2 Q 2 5

Quantum2025

https://www.quantum2025.de

Universität Siegen

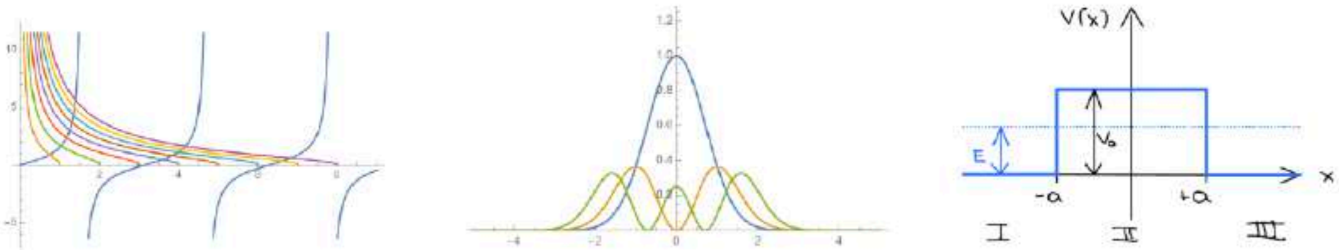

Schrödinger's Katze am Emmy Noether Campus: sie lebt!

Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Ankündigung für das Sommersemester 2025

Das theoretische Minimum II

Quantenmechanik - Prof. Dr. Alexander Lenz, 4PHY00011V



Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundprinzipen der theoretischen Physik.

2025 wird weltweit das 100 jährige Jubiläum der Entdeckung der Quantenmechanik gefeiert. Ursprünglich war dies über viele Jahrzehnte lang reinste Grundlagenforschung ohne jegliche Hinweise auf potentielle Anwendungen. 100 Jahre später finden wir, dass ein Großteil der technologischen Errungenschaften der Menschheit im letzten Jahrhundert auf der Quantenmechanik basiert - zuletzt gipfelte dies in den ersten Quantencomputern.

Im Sommersemester 2025 beschäftigen wir uns daher mit einer Einführung in die Grundprinzipien der Quantenmechanik:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x},t)$$

Die Vorlesung richtet sich an Mittwochsakademiker, Oberstufenschülerinnen und -schüler, Lehrkräfte und Physikenthusiasten mit einem großen Interesse an aktuellen Themen der Physik. Es werden mathematische Konzepte (auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe) eingeführt und benutzt. Die Vorlesung ist an die erfolgreiche Vorlesungs- und Buchreihe "**The theoretical Minimum**" von Leonard Susskind angelehnt, welche auf dieselbe Zielgruppe ausgerichtet war. Vom Niveau her wird sich die Veranstaltung auf dem schmalen Grat zwischen einer rein populärwissenschaftlichen Bildershow und einer theoretischen Physikvorlesung im Bachelorstudium bewegen.

11 Termine im Sommersemester 25:
7.5., 14.5., 21.5., 28.5., 4.6., 11.6., 18.6., 25.6., 2.7., 9.7., 16.7.
Mittwochs 16-18
Emmy Noether Campus ENC-D-114
Infos unter: alexander.lenz@uni-siegen.de
https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/

SUBATOMIC HEROES

Termine:

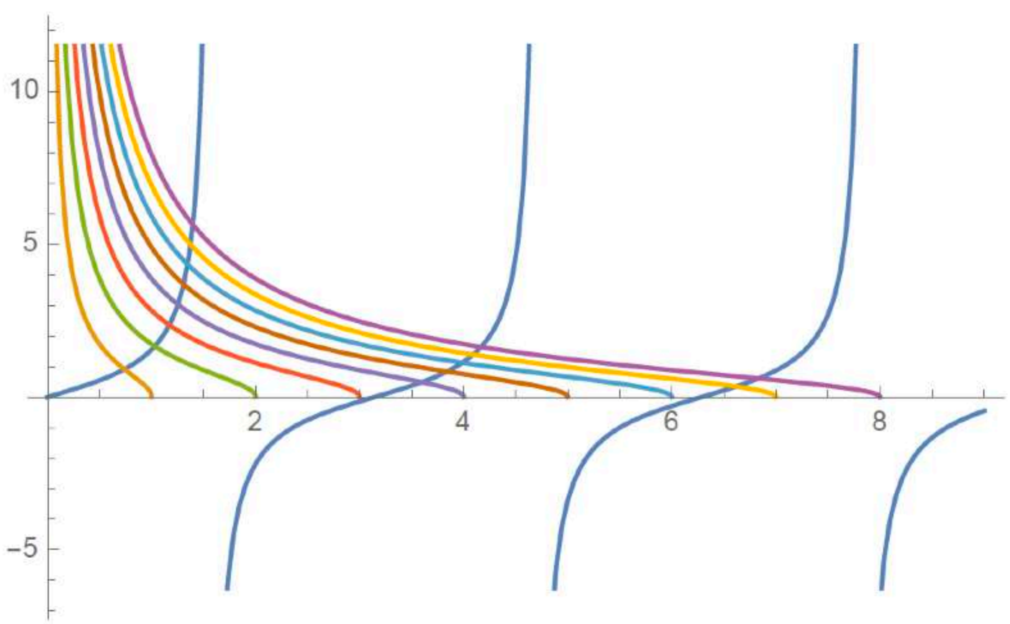
7.5:
14.5:
21.5:
28.5: - - -
4.6:
11.6:
18.6:
25.6: Prof. Tao Han
2.7:
9.7:
+ Oppenheimer
16.7:


Prof. Dr. Tao Han forscht mit Unterstützung der Humboldt-Stiftung an der Uni Siegen.

Vorlesung: Das theoretisc
Mittwochsakade

Ablauf

7.5.: Einführung
14.5.: Zustände, Vektorräume
21.5.: Grundprinzipien der QM
28.5.: -
4.6.: Zeitentwicklung
11.6.: Unschärferelation
18.6.: Verschränkung
25.6.: **Festkolloquium: Prof. Tao Han**
2.7.: Teilchen und Wellen
9.7.: Dynamik **+ Film: Oppenheimer**
16.7.: Harmonischer Oszillator

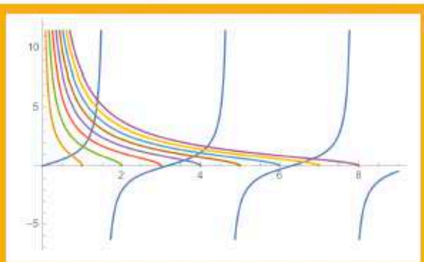


Streuung an Kastenpotential

100 Jahre Quantentheorie
ENC Sommerfest Mi. 25.6.2025, 17:00 Uhr

Schrödinger's Katze am Emmy Noether Campus: sie lebt!

2025 marks 100 years since the birth of quantum mechanics — a scientific revolution that reshaped our understanding of nature at its most fundamental level.
We will trace its origins from pioneering work of Heisenberg, Schrödinger, and Dirac to its modern formulation in quantum field theory — the language of particle physics and the Standard Model, and the transformative technologies powering the modern world, from semiconductors and lasers to quantum computing.
Alongside the historical journey, we will explore key concepts in quantum mechanics and quantum fields, the philosophical questions they pose, and how ongoing research continues to push the boundaries of what we know.



17:00 Vortrag: Prof. Dr. Tao Han **Centennial Celebration: Quantum mechanics, Quantum field theory and More**

18:00 **ENC Sommerfest: Für Musik, Getränke und Essen ist gesorgt!**

Tao Han is Distinguished Professor at the University of Pittsburgh, and the founding Director of the Pittsburgh Particle Physics, Astrophysics and Cosmology Center. He received his PhD from the University of Wisconsin-Madison in 1990. He was a Research Associate at Fermilab and a National SSC Fellow. He was appointed an Assistant and later Associate Professor at UC Davis in 1993. He returned to UW Madison to be promoted to Full Professor, and served as Co-Director for the "Phenomenology Institute" until 2011, when he relocated to Pittsburgh.
Tao Han's research has focused on new physics exploration at colliders, phenomenological formulation of theoretical models. He contributed to Higgs physics and other new physics searches at the CERN Large Hadron Collider. He has been involved in exploring physics potentials for various future high-energy colliders, such as the International Linear Collider (ILC), the Future Circular Collider (Fcc), and the muon collider.
Tao Han was elected a Fellow of APS in 2003 and a Fellow of AAAS in 2019. Among other prizes he won an Alexander von Humboldt Research Award in 2024.

He was 2021 Chair of APS Division of Particles and Fields, Chair for the 2020 APS April Meeting, and on the Chair-line and Steering Committee for the US particle physics Community Planning Exercise of Snowmass 2021.

Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Emmy Noether Campus
Hörsaal ENC-D114
Walter Flex Str. 3
57072 Siegen

Universität Siegen

Wdh.: Vektorräume - Allgemein

Diese anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**

   $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$

   kommutativ $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$

   Nullelement $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$

   Inverses $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$

   assoziativ $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. **Es gibt eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$**

   $\vec{v} \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda\vec{v} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda|\alpha\rangle \in V$

   Linear 1: $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ **oder** $(\lambda + \mu)|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle + \mu|\alpha\rangle$

   Linear 2: $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$ **oder** $\lambda(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = \lambda|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle$

   $\lambda(\mu)\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ **oder** $\lambda(\mu)|\alpha\rangle) = (\lambda\mu)|\alpha\rangle$

   $1\vec{v} = \vec{v}$ **oder** $1|\alpha\rangle) = |\alpha\rangle$

Wdh.: Vektorräume - Allgemein

Eine Menge V, die die vorherigen Eigenschaften besitzt, heisst ein K-Vektorraum V:

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^2$: 2-dimensionaler Raum, $\mathbb{R}^3$: 3-dimensionaler Raum, $\mathbb{R}^n$: n-dimensionaler Raum
2. $\mathbb{L}$: Raum aller Funktionen
3. ....

