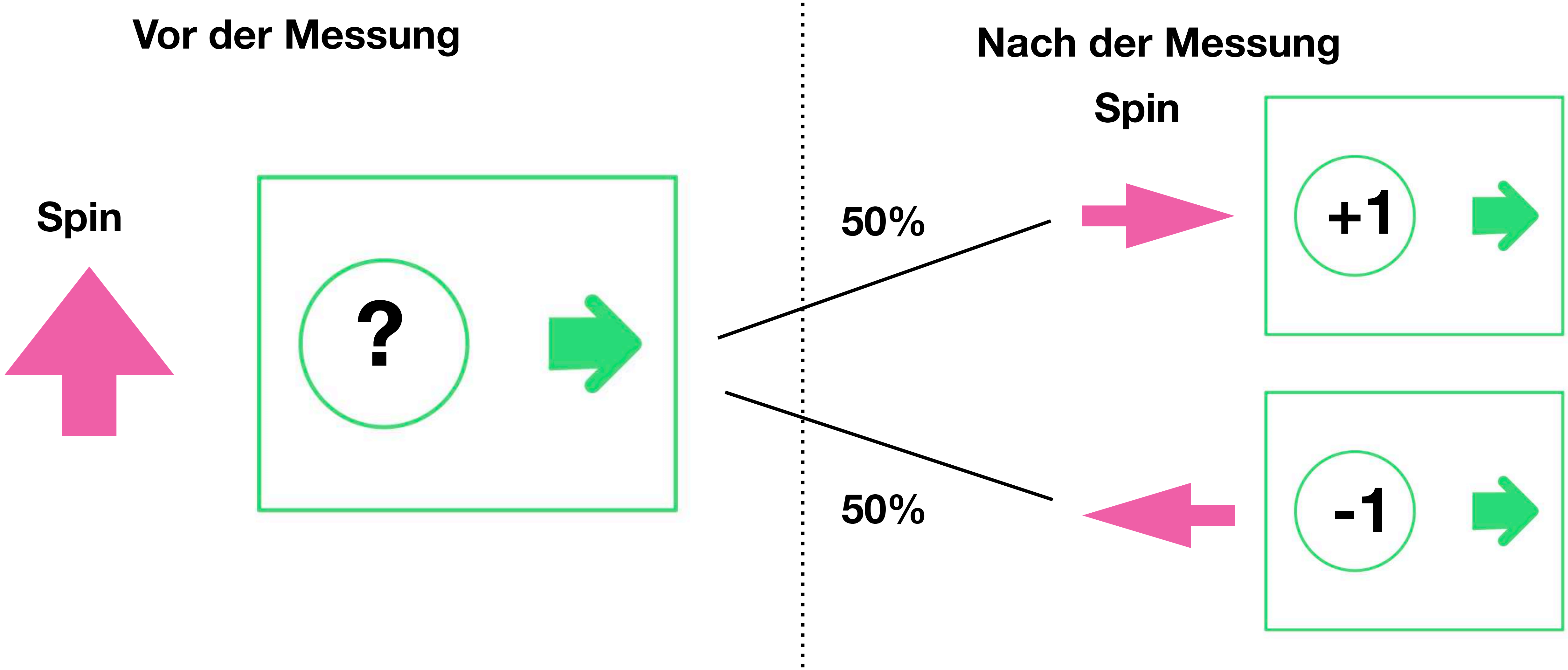
Wie kann man von einer Basis in eine andere wechseln?

Wdh.: 1 Quanten Bit



Beispiele für Messergebnisse:

Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin



Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz
sondern eine experimentelle Tatsache,
die nun verstanden/interpretiert werden muss

Quanten-Spin — Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Quanten-Spin — Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Quanten-Spin — Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Wie stellt man den $|d\rangle$ Zustand dar?

Quanten-Spin — Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Wie stellt man den $|d\rangle$ Zustand dar?

Der sollte wieder zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen bestehen,

Quanten-Spin — Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Wie stellt man den $|d\rangle$ Zustand dar?

Der sollte wieder zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen bestehen,

Aber er sollte orthogonal zu $|u\rangle$ sein….

Quanten-Spin—Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Wie stellt man den $|d\rangle$ Zustand dar?
Der sollte wieder zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen bestehen,
Aber er sollte orthogonal zu $|u\rangle$ sein….

$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Quanten-Spin—Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Wie stellt man den $|d\rangle$ Zustand dar?