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine Basis: $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}, \ldots\}$ und jeder Vektor $\vec{v}$ aus dem Vektorraum kann durch diese Basis dargestellt werden $\vec{v} = \sum_i c_i \overrightarrow{b_i}$

Es kann ein Skalarprodukt (inneres Produkt) definiert werden:

$$V \times V \to K, \qquad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \mapsto \langle\alpha|\beta\rangle$$

$$\langle\alpha|\beta_1 + \beta_2\rangle = \langle\alpha|\beta_1\rangle + \langle\alpha|\beta_2\rangle$$ **Linearität (Teil 1)**

$$\langle\alpha|\lambda\beta\rangle = \lambda\langle\alpha|\beta\rangle$$ **Linearität (Teil 2)**

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$$ **Symmetrie**

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\overrightarrow{w}$:

1. **Sichtweise:** $V \times V \to K$**,**
   $(\vec{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \overrightarrow{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \overrightarrow{w}$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\overrightarrow{w}$:

1. **Sichtweise:** $V \times V \to K$,
   $(\vec{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \overrightarrow{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \overrightarrow{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \ldots$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

1. **Sichtweise:** $V \times V \to K$**,**
   $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \vec{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \dots$

Zum Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^*

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\overrightarrow{w}$:

1. **Sichtweise:** $V \times V \to K$**,**
   $(\vec{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \overrightarrow{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \overrightarrow{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \dots$

Zum Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^*

$$\forall \ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \end{pmatrix} \in V$$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

1. **Sichtweise:** $V \times V \to K$**,**
   $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \vec{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \ldots$

Zum Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^*

$\forall \; \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \ldots \end{pmatrix} \in V$ **gibt es einen dualen Vektor** $(\vec{v}^T)^* = \begin{pmatrix} v_1^*, & v_2^*, & v_3^*, & \ldots \end{pmatrix} \in V^*$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

1. **Sichtweise:** $V \times V \to K$,
   $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \vec{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \dots$

Zum Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^*

$\forall \ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \end{pmatrix} \in V$ **gibt es einen dualen Vektor** $(\vec{v}^T)^* = \begin{pmatrix} v_1^*, & v_2^*, & v_3^*, & \dots \end{pmatrix} \in V^*$

Oft wird $\vec{v}$ mit $|v\rangle$ bezeichnet und $(\vec{v}^T)^*$ mit $\langle v|$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

1. **Sichtweise:** $V \times V \to K$,
   $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \vec{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \dots$

Zum Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^*

$\forall\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \end{pmatrix} \in V$ **gibt es einen dualen Vektor** $(\vec{v}^T)^* = \begin{pmatrix} v_1^*, & v_2^*, & v_3^*, & \dots \end{pmatrix} \in V^*$

Oft wird $\vec{v}$ mit $|\, v \rangle$ bezeichnet und $(\vec{v}^T)^*$ mit $\langle v \,|$

2. **Sichtweise:** $V^* \times V \to K$,
   $((\vec{v}^T)^*, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

1. **Sichtweise:** $V \times V \to K$**,**
   $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \vec{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \ldots$

Zum Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^*

$\forall\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \ldots \end{pmatrix} \in V$ **gibt es einen dualen Vektor** $(\vec{v}^T)^* = \begin{pmatrix} v_1^*, & v_2^*, & v_3^*, & \ldots \end{pmatrix} \in V^*$

Oft wird $\vec{v}$ mit $|\, v \rangle$ bezeichnet und $(\vec{v}^T)^*$ mit $\langle v \,|$

2. **Sichtweise:** $V^* \times V \to K$**,**
   $((\vec{v}^T)^*, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv (\vec{v}^T)^* \cdot \vec{w}$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

1. Sichtweise: $V \times V \to K$,
$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \vec{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \dots$

Zum Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^*

$\forall \; \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \end{pmatrix} \in V$ **gibt es einen dualen Vektor** $(\vec{v}^T)^* = \begin{pmatrix} v_1^*, & v_2^*, & v_3^*, & \dots \end{pmatrix} \in V^*$

Oft wird $\vec{v}$ mit $|\, v \rangle$ bezeichnet und $(\vec{v}^T)^*$ mit $\langle v \,|$

2. Sichtweise: $V^* \times V \to K$,
$((\vec{v}^T)^*, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv (\vec{v}^T)^* \cdot \vec{w} = v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \dots$

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen I

Wir haben Zustände als Vektoren (=Elemente eines Vektorraumes) kennengelernt

Wir werden sehen:
Observablen werden durch lineare Abbildungen/Operatoren dieses Vektorraumes dargestellt

Ein linearer Operator $\hat{M}$ bildet ein Element $|A\rangle$ des Vektorraums V, auf ein anderes Element $|B\rangle$ des Vektorraums V ab: $|B\rangle = \hat{M}|A\rangle$

$$\hat{M} : V \to V; \;\; |A\rangle \mapsto |B\rangle = \hat{M}|A\rangle$$

So dass gilt

i) $\hat{M}(|A_1\rangle + |A_2\rangle) = \hat{M}|A_1\rangle + \hat{M}(|A_2\rangle \qquad \forall\ |A_1\rangle, |A_2\rangle \in V$

ii) $\hat{M}(\lambda|A\rangle) = \lambda\hat{M}|A\rangle \qquad \forall\ |A\rangle \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen III

Die Gleichung $\vec{\beta} = \hat{M}\,\overrightarrow{\alpha} \Leftrightarrow \beta_k = \sum_i \alpha_i m_{ki}$

Lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen Va

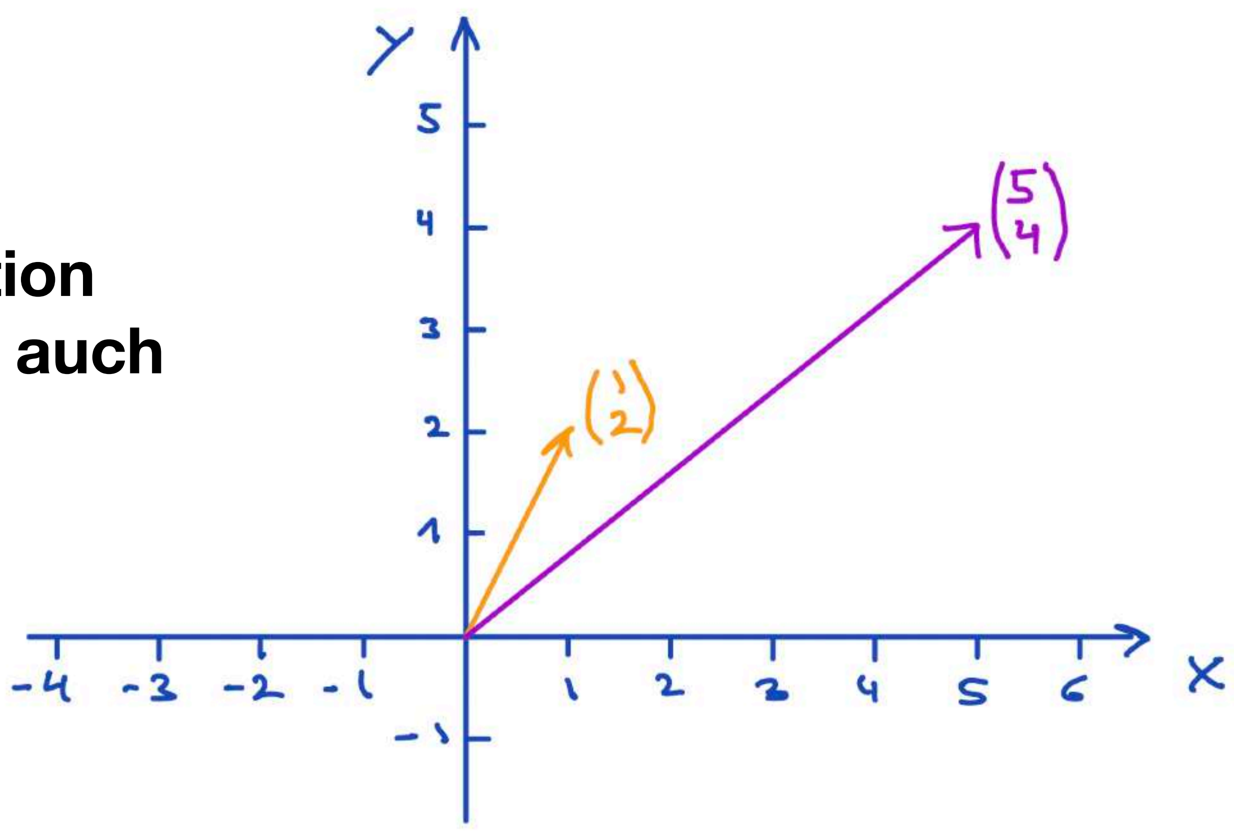
Wir haben nun hergeleitet:
Lineare Abbildungen in Vektorräumen können als Matrizen dargestellt werden

Die gilt für beliebige abstrakte Vektorräume, aber auch für die vertrauten $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^2$ kann man sich die Wirkung von Matrizen anschaulich vorstellen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

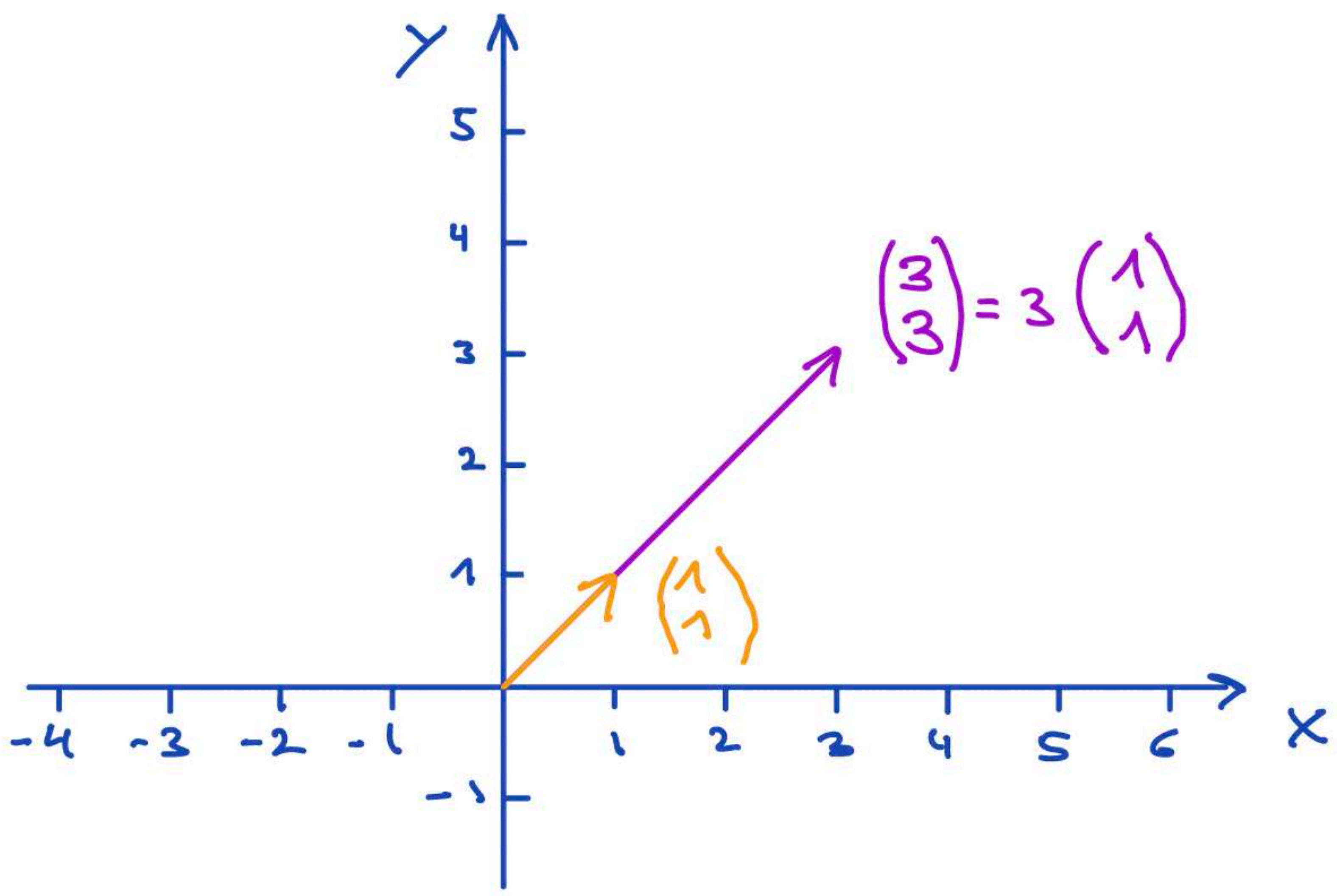
Im Allgemeinen ändert eine Matrizenmultiplikation sowohl die Richtung als auch den Betrag des Vektors



Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen Vb

Betrachten wir nun

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Hier wird nur die Länge geändert

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen VI

Ändert die Matrixmulitplikation die Richtung des Vektors nicht, dann gilt

$$\hat{M}\,|\,\lambda\rangle = \lambda\,|\,\lambda\rangle$$

$|\,\lambda\rangle$ **heisst Eigenvektor der Matrix** $\hat{M}$

λ **heisst Eigenwert der Matrix** $\hat{M}$

Wir werden finden:

1) **Zustände sind Vektoren in einem abstrakten Vektorrraum**
2) **Observablen sind Operatoren/lineare Abbildungen in einem abstrakten Vektorrraum**
3) **Mögliche Messwerte sind Eigenwerte des Operators**
4) **Nach der Messung geht der allgemeine Zustand in den Eigenvektor über**

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen VII

Betrachte eine lineare Abbildung $\vec{\beta} = \hat{M}\,\overrightarrow{\alpha}$

in Komponenten lautet dies

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}\alpha_1 + m_{12}\alpha_2 \\ m_{21}\alpha_1 + m_{22}\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Indem man einen Vektor transponiert und komplex konjugiert, geht man in den Dualraum über

$$\begin{aligned} \left(\beta_1^*\,, \quad \beta_2^*\right) &= \left(m_{11}^*\alpha_1^* + m_{12}^*\alpha_2^*\,, \quad m_{21}^*\alpha_1^* + m_{22}^*\alpha_2^*\right) \\ &= \left(\alpha_1^*\,, \quad \alpha_2^*\right) \underbrace{\begin{pmatrix} m_{21}^* & m_{12}^* \\ m_{12}^* & m_{22}^* \end{pmatrix}}_{=\left(\hat{M}^T\right)^* = \hat{M}^\dagger} \end{aligned}$$

$\hat{M}^\dagger := \left(\hat{M}^T\right)^*$ **heisst die zu** $\hat{M}$ **hermitesch konjugierte Matrix**

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen VIII

In drei Dimensionen:

Ebenso wie man $|B\rangle = \hat{M}|A\rangle$ **als Matrizenmulitplikation darstellen kann**

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}}_{\equiv|B\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12} & m_{13}\\ m_{21} & m_{22} & m_{23}\\ m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{pmatrix}}_{=\hat{M}} \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}}_{\equiv|A\rangle}$$

So kann man auch für die dualen Vektoren $\langle B| = \langle A|\hat{M}^\dagger$
eine Matrizenmulitplikation definieren

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_1^*, & \beta_2^*, & \beta_3^*\end{pmatrix}}_{\equiv\langle B|} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1^*, & \alpha_2^*, & \alpha_3^*\end{pmatrix}}_{\equiv\langle A|} \underbrace{\begin{pmatrix}m_{11} & m_{21} & m_{31}\\ m_{12} & m_{22} & m_{32}\\ m_{13} & m_{23} & m_{33}\end{pmatrix}}_{=\left(\hat{M}^T\right)^*=\hat{M}^\dagger}$$

Wdh.: Mathematatik: Lineare Abbildungen X

Betrachten wir nun das Skalarprodukt

$$\langle C \,|\, \hat{M} A \rangle,$$

so wissen wir aus der Symmetrie des Skalarproduktes

$$\langle C \,|\, \hat{M} A \rangle^* = \langle (\hat{M} A) \,|\, C \rangle$$

Mit dem Vorgehendem ergibt sich damit

$$\langle C \,|\, \hat{M} A \rangle^* = \langle (\hat{M} A) \,|\, C \rangle = \langle A \,|\, \hat{M}^\dagger C \rangle$$

Sind die Zustände im Skalarprodukt gleich, dann gilt

$$\langle A \,|\, \hat{M} A \rangle^* = \langle A \,|\, \hat{M}^\dagger A \rangle$$

Wdh.: Mathematik: Hermitesche Operatoren I

Für Eigenwerte gilt $\hat{M}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$

Transponiert und komplex-konjugiert man das, so gilt

$$\langle\lambda|\hat{M}^\dagger = \lambda^*\langle\lambda|$$

Eine Matrix für die gilt $\hat{M}^\dagger = \hat{M}$ **heisst hermitesch**

Für so eine Matrix gilt

$$\langle\lambda|\hat{M}\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda|\lambda\rangle$$

Ebenso findet man

$$\langle\lambda|\hat{M}\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat{M}^\dagger\lambda\rangle = \langle(\hat{M}\lambda)|\lambda\rangle = \lambda^*\langle\lambda|\lambda\rangle$$

Damit folgt $\lambda = \lambda^*$**,**

D.h. Eigenwerte von hermiteschen Matrizen sind reell

Wdh.: Mathematik: Hermitesche Operatoren II

Man kann zeigen:

1) **Eigenvektoren $|\lambda_i\rangle$ von hermiteschen Operatoren bilden eine vollständige Basis des Vektorraumes V, d.h. jeder Vektor $|v\rangle$ kann als eine Linearkombination von diesen Eigenvektoren dargestellt werden $|v\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle$**

2) **Sind zwei Eigenwerte verschieden $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann sind die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$**

Beweis:

i) $\langle\lambda_1|\hat{O}\lambda_2\rangle = \lambda_2\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle$

ii) $\langle\lambda_1|\hat{O}\lambda_2\rangle = \langle\lambda_1|\hat{O}^\dagger\lambda_2\rangle = \langle(\hat{O}\lambda_1)|\lambda_2\rangle = \lambda_1\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle$

Subtrahiere beide Gleichungen $\langle\lambda_1|\hat{O}\lambda_2\rangle - \langle\lambda_1|\hat{O}\lambda_2\rangle = 0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle$

Damit muss $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$ **gelten**

Wdh.: Mathematik: Hermitesche Operatoren II

Man kann zeigen:

1) **Eigenvektoren $|\lambda_i\rangle$ von hermiteschen Operatoren bilden eine vollständige Basis des Vektorraumes V, d.h. jeder Vektor $|v\rangle$ kann als eine Linearkombination von diesen Eigenvektoren dargestellt werden $|v\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle$**

2) **Sind zwei Eigenwerte verschieden $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann sind die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal $\langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle = 0$**

3) **Sind zwei Eigenwerte zu verschieden Eigenvektoren (d.h. nicht linear abhängig) gleich $\lambda_1 = \lambda_2$, dann können die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal gewählt werden $\langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle = 0$**

Betrachte 2 Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ mit $\vec{v}_2 \neq \alpha \vec{v}_1$

i) **Normiere Vektoren: $\vec{v}_i' = \dfrac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|}$ => $|\vec{v}_i'| = 1$**

ii) **$\vec{v}_2'$ kann in einen Anteil parallel zu $\vec{v}_1'$ und einen Anteil senkrecht dazu aufgeteilt werden: $\vec{v}_2' = \alpha \vec{v}_1' + \vec{v}_2^\perp$, d.h. $\vec{v}_2^\perp = \vec{v}_2' - \langle \vec{v}_2' | \vec{v}_1' \rangle \vec{v}_1'$**

iii) **$\vec{v}_2^\perp, \vec{v}_1'$ sind orthonormal -> normiere $\vec{v}_2^\perp$**

Wdh.: Mathematatik: Hermitesche Operatoren II

Man kann zeigen:

1) Eigenvektoren $|\lambda_i\rangle$ von hermiteschen Operatoren bilden eine vollständige Basis des Vektorraumes V, d.h. jeder Vektor $|v\rangle$ kann als eine Linearkombination von diesen Eigenvektoren dargestellt werden $|v\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle$

2) Sind zwei Eigenwerte verschieden $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann sind die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal $\langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle = 0$

3) Sind zwei Eigenwerte zu verschieden Eigenvektoren (d.h. nicht linear abhängig) gleich $\lambda_1 = \lambda_2$, dann können die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal gewählt werden $\langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle = 0$

Betrachte 2 Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ mit $\vec{v}_2 \neq \alpha \vec{v}_1$

i) Normiere Vektoren: $\vec{v}_i' = \dfrac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|}$ => $|\vec{v}_i'| = 1$

ii) $\vec{v}_2'$ kann in einen Anteil parallel zu $\vec{v}_1'$ und einen Anteil senkrecht dazu aufgeteilt werden: $\vec{v}_2' = \alpha \vec{v}_1' + \vec{v}_2^{\perp}$, d.h. $\vec{v}_2^{\perp} = \vec{v}_2' - \langle \vec{v}_2' | \vec{v}_1' \rangle \vec{v}_1'$

iii) $\vec{v}_2^{\perp}, \vec{v}_1'$ sind orthonormal …. Kann auch auf viele Vektoren angewendet werden..

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$ dargestellt.

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$. Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch orthogonale Zustände $|A_i\rangle$ dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Beispiel: allgemeiner Spinzustand $|A\rangle$

Messen wir den Spin in z-Richtung
dann lauten die Eigenzustände $|\lambda_1\rangle = |u\rangle$ und $|\lambda_2\rangle = |d\rangle$,
die möglichen Messwerte sind $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$

und der allgemeine Spinzustand lautet dann $|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$.

Die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen ist $|\alpha_u|^2 = |\langle A|u\rangle|^2$.
Die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen ist $|\alpha_d|^2 = |\langle A|d\rangle|^2$.

Nach der Messung von z.B. $\lambda_1 = +1$, wird bei weiteren σ_z-Messungen immer nur $\lambda_1 = +1$ gefunden,
d.h. der allgemeine Zustand $|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$ ist nach der Messung zum Zustand $|A\rangle = 1|u\rangle$ kollabiert.

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

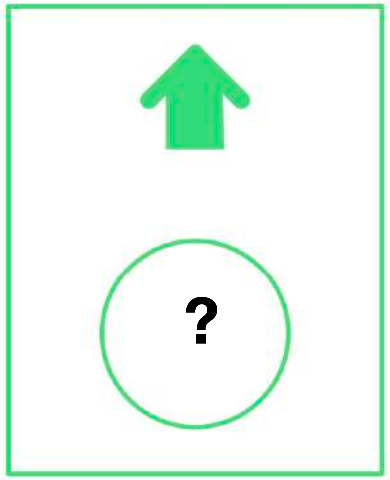
$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Messung:

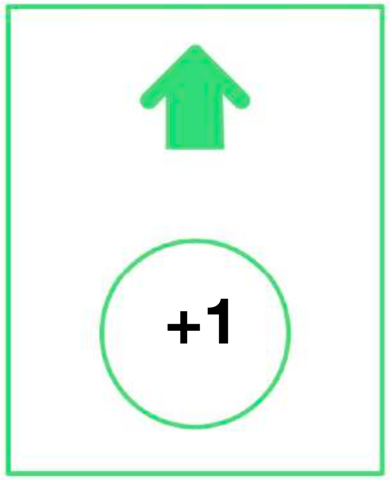


Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Messung:

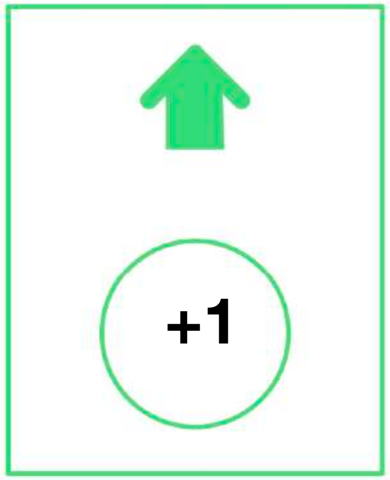


Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Messung:



Ende:

$$|A\rangle = 1\,|u\rangle$$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Messen wir den Spin in x-Richtung
dann lauten die Eigenzustände $|\lambda_1\rangle = |r\rangle$ und $|\lambda_2\rangle = |l\rangle$,
die möglichen Messwerte sind $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$

Wir haben früher gezeigt: $|u\rangle = \dfrac{|r\rangle + |l\rangle}{\sqrt{2}}$ **und** $|u\rangle = \dfrac{|r\rangle - |l\rangle}{\sqrt{2}}$

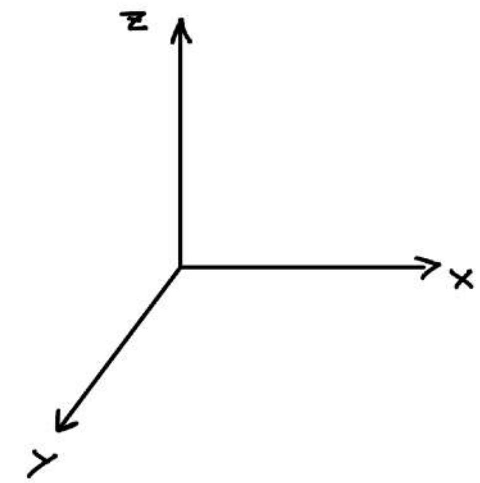
Damit lautet der allgemeine Spinzustand

$$|A\rangle = \alpha_u|u\rangle + \alpha_d|d\rangle = \alpha_u\frac{|r\rangle + |l\rangle}{\sqrt{2}} + \alpha_d\frac{|r\rangle - |l\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha_u + \alpha_d}{\sqrt{2}}}_{=\alpha_r}|r\rangle + \underbrace{\frac{\alpha_u - \alpha_d}{\sqrt{2}}}_{=\alpha_l}|l\rangle$$

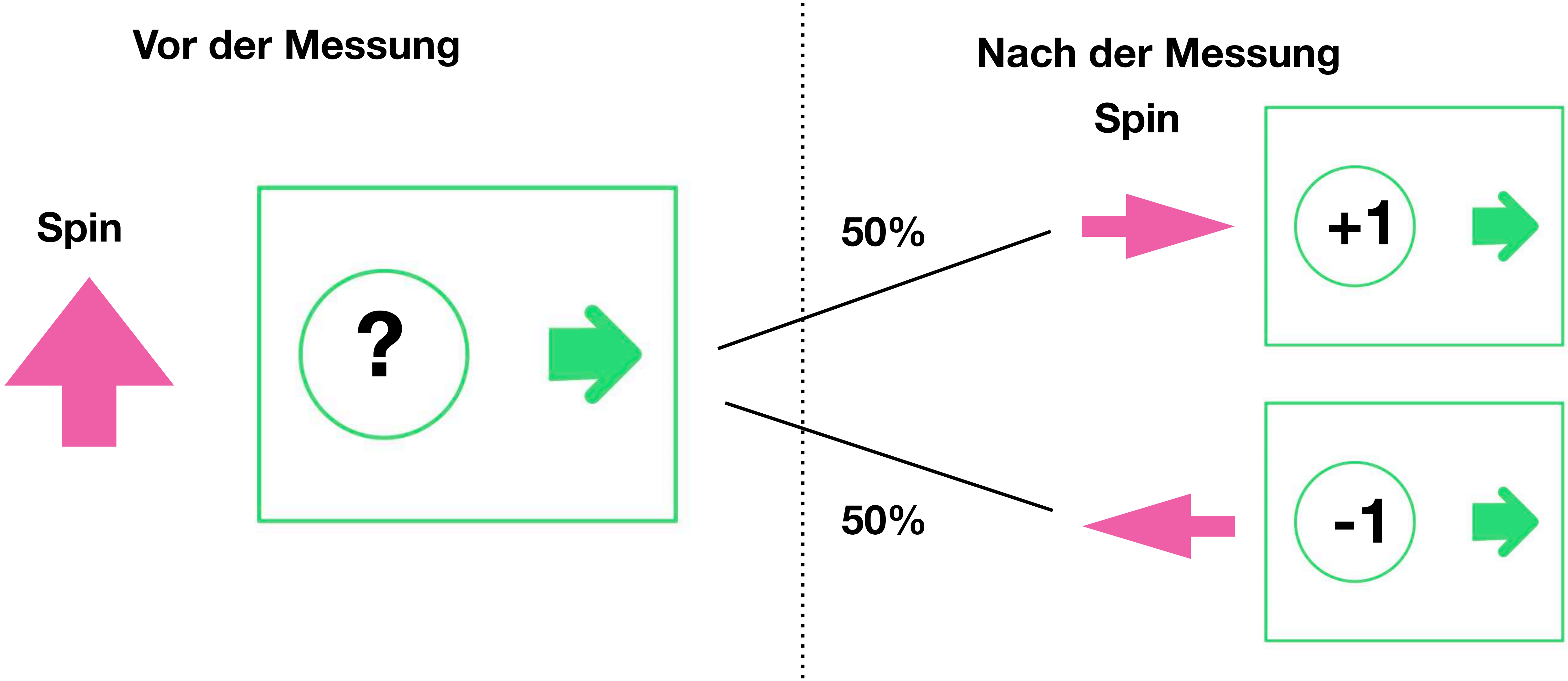
Beachte:
Die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen ist $|\alpha_r|^2 = |\langle A|r\rangle|^2$.
Die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen ist $|\alpha_l|^2 = |\langle A|l\rangle|^2$.

Wdh.: 1 Quanten Bit



Beispiele für Messergebnisse:

**Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin**



**Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz
sondern eine experimentelle Tatsache,
die nun verstanden/interpretiert werden muss**

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Vor der Messung ist das System im Zustand $|A\rangle = |u\rangle$

Nun messen wir den Spin in x **Richtung** σ_x**,**
d.h. die richtige Basis ist nun $|r\rangle$ **und** $|l\rangle$

Wir wissen $|u\rangle = \dfrac{|r\rangle + |l\rangle}{\sqrt{2}}$

D.h. der Zustand kann auch wie folgt dargestellt werden $|A\rangle = \dfrac{|r\rangle + |l\rangle}{\sqrt{2}}$

Messen wir nun σ_x **, so erhalten wir**

mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ **= 50% den Wert** $\sigma_x = +1$ **und das System**
ist dann im Zustand $|A\rangle = |r\rangle$

oder

mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ **= 50% den Wert** $\sigma_x = -1$ **und das System**
ist dann im Zustand $|A\rangle = |l\rangle$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$ dargestellt.

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$. Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Nur reelle Messwerte möglich <-> Eigenwerte von hermiteschen Operatoren
z.B. Energie-Niveaus im Atom oder Spin-einstellungen

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch orthogonale Zustände $|A_i\rangle$ dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$ dargestellt.

Wie sieht der zum Spin gehörige Operator aus?
Spinzustände müssen Eigenvektoren des Spin-Operators sein!

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$. Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch orthogonale Zustände $|A_i\rangle$ dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Wdh.: Quanten-Spin—Zustände VIII

Darstellung als Spaltenvektoren

Wir können die Zustände $|u\rangle$ und $|d\rangle$ auch als Spalten Vektoren darstellen

$$|u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{und } |d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt sofort die Orthonormiertheit der Zustände

Damit erhalten wir für die Zustände $|r\rangle$ und $|l\rangle$

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle + |d\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle - |d\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diese sind ebenfalls wieder orthonormiert

Schliesslich finden wir für die Zustände $|i\rangle$ und $|o\rangle$

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle + i|d\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ und } |o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle - i|d\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Diese sind ebenfalls wieder orthonormiert

Wdh.: Spin—Operatoren I

Es soll gelten $\sigma_z |u\rangle = + |u\rangle$ **und** $\sigma_z |d\rangle = - |d\rangle$

Im 2-dimensionalen Spalten Vektorraum lautet das

$$\sigma_z |u\rangle = \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} \\ \sigma_z^{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z |d\rangle = \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die 2x2 Darstellung von σ_z

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wdh.: Spin—Operatoren II

Für $|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ **und** $|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ **soll gelten**

$$\sigma_x|r\rangle = +|r\rangle \text{ und } \sigma_x|l\rangle = -|l\rangle$$

Im 2-dimensionalen Spalten Vektorraum lautet das

$$\sigma_x|r\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_x^{11} & \sigma_x^{12}\\ \sigma_x^{21} & \sigma_x^{22}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_x^{11}+\sigma_x^{12}\\ \sigma_x^{21}+\sigma_x^{22}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_x|l\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_x^{11} & \sigma_x^{12}\\ \sigma_x^{21} & \sigma_x^{22}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_x^{11}-\sigma_x^{12}\\ \sigma_x^{21}-\sigma_x^{22}\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Damit lautet die 2x2 Darstellung von σ_x

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Wdh.: Spin—Operatoren III

Für $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ **und** $|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$ **soll gelten**

$\sigma_y|i\rangle = +|i\rangle$ **und** $\sigma_y|o\rangle = -|o\rangle$

Im 2-dimensionalen Spalten Vektorraum lautet das

$$\sigma_y|r\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_y^{11} & \sigma_y^{12}\\ \sigma_y^{21} & \sigma_y^{22}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_y^{11} + i\sigma_y^{12}\\ \sigma_y^{21} + i\sigma_y^{22}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$\sigma_y|l\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_y^{11} & \sigma_y^{12}\\ \sigma_y^{21} & \sigma_y^{22}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_y^{11} - i\sigma_y^{12}\\ \sigma_y^{21} - i\sigma_y^{22}\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

Damit lautet die 2x2 Darstellung von σ_y

$$\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

Wdh.: Spin — Operatoren IV

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dies sind die Pauli-Matrizen

....

Quaternionen
$\{\mathbb{I}_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

Spin

SU(2) Algebra

Quantencomputing

SO(3) Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Drehimpuls Algebra

SL(1,3) Lorentz Algebra

WS 25/26
Mittwochs
Akademie

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$ dargestellt.

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$. Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch orthogonale Zustände $|A_i\rangle$ dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Was sind eindeutig unterscheidbare Zustände?