Der sollte wieder zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen bestehen,

Aber er sollte orthogonal zu $|u\rangle$ sein….

$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

$$\langle u|d\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle r| + \langle l|\Big)\Big(|r\rangle - |l\rangle\Big)$$

Quanten-Spin — Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Wie stellt man den $|d\rangle$ Zustand dar?

Der sollte wieder zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen bestehen,

Aber er sollte orthogonal zu $|u\rangle$ sein….

$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

$$\langle u|d\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle r| + \langle l|\right)\left(|r\rangle - |l\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\langle r|r\rangle + \langle l|r\rangle - \langle r|l\rangle - \langle l|l\rangle\right)$$

Quanten-Spin — Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Wie stellt man den $|d\rangle$ Zustand dar?

Der sollte wieder zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen bestehen,

Aber er sollte orthogonal zu $|u\rangle$ sein….

$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

$$\langle u|d\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle r| + \langle l|\right)\left(|r\rangle - |l\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\langle r|r\rangle + \langle l|r\rangle - \langle r|l\rangle - \langle l|l\rangle\right) = 0$$

Quanten-Spin—Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Wie stellt man den $|d\rangle$ Zustand dar?

Der sollte wieder zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen bestehen,

Aber er sollte orthogonal zu $|u\rangle$ sein....

$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

$$\langle u|d\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle r| + \langle l|\right)\left(|r\rangle - |l\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\langle r|r\rangle + \langle l|r\rangle - \langle r|l\rangle - \langle l|l\rangle\right) = 0$$

Damit gilt auch $|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$ **und** $|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$

Quanten-Spin — Zustände V

x-Achse

Ein reiner $|u\rangle$ Zustand, besteht also zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen

Daher kann man schreiben

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Wie stellt man den $|d\rangle$ Zustand dar?
Der sollte wieder zu gleichen Teilen aus $|l\rangle$ und $|r\rangle$ Zuständen bestehen,
Aber er sollte orthogonal zu $|u\rangle$ sein….

$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle \Rightarrow \langle u|d\rangle = 0$$

Damit gilt auch $|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$ **und** $|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$

sowie $\langle r|l\rangle = 0$, $\langle r|r\rangle = 1 = \langle l|l\rangle$

Quanten-Spin—Zustände VI

Eindeutigkeit der Zustände

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in der Basis $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Quanten-Spin—Zustände VI

Eindeutigkeit der Zustände

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ **kann in der Basis** $|u\rangle$ **und** $|d\rangle$ **dargestellt werden als**

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Ein allgemeiner Zustand ist auf eins normiert $\langle A | A\rangle = \alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d^* \alpha_d = 1$

Quanten-Spin—Zustände VI

Eindeutigkeit der Zustände

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in der Basis $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Ein allgemeiner Zustand ist auf eins normiert $\langle A|A\rangle = \alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d^* \alpha_d = 1$

Multipliziert man den Zustand $|A\rangle$ mit einer Zahl $z = e^{i\theta}$ (Phase), dann bleibt die Relation $\langle A|A\rangle = \alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d^* \alpha_d = 1$ unverändert

Quanten-Spin—Zustände VI

Eindeutigkeit der Zustände

Ein allgemeiner Zustand $|A\rangle$ kann in der Basis $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden als

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Ein allgemeiner Zustand ist auf eins normiert $\langle A|A\rangle = \alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d^* \alpha_d = 1$

Multipliziert man den Zustand $|A\rangle$ mit einer Zahl $z = e^{i\theta}$ (Phase), dann bleibt die Relation $\langle A|A\rangle = \alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d^* \alpha_d = 1$ unverändert

D.h. Zustände sind also nur bis auf eine Phase eindeutig bestimmt

Quanten-Spin — Zustände VII

y-Achse

Wie können nun die $|i\rangle$ und $|o\rangle$ Zustände durch $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden?

Quanten-Spin — Zustände VII

y-Achse

Wie können nun die $|i\rangle$ und $|o\rangle$ Zustände durch $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden?

- **Ein reiner $|i\rangle$ Zustand, besteht wieder zu gleichen Teilen aus $|u\rangle$ und $|d\rangle$ Zuständen.**

Quanten-Spin—Zustände VII

y-Achse

Wie können nun die $|i\rangle$ und $|o\rangle$ Zustände durch $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden?