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Wdh.: Eindeutig unterscheidbare Zustände

Eindeutig unterscheidbare Zustände: es gibt eine Messmöglichkeit, so dass man die Zustände eindeutig unterscheiden kann:

Beispiel:

$|u\rangle$ und $|d\rangle$ kann man eindeutig durch die Messung von σ_z unterscheiden.

Erhält man +1, dann kann das nur von $|u\rangle$ stammen,

erhält man -1, dann kann das nur von $|d\rangle$ stammen,

Ebenso

$|r\rangle$ und $|l\rangle$ kann man eindeutig durch die Messung von σ_x unterscheiden

Aber

$|u\rangle$ und $|r\rangle$ kann man nicht eindeutig durch eine Messung unterscheiden

Misst man σ_z und erhält +1, dann kann das von $|u\rangle$ oder $|r\rangle$ stammen!

Ebenso bei einer Messung von σ_x

Daher:

$\{|u\rangle, |d\rangle\}$ und $\{|r\rangle, |l\rangle\}$ sind eindeutig unterscheidbar: $\langle u|d\rangle = 0 = \langle r|l\rangle$

$\{|u\rangle, |r\rangle\}$ sind nicht eindeutig unterscheidbar $\langle u|r\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$ dargestellt.

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$. Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch orthogonale Zustände $|A_i\rangle$ dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Wdh.: Grundprinzip 4 der Quantenmechanik

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A|\lambda_i\rangle|^2$.

Man kann den Zustand $|A\rangle$ in der Basis der Eigenzustände $|\lambda_i\rangle$ darstellen

$$|A\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle = c_1 |\lambda_i\rangle + c_2 |\lambda_2\rangle + c_3 |\lambda_3\rangle + \ldots$$

Mit der Wahrscheinlichkeit $|c_i|^2 = |\langle A|\lambda_i\rangle|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden und das System befindet sich nach der Messung im Zustand

$$|A\rangle = |\lambda_i\rangle$$

Wdh.: Grundprinzip 4 der Quantenmechanik II

Beachte: Die Messung der Observablen $\hat{O}$ ist nicht gleichbedeutend mit der Anwendung von $\hat{O}$ auf den Zustand $|A\rangle$!

Darstellung des Zustandes $|A\rangle$ in der Basis der Eigenzustände $|\lambda_i\rangle$ von $\hat{O}$:

$$|A\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle = c_1 |\lambda_i\rangle + c_2 |\lambda_2\rangle + c_3 |\lambda_3\rangle + \ldots$$

i) Messung von $\hat{O}$:
Mit der Wahrscheinlichkeit $|c_i|^2 = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden und das System befindet sich nach der Messung im Zustand $|A\rangle = |\lambda_i\rangle$

ii) Anwendung von $\hat{O}$ auf $|A\rangle$

$$\hat{O}|A\rangle = \hat{O} \sum_i c_i |\lambda_i\rangle = \sum_i c_i \hat{O} |\lambda_i\rangle = \sum_i c_i \lambda_i |\lambda_i\rangle$$

Spin—Operatoren V

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin—Operatoren V

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese 3 Operatoren kann man auch zu einem 3-Vektor Operator zusammenfassen

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Spin—Operatoren V

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese 3 Operatoren kann man auch zu einem 3-Vektor Operator zusammenfassen

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Bisher hatten wir nur Spin-Messungen entlang der x-, y- und z-Achsen diskutiert.

Spin—Operatoren V

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese 3 Operatoren kann man auch zu einem 3-Vektor Operator zusammenfassen

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Bisher hatten wir nur Spin-Messungen entlang der x-, y- und z-Achsen diskutiert.

Betrachten wir nun eine allgemeine Achse $\vec{n}$ im $\mathbb{R}^3$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$

Spin—Operatoren V

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese 3 Operatoren kann man auch zu einem 3-Vektor Operator zusammenfassen

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Bisher hatten wir nur Spin-Messungen entlang der x-, y- und z-Achsen diskutiert.

Betrachten wir nun eine allgemeine Achse $\vec{n}$ im $\mathbb{R}^3$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$

So lautet der zugehörige Spin-Operator:

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

Spin—Operatoren V

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese 3 Operatoren kann man auch zu einem 3-Vektor Operator zusammenfassen

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Bisher hatten wir nur Spin-Messungen entlang der x-, y- und z-Achsen diskutiert.

Betrachten wir nun eine allgemeine Achse $\vec{n}$ im $\mathbb{R}^3$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$

So lautet der zugehörige Spin-Operator:

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z$$

Spin—Operatoren V

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese 3 Operatoren kann man auch zu einem 3-Vektor Operator zusammenfassen

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Bisher hatten wir nur Spin-Messungen entlang der x-, y- und z-Achsen diskutiert.

Betrachten wir nun eine allgemeine Achse $\vec{n}$ im $\mathbb{R}^3$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$

So lautet der zugehörige Spin-Operator:

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z = \begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{pmatrix}$$

Spin—Operatoren V

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese 3 Operatoren kann man auch zu einem 3-Vektor Operator zusammenfassen

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Bisher hatten wir nur Spin-Messungen entlang der x-, y- und z-Achsen diskutiert.

Betrachten wir nun eine allgemeine Achse $\vec{n}$ im $\mathbb{R}^3$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$

So lautet der zugehörige Spin-Operator:

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z = \begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{pmatrix}$$

Suche Eigenvektoren und Eigenwerte….

Spin — Operatoren VI

Beispiel: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ **in** $x - z$ **Ebene - beachte** $\vec{n}$ **ist ein Einheitsvektor**

Spin — Operatoren VI

Beispiel: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

Spin — Operatoren VI

Beispiel: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

So lautet der zugehörige Spin-Operator:

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Spin — Operatoren VI

Beispiel: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

So lautet der zugehörige Spin-Operator:

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat folgende Eigenwerte und Eigenvektoren

Spin—Operatoren VI

Beispiel: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

So lautet der zugehörige Spin-Operator:

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat folgende Eigenwerte und Eigenvektoren

$\lambda_1 = +1$ **mit** $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

i. $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1$
$\sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \sin x_2 \cos x_1$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

ii. $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$
$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Spin — Operatoren VI

Beispiel: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

So lautet der zugehörige Spin-Operator:

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat folgende Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = +1 \text{ mit } |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \text{ mit } |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

i. $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1$
$\sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \sin x_2 \cos x_1$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

ii. $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$
$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Spin — Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1, \ |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$**;** $\lambda_2 = -1, \ |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Spin — Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1,\ |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$**;** $\lambda_2 = -1,\ |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**

Spin—Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1, \; |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$**;** $\lambda_2 = -1, \; |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**
2) **Die Eigenvektoren sind orthogonal:** $\langle\lambda_1 | \lambda_2\rangle = 0$

Spin — Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1$, $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1$, $|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**
2) **Die Eigenvektoren sind orthogonal:** $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ zeigt in z-Richtung und wir präparieren einen $|u\rangle$ Zustand

Spin — Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1,\ |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1,\ |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**
2) **Die Eigenvektoren sind orthogonal:** $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ zeigt in z-Richtung und wir präparieren einen $|u\rangle$ Zustand

Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$, so dass es in $\vec{n}$-Richtung zeigt

Spin — Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1, \ |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$**;** $\lambda_2 = -1, \ |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**
2) **Die Eigenvektoren sind orthogonal:** $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ **zeigt in** z**-Richtung und wir präparieren einen** $|u\rangle$ **Zustand**
Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$**, so dass es in** $\vec{n}$**-Richtung zeigt**

Was ist die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen?

Spin—Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1, \; |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$**;** $\lambda_2 = -1, \; |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**
2) **Die Eigenvektoren sind orthogonal:** $\langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle = 0$

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ **zeigt in** z**-Richtung und wir präparieren einen** $|u\rangle$ **Zustand**

Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$**, so dass es in** $\vec{n}$**-Richtung zeigt**

Was ist die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen? $P(+1) = |\langle u | \lambda_1 \rangle|^2$

Spin — Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1, \ |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$**;** $\lambda_2 = -1, \ |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**
2) **Die Eigenvektoren sind orthogonal:** $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ zeigt in z-Richtung und wir präparieren einen $|u\rangle$ Zustand

Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$, so dass es in $\vec{n}$-Richtung zeigt

Was ist die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen? $P(+1) = |\langle u|\lambda_1\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$

Spin — Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1,\ |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1,\ |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**
2) **Die Eigenvektoren sind orthogonal:** $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ zeigt in z-Richtung und wir präparieren einen $|u\rangle$ Zustand
Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$, so dass es in $\vec{n}$-Richtung zeigt

Was ist die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen? $P(+1) = |\langle u|\lambda_1\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$

Was ist die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen?

Spin — Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1, \ |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$**;** $\lambda_2 = -1, \ |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**
2) **Die Eigenvektoren sind orthogonal:** $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ zeigt in z-Richtung und wir präparieren einen $|u\rangle$ Zustand

Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$, so dass es in $\vec{n}$-Richtung zeigt

Was ist die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen? $P(+1) = |\langle u|\lambda_1\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$

Was ist die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen? $P(-1) = |\langle u|\lambda_2\rangle|^2$

Spin — Operatoren VI

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ **= >Spin-Operator:** $$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Eigenwerte/Eigenvektoren $\lambda_1 = +1$, $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$**;** $\lambda_2 = -1$, $|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1) **Es gibt wieder nur 2 mögliche Messwerte: + 1 und -1**
2) **Die Eigenvektoren sind orthogonal:** $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$

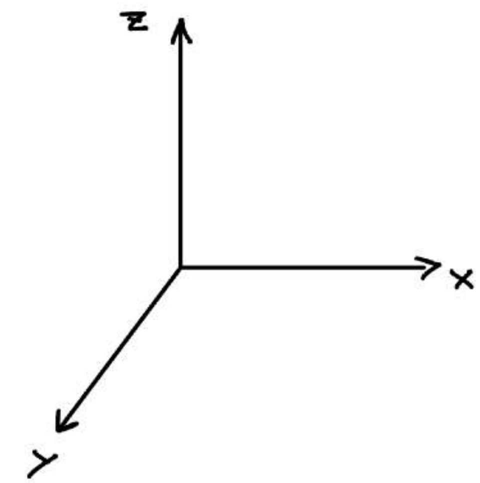
Start: Messgerät $\mathscr{A}$ **zeigt in** z**-Richtung und wir präparieren einen** $|u\rangle$ **Zustand**

Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$**, so dass es in** $\vec{n}$**-Richtung zeigt**

Was ist die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen? $P(+1) = |\langle u|\lambda_1\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$

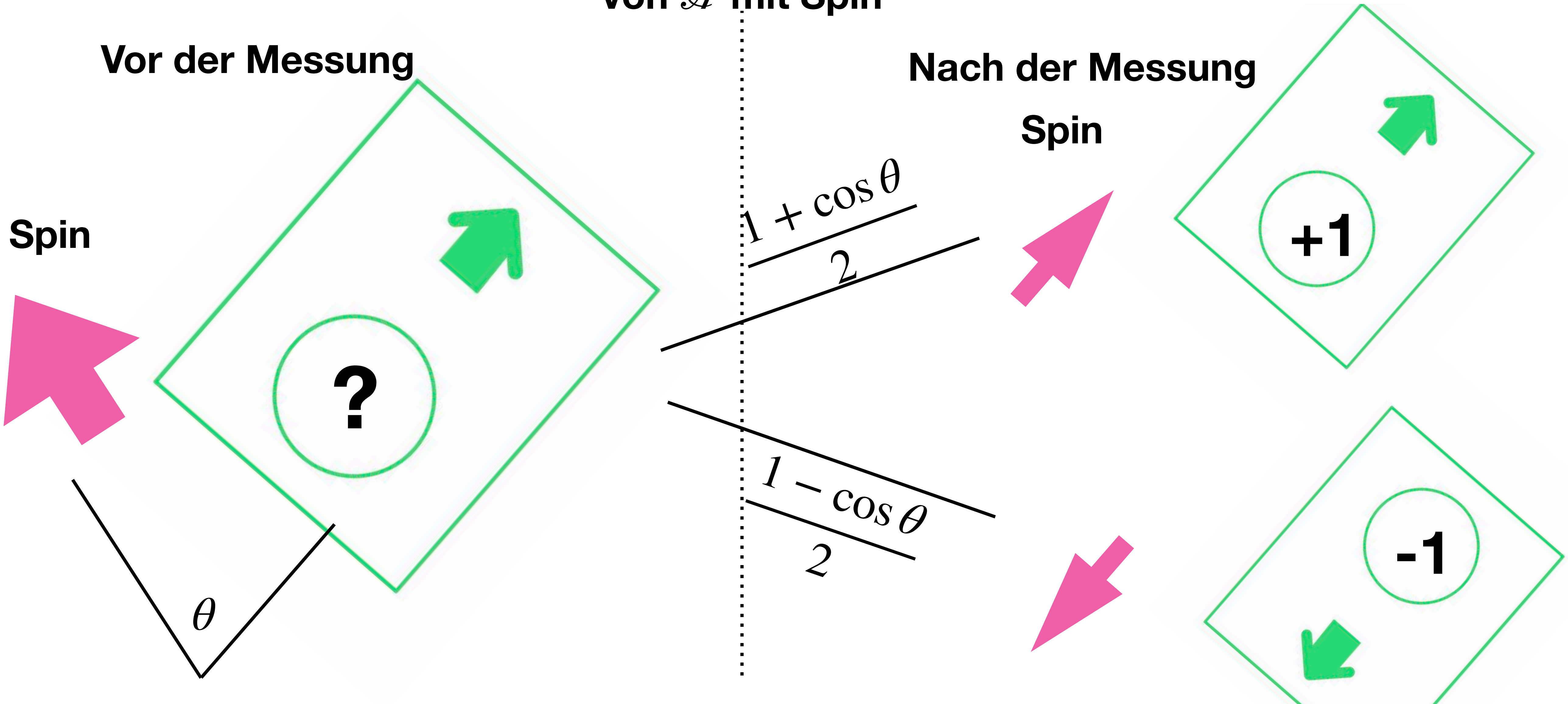
Was ist die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen? $P(-1) = |\langle u|\lambda_2\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}$

1. Vorlesung: 1 Quanten Bit



Beispiele für Messergebnisse:

Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin



Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz sondern eine experimentelle Tatsache, die nun verstanden/interpretiert werden muss

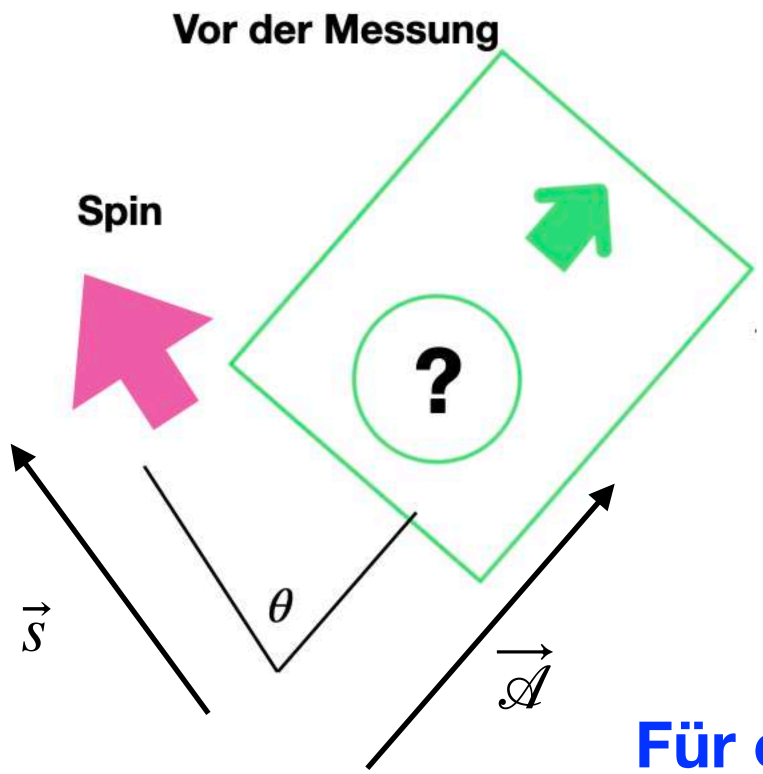
1. Vorlesung: 1 Quanten Bit

Beispiele für Messergebnisse:

Macht man viele unabhängige Messungen, dann bekommt man den Mittelwert

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1+\cos\theta}{2}(+1) + \frac{1-\cos\theta}{2}(-1) = \cos\theta$$

Dies kann auch als Skalarprodukt der beiden Einheitsvektoren in Richtung des Spin $\vec{s}$ und des Messapparates $\overrightarrow{\mathscr{A}}$ geschrieben werden



$$\langle \sigma \rangle = \vec{s} \cdot \overrightarrow{\mathscr{A}} = \cos\theta$$

Für eine einzelne Messung gibt es keinen Determinismus mehr!

Spin—Operatoren VII

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ zeigt in z-Richtung und wir präparieren einen $|u\rangle$ Zustand

Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$, so dass es in $\vec{n}$-Richtung zeigt

Was ist die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen? $P(+1) = |\langle u | \lambda_1 \rangle|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}$

Was ist die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen? $P(-1) = |\langle u | \lambda_2 \rangle|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2}$

Der Mittelwert des Spins in $\vec{n}$-Richtung ergibt sich zu

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \rangle = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i)$$

Spin — Operatoren VII

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ zeigt in z-Richtung und wir präparieren einen $|u\rangle$ Zustand
Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$, so dass es in $\vec{n}$-Richtung zeigt

Was ist die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen? $P(+1) = |\langle u | \lambda_1 \rangle|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}$

Was ist die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen? $P(-1) = |\langle u | \lambda_2 \rangle|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2}$

Der Mittelwert des Spins in $\vec{n}$-Richtung ergibt sich zu

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \rangle = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i) = + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Spin—Operatoren VII

Start: Messgerät $\mathscr{A}$ zeigt in z-Richtung und wir präparieren einen $|u\rangle$ Zustand
Dann: Rotiere Messgerät $\mathscr{A}$, so dass es in $\vec{n}$-Richtung zeigt

Was ist die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen? $P(+1) = |\langle u|\lambda_1\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$

Was ist die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen? $P(-1) = |\langle u|\lambda_2\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}$

Der Mittelwert des Spins in $\vec{n}$-Richtung ergibt sich zu

$$\langle\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\rangle = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i) = +\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

Spin—Operatoren VIII*

Jeder beliebe Spin-Zustand (1 Spin) $|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$
ist Eigenvektor zu einer durch $\vec{n}$ **bestimmten Spin-projektion,**

d.h. es gibt eine Richtung $\vec{n}$**, so dass gilt**

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} |A\rangle = |A\rangle$$

$\vec{n}$ **heisst auch Polaristationsrichtung**

Daraus folgt auch: es gibt keinen Spinzustand,
für den alle drei spin Komponenten den Wert Null besitzen

Zeitentwicklung I

In klassischer Mechanik dauert die Erklärung des Zustandes eines Systems ein paar Sekunden/Minuten: Zustand = {x, p}

Zeitentwicklung I

In klassischer Mechanik dauert die Erklärung des Zustandes eines Systems ein paar Sekunden/Minuten: Zustand = {x, p}

In der Quanten-Mechanik haben wir mit der Erklärung des Zustandes eines Systems bereits einige Vorlesungen verbracht:
Zustand = Vektor in einem abstrakten Vektor-Raum

Zeitentwicklung I

In klassischer Mechanik dauert die Erklärung des Zustandes eines Systems ein paar Sekunden/Minuten: Zustand = {x, p}

In der Quanten-Mechanik haben wir mit der Erklärung des Zustandes eines Systems bereits einige Vorlesungen verbracht:
Zustand = Vektor in einem abstrakten Vektor-Raum

Neben dem Zustand, wollen wir aber wissen, welcher Zeitentwicklung dieser Zustand unterliegt!

Zeitentwicklung I

In klassischer Mechanik dauert die Erklärung des Zustandes eines Systems ein paar Sekunden/Minuten: Zustand = {x, p}

In der Quanten-Mechanik haben wir mit der Erklärung des Zustandes eines Systems bereits einige Vorlesungen verbracht:
Zustand = Vektor in einem abstrakten Vektor-Raum

Neben dem Zustand, wollen wir aber wissen, welcher Zeitentwicklung dieser Zustand unterliegt!

In der klassischen Mechanik waren dies z.B. die Newtonschen Gleichungen

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{\vec{F}}{m}$$

Zeitentwicklung I

In klassischer Mechanik dauert die Erklärung des Zustandes eines Systems ein paar Sekunden/Minuten: Zustand = {x, p}

In der Quanten-Mechanik haben wir mit der Erklärung des Zustandes eines Systems bereits einige Vorlesungen verbracht:
Zustand = Vektor in einem abstrakten Vektor-Raum

Neben dem Zustand, wollen wir aber wissen, welcher Zeitentwicklung dieser Zustand unterliegt!

In der klassischen Mechanik waren dies z.B. die Newtonschen Gleichungen

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{\vec{F}}{m}$$

Noch grundlegender

WS 24/25: Dynamische Systeme

System:= Menge von Objekten, z.B. Teilchen, Felder, Wellen…

Geschlossenes System:= völlig abgeschlossen von der Umwelt, keine Wechselwirkung

Zustand:= Objekte können in verschiedenen Zuständen sein, z.B. Objekt Münze kann in den Zuständen “Kopf” oder “Zahl” sein; Objekt Teilchen kann im Zustand x= 3.45m, v = 12.4 m/s sein

Zustandsraum:= Menge aller möglichen Zustände eine Objektes, z.B. Münze {Kopf, Zahl}; Teilchen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Dynamisches System:= System das sich mit der Zeit ändert, besteht aus Zustandsraum und dem Bewegungsgesetz oder dynamischen Gesetz. Zeit kann **kontinuierlich** ablaufen (Parameter $t \in \mathbb{R}$), oder in **diskreten** Schritten (Parameter $n \in \mathbb{N}$) .