- **Ein reiner $|i\rangle$ Zustand, besteht wieder zu gleichen Teilen aus $|u\rangle$ und $|d\rangle$ Zuständen. Daher könnte man versuchen zu schreiben**
  $$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

Quanten-Spin — Zustände VII

y-Achse

Wie können nun die $|i\rangle$ und $|o\rangle$ Zustände durch $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden?

- **Ein reiner $|i\rangle$ Zustand, besteht wieder zu gleichen Teilen aus $|u\rangle$ und $|d\rangle$ Zuständen. Daher könnte man versuchen zu schreiben**
  $$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$
  Dann wäre aber der Zustand $|i\rangle$ gleich dem Zustand $|r\rangle$!

Quanten-Spin — Zustände VII

y-Achse

Wie können nun die $|i\rangle$ und $|o\rangle$ Zustände durch $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden?

- **Ein reiner $|i\rangle$ Zustand, besteht wieder zu gleichen Teilen aus $|u\rangle$ und $|d\rangle$ Zuständen. Daher könnte man versuchen zu schreiben**

  $$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

  Dann wäre aber der Zustand $|i\rangle$ gleich dem Zustand $|r\rangle$!

- **Man findet als einzige unabhängige Möglichkeit die Einführung von komplexen Koeffizienten**

Quanten-Spin — Zustände VII

y-Achse

Wie können nun die $|i\rangle$ und $|o\rangle$ Zustände durch $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden?

- **Ein reiner $|i\rangle$ Zustand, besteht wieder zu gleichen Teilen aus $|u\rangle$ und $|d\rangle$ Zuständen. Daher könnte man versuchen zu schreiben**
  $$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$
  Dann wäre aber der Zustand $|i\rangle$ gleich dem Zustand $|r\rangle$!

- **Man findet als einzige unabhängige Möglichkeit die Einführung von komplexen Koeffizienten** $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle$, $|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle$.

Quanten-Spin — Zustände VII

y-Achse

Wie können nun die $|i\rangle$ und $|o\rangle$ Zustände durch $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden?

- **Ein reiner $|i\rangle$ Zustand, besteht wieder zu gleichen Teilen aus $|u\rangle$ und $|d\rangle$ Zuständen. Daher könnte man versuchen zu schreiben**
  $$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$
  Dann wäre aber der Zustand $|i\rangle$ gleich dem Zustand $|r\rangle$!

- **Man findet als einzige unabhängige Möglichkeit die Einführung von komplexen Koeffizienten** $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle$, $|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle$.
  In der Quantenmechanik braucht man komplexe Zahlen!

Quanten-Spin — Zustände VII

y-Achse

Wie können nun die $|i\rangle$ und $|o\rangle$ Zustände durch $|u\rangle$ und $|d\rangle$ dargestellt werden?

- **Ein reiner $|i\rangle$ Zustand, besteht wieder zu gleichen Teilen aus $|u\rangle$ und $|d\rangle$ Zuständen. Daher könnte man versuchen zu schreiben**
  $$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$
  Dann wäre aber der Zustand $|i\rangle$ gleich dem Zustand $|r\rangle$!

- **Man findet als einzige unabhängige Möglichkeit die Einführung von komplexen Koeffizienten** $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle$, $|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle$.
  In der Quantenmechanik braucht man komplexe Zahlen!

- **Diese Zustände sind wieder orthonormal** $\langle i|o\rangle = 0$, $\langle i|i\rangle = 1 = \langle o|o\rangle$

Quanten-Spin — Zustände VII

y-Achse

Exercise 2.3: For the moment, forget that Eqs. 2.10 give us working definitions for $|i\rangle$ and $|o\rangle$ in terms of $|u\rangle$ and $|d\rangle$, and assume that the components α, β, γ, and δ are unknown:

$$|i\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|d\rangle$$

$$|o\rangle = \gamma|u\rangle + \delta|d\rangle.$$

a) Use Eqs. 2.8 to show that

$$\alpha^*\alpha = \beta^*\beta = \gamma^*\gamma = \delta^*\delta = \frac{1}{2}.$$

b) Use the above result and Eqs. 2.9 to show that

$$\alpha^*\beta + \alpha\beta^* = \gamma^*\delta + \gamma\delta^* = 0.$$

c) Show that $\alpha^*\beta$ and $\gamma^*\delta$ must each be pure imaginary.

If $\alpha^*\beta$ is pure imaginary, then α and β cannot both be real. The same reasoning applies to $\gamma^*\delta$.