Deterministisches dynamisches System:= ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen **zukünftigen** Zeitpunkt bestimmt werden.

Klassische Mechanik ist deterministisch und reversibel

Reversibles dynamisches System:= ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen vergangenen Zeitpunkt bestimmt werden.

WS 24/25: Dynamische Systeme

Beispiel 2: System mit zwei Zuständen

Z. B. Münze: Kopf K oder Zahl Z zeigt nach oben

$\boxed{K}$ $\boxed{Z}$

Freiheitsgrad: Variable, die das System beschreibt, hier σ:

Kopf: $\sigma = +1$

Zahl: $\sigma = -1$

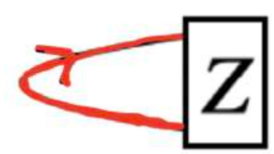
Dynamische Gesetze

Mathematische Formel: System zur Zeit n: $\sigma(n)$

A) Mache nichts:

$KKKKKKKKKKKKKK.......$

$ZZZZZZZZZZZZZZZZZ.....$

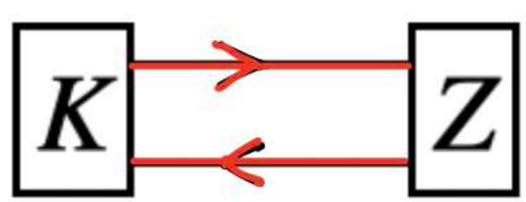


$$\sigma(n+1) = \sigma(n)$$

B) Ändere immer den Zustand:

$ZKZKZKZKZKZKZKZK\ldots$

$KZKZKZKZKZKZKZKZ\ldots$

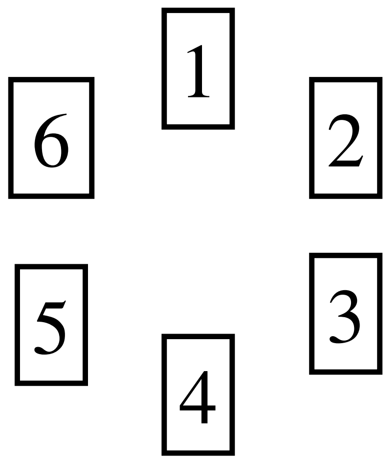


$$\sigma(n+1) = -\sigma(n)$$

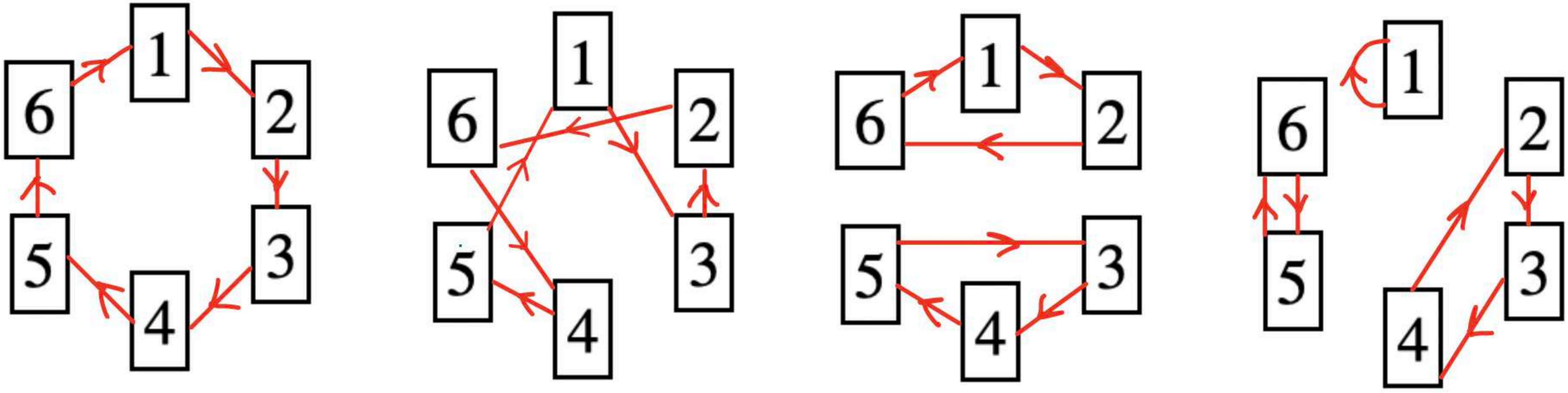
WS 24/25: Dynamische Systeme

Beispiel 3: System mit sechs Zuständen

Z. B.Würfel:



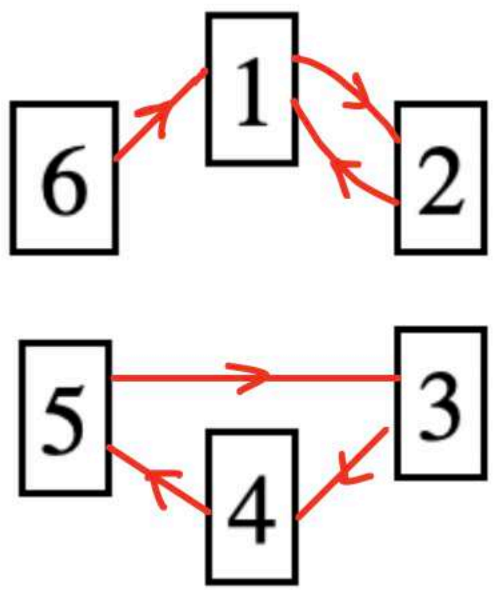
Dynamische Gesetze

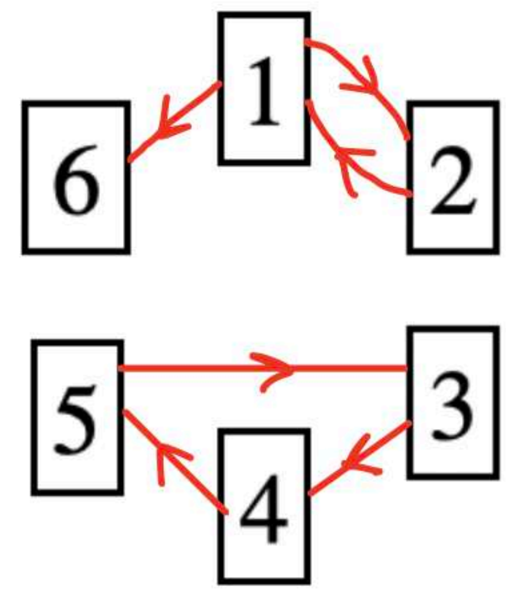


Deterministisch und Reversibel

WS 24/25: Dynamische Systeme

**Klassische Physik ist deterministisch und reversible:
welche Gesetze sind nicht erlaubt?**





oberer Zyklus.
Deterministisch?
~~Reversibel~~?

oberer Zyklus.
~~Deterministisch~~?
Reversibel?

Gesetze sind deterministisch und reversibel
⇔ Information ist erhalten

Zeitentwicklung II

Determinismus und Reversibilität kann äquivalent ausgedrückt werden:

Zeitentwicklung II

Determinismus und Reversibilität kann äquivalent ausgedrückt werden:

(-1). Gesetz or (-1). Haupsatz:

Zeitentwicklung II

Determinismus und Reversibilität kann äquivalent ausgedrückt werden:

(-1). Gesetz or (-1). Haupsatz:

Kurze Zusammenfassung der Hauptsätze [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

- Nullter Hauptsatz der Thermodynamik: Einführung der Temperatur als physikalische Grundgröße: Stehen zwei Systeme jeweils mit einem dritten im thermodynamischen Gleichgewicht, so stehen sie auch untereinander im Gleichgewicht. Diejenige Zustandsgröße, die bei diesen Systemen übereinstimmt, ist die Temperatur.[30]
- Erster Hauptsatz der Thermodynamik: Die Energie eines abgeschlossenen Systems ist konstant.
- Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik: Thermische Energie ist nicht in beliebigem Maße in andere Energiearten umwandelbar.
- Dritter Hauptsatz der Thermodynamik: (Nernst-Theorem): Der absolute Nullpunkt der Temperatur ist unerreichbar.

Zeitentwicklung II

Determinismus und Reversibilität kann äquivalent ausgedrückt werden:

(-1). Gesetz or (-1). Haupsatz:

Information ist erhalten und kann nie verloren werden

Kurze Zusammenfassung der Hauptsätze [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

- Nullter Hauptsatz der Thermodynamik: Einführung der Temperatur als physikalische Grundgröße: Stehen zwei Systeme jeweils mit einem dritten im thermodynamischen Gleichgewicht, so stehen sie auch untereinander im Gleichgewicht. Diejenige Zustandsgröße, die bei diesen Systemen übereinstimmt, ist die Temperatur.[30]
- Erster Hauptsatz der Thermodynamik: Die Energie eines abgeschlossenen Systems ist konstant.
- Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik: Thermische Energie ist nicht in beliebigem Maße in andere Energiearten umwandelbar.
- Dritter Hauptsatz der Thermodynamik: (Nernst-Theorem): Der absolute Nullpunkt der Temperatur ist unerreichbar.

Zeitentwicklung II

Determinismus und Reversibilität kann äquivalent ausgedrückt werden:

(-1). Gesetz or (-1). Haupsatz:

Information ist erhalten und kann nie verloren werden

Die Quantenversion des -1. Hauptsatzes ist

Unitarität

Kurze Zusammenfassung der Hauptsätze [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

- Nullter Hauptsatz der Thermodynamik: Einführung der Temperatur als physikalische Grundgröße: Stehen zwei Systeme jeweils mit einem dritten im thermodynamischen Gleichgewicht, so stehen sie auch untereinander im Gleichgewicht. Diejenige Zustandsgröße, die bei diesen Systemen übereinstimmt, ist die Temperatur.[30]
- Erster Hauptsatz der Thermodynamik: Die Energie eines abgeschlossenen Systems ist konstant.
- Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik: Thermische Energie ist nicht in beliebigem Maße in andere Energiearten umwandelbar.
- Dritter Hauptsatz der Thermodynamik: (Nernst-Theorem): Der absolute Nullpunkt der Temperatur ist unerreichbar.

Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t: $|\Psi(t)\rangle$

Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t: $|\Psi(t)\rangle$

Die Menge aller $|\Psi(t)\rangle$ beschreibt die Geschichte, Gegenwart und Zukunft diesen Zustandes.

Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t: $|\Psi(t)\rangle$

Die Menge aller $|\Psi(t)\rangle$ beschreibt die Geschichte, Gegenwart und Zukunft diesen Zustandes.

Grundannahme: Kennt man den Zustand zu einer bestimmt Zeit, z.B. $|\Psi(0)\rangle$, so ergeben die quantenmechanischen Zeitentwicklungsgleichungen daraus den Zustand zu einer beliebigen Zeit t: $|\Psi(t)\rangle$

Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t: $|\Psi(t)\rangle$

Die Menge aller $|\Psi(t)\rangle$ beschreibt die Geschichte, Gegenwart und Zukunft diesen Zustandes.

Grundannahme: Kennt man den Zustand zu einer bestimmt Zeit, z.B. $|\Psi(0)\rangle$, so ergeben die quantenmechanischen Zeitentwicklungsgleichungen daraus den Zustand zu einer beliebigen Zeit t: $|\Psi(t)\rangle$

Wir schreiben

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\Psi(0)\rangle$$

Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t: $|\Psi(t)\rangle$

Die Menge aller $|\Psi(t)\rangle$ beschreibt die Geschichte, Gegenwart und Zukunft diesen Zustandes.

Grundannahme: Kennt man den Zustand zu einer bestimmt Zeit, z.B. $|\Psi(0)\rangle$, so ergeben die quantenmechanischen Zeitentwicklungsgleichungen daraus den Zustand zu einer beliebigen Zeit t: $|\Psi(t)\rangle$

Wir schreiben

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

D.h. die Operation $\hat{U}(t)$ macht aus dem Zustand $|\Psi(0)\rangle$ den Zustand $|\Psi(t)\rangle$

Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t: $|\Psi(t)\rangle$

Die Menge aller $|\Psi(t)\rangle$ beschreibt die Geschichte, Gegenwart und Zukunft diesen Zustandes.

Grundannahme: Kennt man den Zustand zu einer bestimmt Zeit, z.B. $|\Psi(0)\rangle$, so ergeben die quantenmechanischen Zeitentwicklungsgleichungen daraus den Zustand zu einer beliebigen Zeit t: $|\Psi(t)\rangle$

Wir schreiben

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

D.h. die Operation $\hat{U}(t)$ macht aus dem Zustand $|\Psi(0)\rangle$ den Zustand $|\Psi(t)\rangle$
$\hat{U}(t)$ heisst Zeitentwicklungsoperator

Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t: $|\Psi(t)\rangle$

Die Menge aller $|\Psi(t)\rangle$ beschreibt die Geschichte, Gegenwart und Zukunft diesen Zustandes.

Grundannahme: Kennt man den Zustand zu einer bestimmt Zeit, z.B. $|\Psi(0)\rangle$, so ergeben die quantenmechanischen Zeitentwicklungsgleichungen daraus den Zustand zu einer beliebigen Zeit t: $|\Psi(t)\rangle$

Wir schreiben

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\Psi(0)\rangle$$

D.h. die Operation $\hat{U}(t)$ macht aus dem Zustand $|\Psi(0)\rangle$ den Zustand $|\Psi(t)\rangle$
$\hat{U}(t)$ heisst Zeitentwicklungsoperator

Wir gehen davon aus:
Die Zeitentwicklung $\hat{U}(t)$ ist determinstisch!

Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t: $|\Psi(t)\rangle$

Die Menge aller $|\Psi(t)\rangle$ beschreibt die Geschichte, Gegenwart und Zukunft diesen Zustandes.

Grundannahme: Kennt man den Zustand zu einer bestimmt Zeit, z.B. $|\Psi(0)\rangle$, so ergeben die quantenmechanischen Zeitentwicklungsgleichungen daraus den Zustand zu einer beliebigen Zeit t: $|\Psi(t)\rangle$

Wir schreiben

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

D.h. die Operation $\hat{U}(t)$ macht aus dem Zustand $|\Psi(0)\rangle$ den Zustand $|\Psi(t)\rangle$
$\hat{U}(t)$ heisst Zeitentwicklungsoperator

Wir gehen davon aus:
Die Zeitentwicklung $\hat{U}(t)$ ist determinstisch!
Unbestimmtheit der Quantenmechanik liegt im Zustand!

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll
$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$
besitzen?

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V,\ |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll
$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$
besitzen?

1. **Deterministisch; d.h. $|\Psi(t)\rangle$ ist eindeutig aus $|\Psi(0)\rangle$ bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V,\ |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ **und** $|\Phi(0)\rangle$ **unterscheidbar sind, dann gilt:** $\langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle = 0$

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V, \; |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ **und** $|\Phi(0)\rangle$ **unterscheidbar sind, dann gilt:** $\langle\Phi(0)\,|\,\Psi(0)\rangle = 0$

Diese Unterscheidbarkeit soll erhalten bleiben, d.h. es soll gelten

$$\langle\Phi(t)\,|\,\Psi(t)\rangle = 0$$

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ **und** $|\Phi(0)\rangle$ **unterscheidbar sind, dann gilt:** $\langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle = 0$

Diese Unterscheidbarkeit soll erhalten bleiben, d.h. es soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$$

Beachte: $|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Phi(0)\rangle$ **ist gleichbedeutend mit** $\langle\Phi(t)| = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)$

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V,\ |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ **und** $|\Phi(0)\rangle$ **unterscheidbar sind, dann gilt:** $\langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle = 0$

Diese Unterscheidbarkeit soll erhalten bleiben, d.h. es soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$$

Beachte: $|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Phi(0)\rangle$ **ist gleichbedeutend mit** $\langle\Phi(t)| = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)$

Somit soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle$$

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V, \; |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ **und** $|\Phi(0)\rangle$ **unterscheidbar sind, dann gilt:** $\langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle = 0$

Diese Unterscheidbarkeit soll erhalten bleiben, d.h. es soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$$

Beachte: $|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Phi(0)\rangle$ **ist gleichbedeutend mit** $\langle\Phi(t)| = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)$

Somit soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V, \; |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ **und** $|\Phi(0)\rangle$ **unterscheidbar sind, dann gilt:** $\langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle = 0$

Diese Unterscheidbarkeit soll erhalten bleiben, d.h. es soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$$

Beachte: $|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Phi(0)\rangle$ **ist gleichbedeutend mit** $\langle\Phi(t)| = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)$

Somit soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = \langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle$$

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll
$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$
besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ **und** $|\Phi(0)\rangle$ **unterscheidbar sind, dann gilt:** $\langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle = 0$

Diese Unterscheidbarkeit soll erhalten bleiben, d.h. es soll gelten
$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$$

Beachte: $|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Phi(0)\rangle$ **ist gleichbedeutend mit** $\langle\Phi(t)| = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)$

Somit soll gelten
$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = \langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle$$

Die ist erfüllt, wenn $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$.

Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V, \; |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ **und** $|\Phi(0)\rangle$ **unterscheidbar sind, dann gilt:** $\langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle = 0$

Diese Unterscheidbarkeit soll erhalten bleiben, d.h. es soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$$

Beachte: $|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Phi(0)\rangle$ **ist gleichbedeutend mit** $\langle\Phi(t)| = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)$

Somit soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = \langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle$$

Die ist erfüllt, wenn $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$**. Eine solche Matrix heisst unitär**

Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$ dargestellt.

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$. Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch orthogonale Zustände $|A_i\rangle$ dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Prinzip 5: Die Zeitentwicklung von Zuständen ist unitär.

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll

$\hat{U}(t) : V \to V$**,** $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$

besitzen?

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll

$\hat{U}(t) : V \to V$**,** $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$

besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$**,**
2. **Für sehr kleine Zeiten** ϵ**, soll gelten** $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll
$\hat{U}(t) : V \to V$**,** $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$
besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$**,**
2. **Für sehr kleine Zeiten** ϵ**, soll gelten** $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. **Aus** $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll
$\hat{U}(t) : V \to V$**,** $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$
besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$**,**
2. **Für sehr kleine Zeiten** ϵ**, soll gelten** $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. **Aus** $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ **folgt dann** $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right)\left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$**,**

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll
$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$
besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$,
2. **Für sehr kleine Zeiten** ϵ**, soll gelten** $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. **Aus** $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ **folgt dann** $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right)\left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$**, was zur Ordnung** ϵ **genau dann gilt wenn** $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$,

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll
$$\hat{U}(t) : V \to V,\ |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$
besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$**,**
2. **Für sehr kleine Zeiten** ϵ**, soll gelten** $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. **Aus** $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ **folgt dann** $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right)\left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$**, was zur Ordnung** ϵ **genau dann gilt wenn** $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$**,** $\hat{H}$ **ist hermitesch und beschreibt somit eine Observable**

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll
$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$
besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$,
2. **Für sehr kleine Zeiten** ϵ**, soll gelten** $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. **Aus** $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ **folgt dann** $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right)\left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$**, was zur Ordnung** ϵ **genau dann gilt wenn** $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$, $\hat{H}$ **ist hermitesch und beschreibt somit eine Observable**
4. $\hat{H}$ **heisst Hamilton Operator**

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll
$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$
besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$,
2. **Für sehr kleine Zeiten** ϵ**, soll gelten** $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. **Aus** $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ **folgt dann** $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right)\left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$**, was zur Ordnung** ϵ **genau dann gilt wenn** $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$, $\hat{H}$ **ist hermitesch und beschreibt somit eine Observable**
4. $\hat{H}$ **heisst Hamilton Operator**

Damit gilt nun: $|\Psi(\epsilon)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = (1 - i\epsilon\hat{H})|\Psi(0)\rangle$

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V, \ |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$,
2. Für sehr kleine Zeiten ϵ, soll gelten $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. Aus $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ folgt dann $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right)\left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$, was zur Ordnung ϵ genau dann gilt wenn $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$, $\hat{H}$ ist hermitesch und beschreibt somit eine Observable
4. $\hat{H}$ heisst Hamilton Operator

Damit gilt nun: $|\Psi(\epsilon)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = (1 - i\epsilon\hat{H})|\Psi(0)\rangle$

Welches umgeschrieben werden kann in

$$\frac{|\Psi(\epsilon)\rangle - |\Psi(0)\rangle}{\epsilon} = -i\hat{H}|\Psi(0)\rangle$$

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll

$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$

besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$,
2. **Für sehr kleine Zeiten ϵ, soll gelten $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$**
3. **Aus $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ folgt dann $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right)\left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$, was zur Ordnung ϵ genau dann gilt wenn $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$, $\hat{H}$ ist hermitesch und beschreibt somit eine Observable**
4. $\hat{H}$ **heisst Hamilton Operator**

Damit gilt nun: $|\Psi(\epsilon)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = (1 - i\epsilon\hat{H})|\Psi(0)\rangle$

Welches umgeschrieben werden kann in

$$\frac{|\Psi(\epsilon)\rangle - |\Psi(0)\rangle}{\epsilon} = -i\hat{H}|\Psi(0)\rangle \Leftrightarrow \frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$

Unitarität III

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V,\ |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$,
2. Für sehr kleine Zeiten ϵ, soll gelten $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. Aus $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ folgt dann $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right)\left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$, was zur Ordnung ϵ genau dann gilt wenn $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$, $\hat{H}$ ist hermitesch und beschreibt somit eine Observable
4. $\hat{H}$ heisst Hamilton Operator

Damit gilt nun: $|\Psi(\epsilon)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = (1 - i\epsilon\hat{H})|\Psi(0)\rangle$

Welches umgeschrieben werden kann in

$$\frac{|\Psi(\epsilon)\rangle - |\Psi(0)\rangle}{\epsilon} = -i\hat{H}|\Psi(0)\rangle \Leftrightarrow \frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung