Quantum2025

https://www.quantum2025.de

Universität Siegen

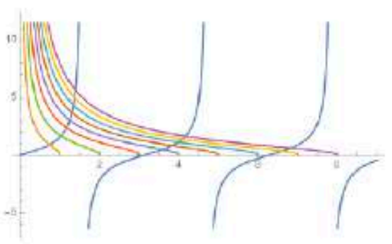
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

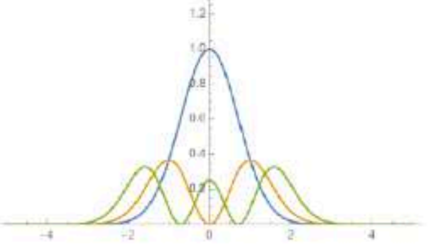
Schrödinger's Katze am Emmy Noether Campus: sie lebt!

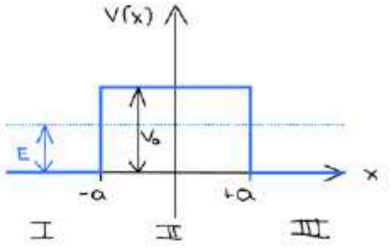
Ankündigung für das Sommersemester 2025

Das theoretische Minimum II

Quantenmechanik - Prof. Dr. Alexander Lenz, 4PHY00011V







Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundprinzipien der theoretischen Physik.

2025 wird weltweit das 100 jährige Jubiläum der Entdeckung der Quantenmechanik gefeiert. Ursprünglich war dies über viele Jahrzehnte lang reinste Grundlagenforschung ohne jegliche Hinweise auf potentielle Anwendungen. 100 Jahre später finden wir, dass ein Großteil der technologischen Errungenschaften der Menschheit im letzten Jahrhundert auf der Quantenmechanik basiert - zuletzt gipfelte dies in den ersten Quantencomputern.

Im Sommersemester 2025 beschäftigen wir uns daher mit einer Einführung in die Grundprinzipien der Quantenmechanik:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\Psi(\vec{x},t)$$

Die Vorlesung richtet sich an Mittwochsakademiker, Oberstufenschülerinnen und -schüler, Lehrkräfte und Physikenthusiasten mit einem großen Interesse an aktuellen Themen der Physik. Es werden mathematische Konzepte (auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe) eingeführt und benutzt. Die Vorlesung ist an die erfolgreiche Vorlesungs- und Buchreihe "**The theoretical Minimum**" von Leonard Susskind angelehnt, welche auf dieselbe Zielgruppe ausgerichtet war. Vom Niveau her wird sich die Veranstaltung auf dem schmalen Grat zwischen einer rein populärwissenschaftlichen Bildershow und einer theoretischen Physikvorlesung im Bachelorstudium bewegen.

11 Termine im Sommersemester 25:
7.5., 14.5., 21.5., 28.5., 4.6., 11.6., 18.6., 25.6., 2.7., 9.7., 16.7.
Mittwochs 16-18
Emmy Noether Campus ENC-D-114
Infos unter: alexander.lenz@uni-siegen.de
https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/

SUBATOMIC HEROES

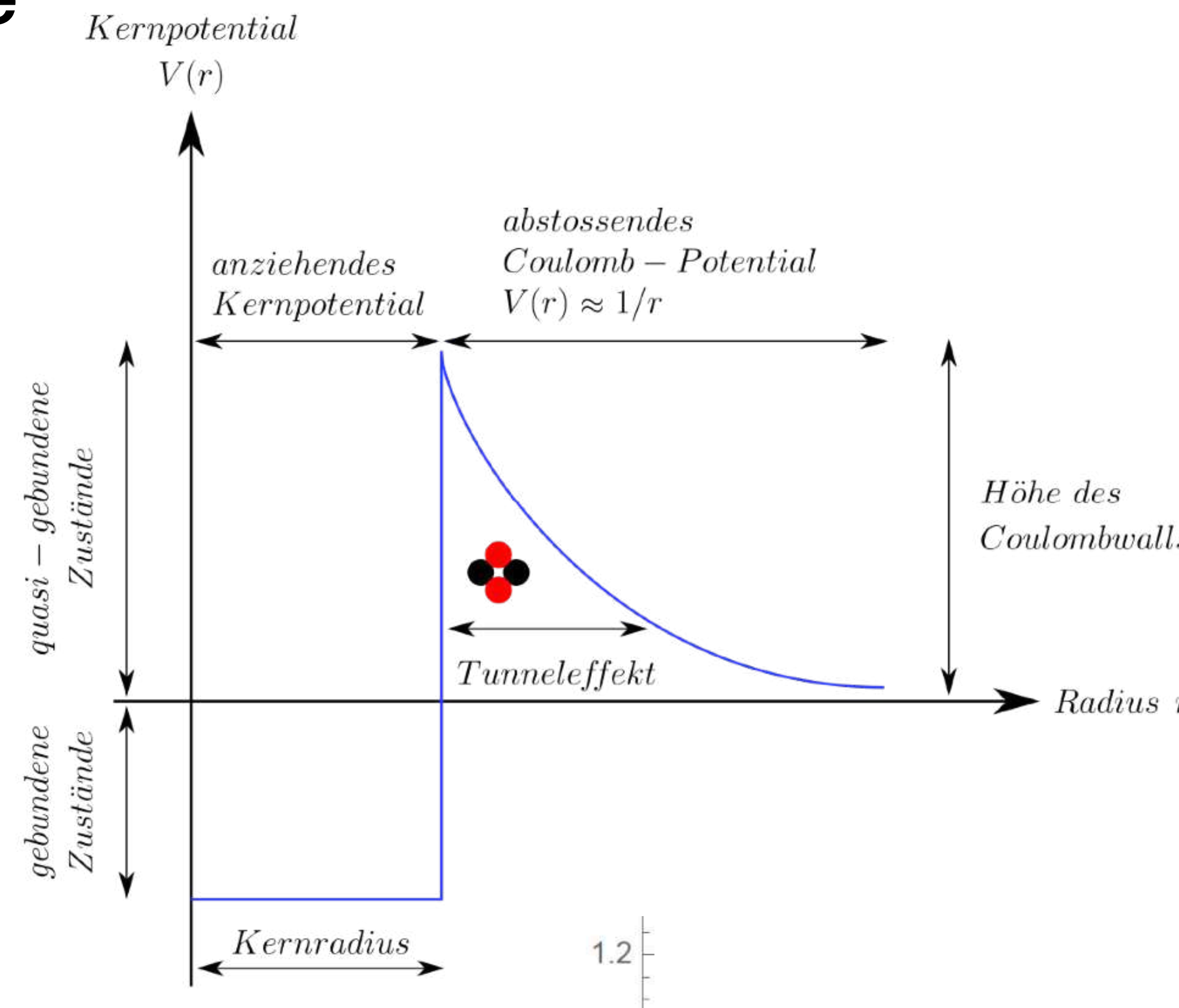
Termine:

7.5: ✓
14.5: ✓
21.5: ✓
28.5: - - -
4.6: ✓
11.6: ✓
18.6: ✓
25.6: Prof. Tao Han
2.7: 
9.7: ✓
+ Oppenheimer
16.7: ✓

Prof. Dr. Tao Han forscht mit Unterstützung der Humboldt-Stiftung an der Uni Siegen.

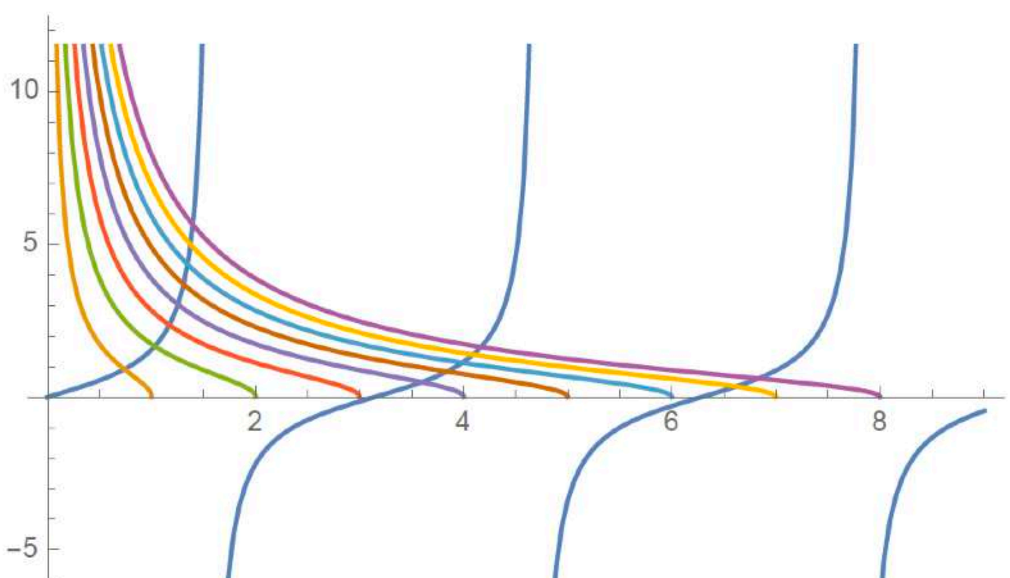
Vorlesung: Das theoretische Minimum

Mittwochsakademie



Ablauf

7.5.: Einführung
14.5.: Zustände, Vektorräume
21.5.: Grundprinzipien der QM
28.5.: -
4.6.: Zeitentwicklung
11.6.: Unschärferelation
18.6.: Verschränkung
25.6.: **Festkolloquium: Prof. Tao Han**
2.7.: Teilchen und Wellen
9.7.: Dynamik **+ Film: Oppenheimer**
16.7.: Harmonischer Oszillator



Streuung an Kastenpotential

Wdh.: Vektorräume - Allgemein

Diese anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K-Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{\,|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. **Es gibt eine Addition in V mit:**
   - $\vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$
   - **kommutativ** $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$
   - **Nullelement** $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ **oder** $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$
   - **Inverses** $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ **oder** $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$
   - **assoziativ** $\vec{w} + (\vec{v} + \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u}$ **oder** $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. **Es gibt eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$**
   - $\vec{v} \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda\vec{v} \in V$ **oder** $|\alpha\rangle \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda|\alpha\rangle \in V$
   - **Linear 1:** $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ **oder** $(\lambda + \mu)|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle + \mu|\alpha\rangle$
   - **Linear 2:** $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$ **oder** $\lambda(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = \lambda|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle$
   - $\lambda(\mu)\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ **oder** $\lambda(\mu)|\alpha\rangle) = (\lambda\mu)|\alpha\rangle$
   - $1\vec{v} = \vec{v}$ **oder** $1|\alpha\rangle) = |\alpha\rangle$

Wdh.: Vektorräume - Allgemein

Eine Menge V, die die vorherigen Eigenschaften besitzt, heisst ein K-Vektorraum V:

Beispiele:

1. **$\mathbb{R}^2$: 2-dimensionaler Raum, $\mathbb{R}^3$: 3-dimensionaler Raum, $\mathbb{R}^n$: n-dimensionaler Raum**
2. **$\mathbb{L}$: Raum aller Funktionen**
3. **....**

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine Basis: $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}, \ldots\}$ und jeder Vektor $\vec{v}$ aus dem Vektorraum kann durch diese Basis dargestellt werden $\vec{v} = \sum_i c_i \overrightarrow{b_i}$

Skalarprodukt (inneres Produkt): $V \times V \to K, \quad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \mapsto \langle \alpha | \beta \rangle$

$$\langle \alpha | \beta_1 + \beta_2 \rangle = \langle \alpha | \beta_1 \rangle + \langle \alpha | \beta_2 \rangle \quad \textbf{Linearität (Teil 1)}$$

$$\langle \alpha | \lambda \beta \rangle = \lambda \langle \alpha | \beta \rangle \quad \textbf{Linearität (Teil 2)}$$

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^* \quad \textbf{Symmetrie}$$

Wdh.: Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

1. **Sichtweise**: $V \times V \to K$,
   $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \vec{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \ldots$

Zum Vektorraum V gibt es einen Dualraum V^*

$\forall\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \ldots \end{pmatrix} \in V$ **gibt es einen dualen Vektor** $(\vec{v}^T)^* = \begin{pmatrix} v_1^*, & v_2^*, & v_3^*, & \ldots \end{pmatrix} \in V^*$

Oft wird $\vec{v}$ mit $|\, v \rangle$ bezeichnet und $(\vec{v}^T)^*$ mit $\langle v \,|$

2. **Sichtweise**: $V^* \times V \to K$,
   $((\vec{v}^T)^*, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle \equiv (\vec{v}^T)^* \cdot \vec{w} = v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \ldots$

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen I

Ein linearer Operator $\hat{M}$ bildet ein Element $|A\rangle$ des Vektorraums V, auf ein anderes Element $|B\rangle$ des Vektorraums V ab: $|B\rangle = \hat{M}|A\rangle$

$$\hat{M} : V \to V; \;\; |A\rangle \mapsto |B\rangle = \hat{M}|A\rangle$$

So dass gilt

i) $\hat{M}(|A_1\rangle + |A_2\rangle) = \hat{M}|A_1\rangle + \hat{M}(|A_2\rangle \qquad \forall\ |A_1\rangle, |A_2\rangle \in V$

ii) $\hat{M}(\lambda|A\rangle) = \lambda\hat{M}|A\rangle \qquad \forall\ |A\rangle \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen III

Die Gleichung $\vec{\beta} = \hat{M}\,\overrightarrow{\alpha} \Leftrightarrow \beta_k = \sum_i \alpha_i m_{ki}$

Lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen Va

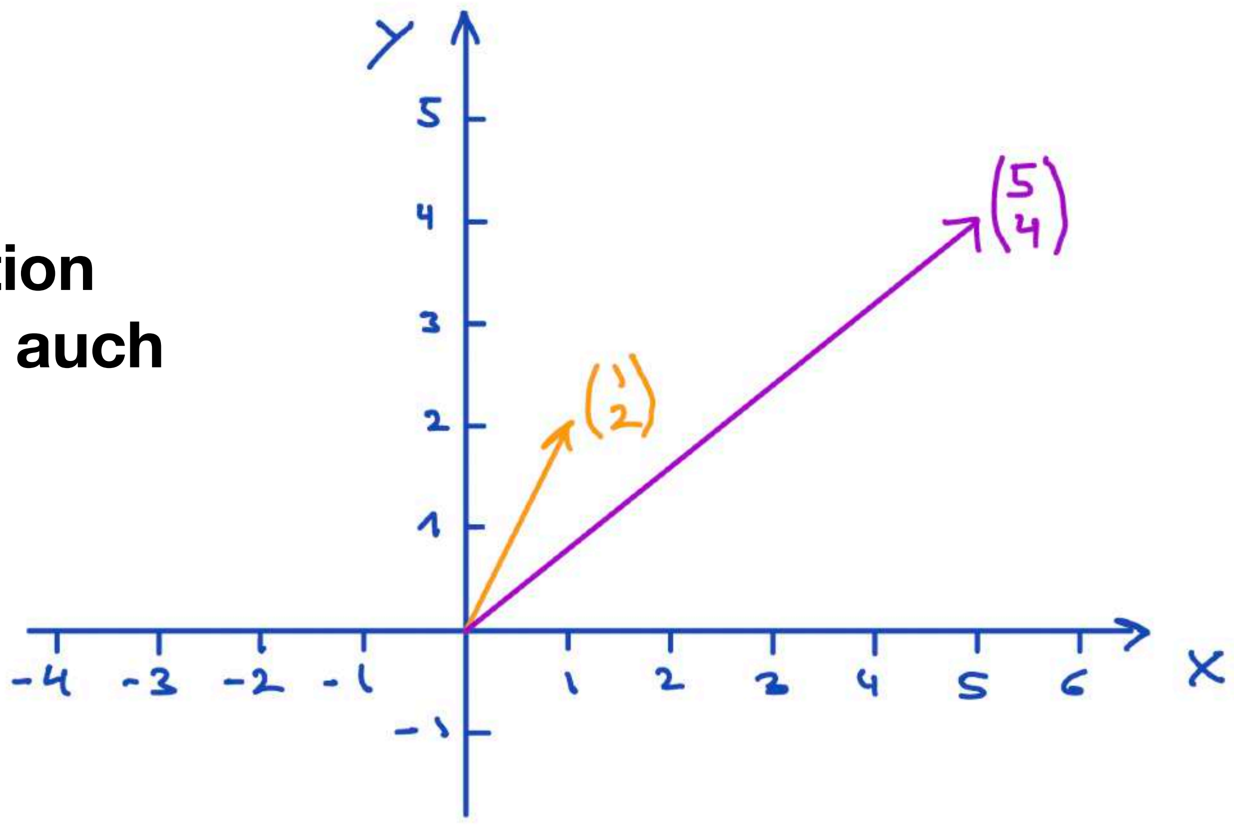
Wir haben nun hergeleitet:
Lineare Abbildungen in Vektorräumen können als Matrizen dargestellt werden

Die gilt für beliebige abstrakte Vektorräume, aber auch für die vertrauten $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^2$ kann man sich die Wirkung von Matrizen anschaulich vorstellen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

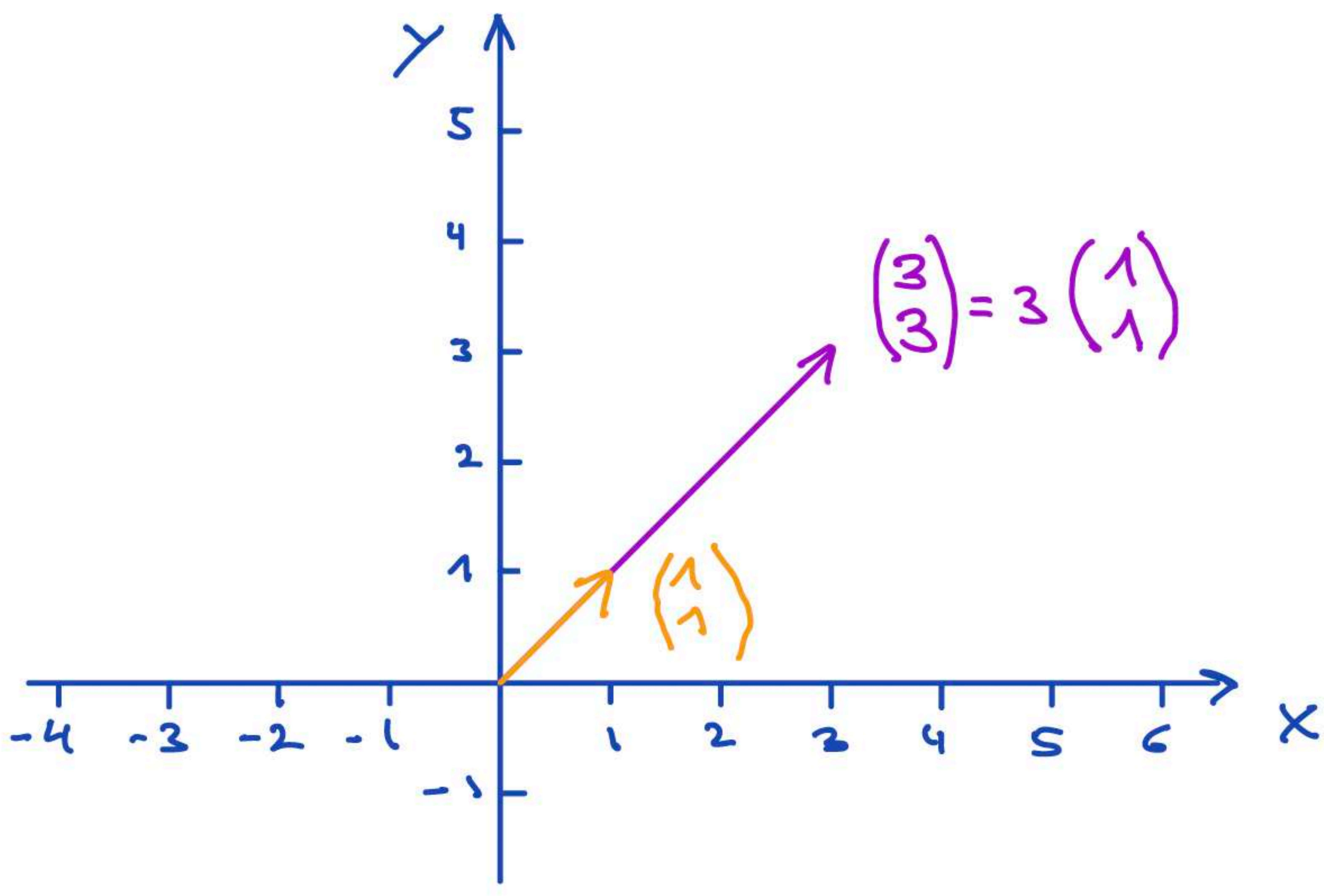
Im Allgemeinen ändert eine Matrizenmultiplikation sowohl die Richtung als auch den Betrag des Vektors



Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen Vb

Betrachten wir nun

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Hier wird nur die Länge geändert

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen VI

Ändert die Matrixmulitplikation die Richtung des Vektors nicht, dann gilt

$$\hat{M}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

$|\lambda\rangle$ **heisst Eigenvektor der Matrix** $\hat{M}$

λ **heisst Eigenwert der Matrix** $\hat{M}$

Wir werden finden:

1) **Zustände sind Vektoren in einem abstrakten Vektorrraum**
2) **Observablen sind Operatoren/lineare Abbildungen in einem abstrakten Vektorrraum**
3) **Mögliche Messwerte sind Eigenwerte des Operators**
4) **Nach der Messung geht der allgemeine Zustand in den Eigenvektor über**

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen VIII

In drei Dimensionen:

Ebenso wie man $|B\rangle = \hat{M}|A\rangle$ als Matrizenmulitplikation darstellen kann

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}}_{\equiv|B\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}}_{=\hat{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}}_{\equiv|A\rangle}$$

So kann man auch für die dualen Vektoren $\langle B| = \langle A|\hat{M}^\dagger$
eine Matrizenmulitplikation definieren

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1^*, & \beta_2^*, & \beta_3^* \end{pmatrix}}_{\equiv\langle B|} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^*, & \alpha_2^*, & \alpha_3^* \end{pmatrix}}_{\equiv\langle A|} \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11}^* & m_{21}^* & m_{31}^* \\ m_{12}^* & m_{22}^* & m_{32}^* \\ m_{13}^* & m_{23}^* & m_{33}^* \end{pmatrix}}_{=\left(\hat{M}^T\right)^* = \hat{M}^\dagger}$$

Wdh.: Mathematik: Hermitesche Operatoren I

Für Eigenwerte gilt $\hat{M}\,|\,\lambda\rangle = \lambda\,|\,\lambda\rangle$

Eine Matrix für die gilt $\hat{M}^{\dagger} = \hat{M}$ **heisst hermitesch**
Eigenwerte von hermiteschen Matrizen sind reell

Wdh.: Mathematik: Hermitesche Operatoren II

Man kann zeigen:

1) **Eigenvektoren** $|\lambda_i\rangle$ **von hermiteschen Operatoren bilden eine vollständige Basis des Vektorraumes** V**, d.h. jeder Vektor** $|v\rangle$ **kann als eine Linearkombination von diesen Eigenvektoren dargestellt werden**
$$|v\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle$$

2) **Sind zwei Eigenwerte verschieden** $\lambda_1 \neq \lambda_2$**, dann sind die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal** $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$

3) **Sind zwei Eigenwerte zu verschieden Eigenvektoren (d.h. nicht linear abhängig) gleich** $\lambda_1 = \lambda_2$**, dann können die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal gewählt werden** $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: **Observablen (= messbare Größen)** **werden in der Quantenmechanik durch** **lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$** **dargestellt.**

Prinzip 2: **Mögliche Messergebnisse** **sind** **Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$**. **Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.**

Prinzip 3: **Eindeutig unterscheidbare Zustände** **werden in der Quantenmechanik durch** **orthogonale Zustände $|A_i\rangle$** **dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).**

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die **Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$**.

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Beispiel: allgemeiner Spinzustand $|A\rangle$

Messen wir den Spin in z-Richtung
dann lauten die Eigenzustände $|\lambda_1\rangle = |u\rangle$ und $|\lambda_2\rangle = |d\rangle$,
die möglichen Messwerte sind $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$

und der allgemeine Spinzustand lautet dann $|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$.

Die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen ist $|\alpha_u|^2 = |\langle A|u\rangle|^2$.
Die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen ist $|\alpha_d|^2 = |\langle A|d\rangle|^2$.

Nach der Messung von z.B. $\lambda_1 = +1$, wird bei weiteren σ_z-Messungen immer nur $\lambda_1 = +1$ gefunden,
d.h. der allgemeine Zustand $|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$ ist nach der Messung zum Zustand $|A\rangle = 1|u\rangle$ kollabiert.

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

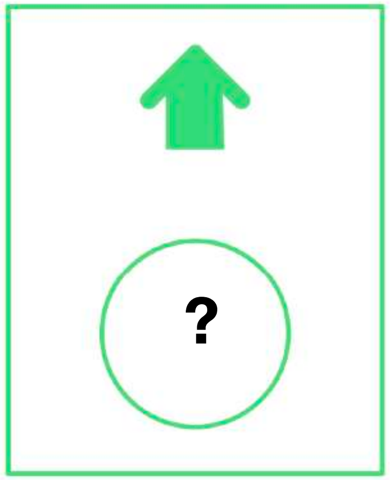
$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

$$|A\rangle = \alpha_u|u\rangle + \alpha_d|d\rangle$$

Messung:

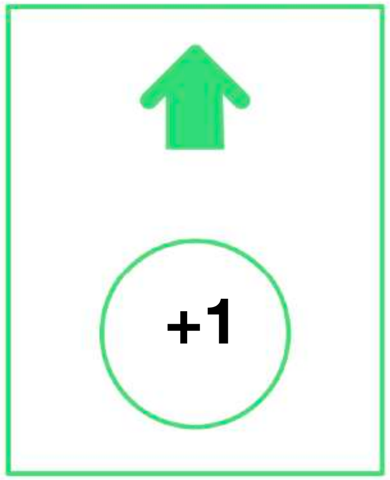


Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Messung:

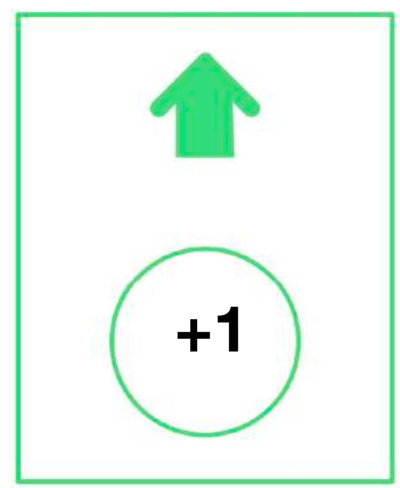


Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Messung:



Ende:

$$|A\rangle = 1 |u\rangle$$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Messen wir den Spin in x-Richtung
dann lauten die Eigenzustände $|\lambda_1\rangle = |r\rangle$ und $|\lambda_2\rangle = |l\rangle$,
die möglichen Messwerte sind $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$

Wir haben früher gezeigt: $|u\rangle = \dfrac{|r\rangle + |l\rangle}{\sqrt{2}}$ **und** $|u\rangle = \dfrac{|r\rangle - |l\rangle}{\sqrt{2}}$

Damit lautet der allgemeine Spinzustand

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \alpha_u \frac{|r\rangle + |l\rangle}{\sqrt{2}} + \alpha_d \frac{|r\rangle - |l\rangle}{\sqrt{2}}$$

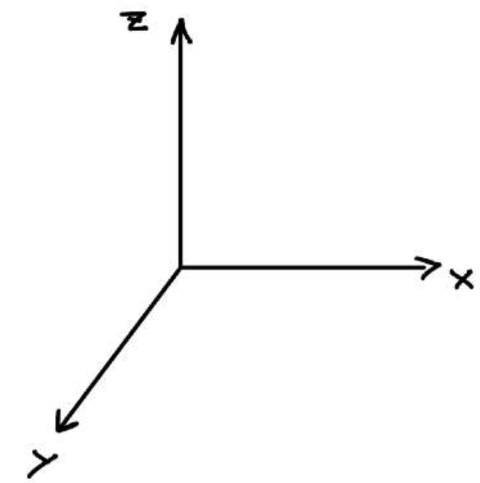
$$= \underbrace{\frac{\alpha_u + \alpha_d}{\sqrt{2}}}_{=\alpha_r} |r\rangle + \underbrace{\frac{\alpha_u - \alpha_d}{\sqrt{2}}}_{=\alpha_l} |l\rangle$$

Beachte:

Die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen ist $|\alpha_r|^2 = |\langle A|r\rangle|^2$.

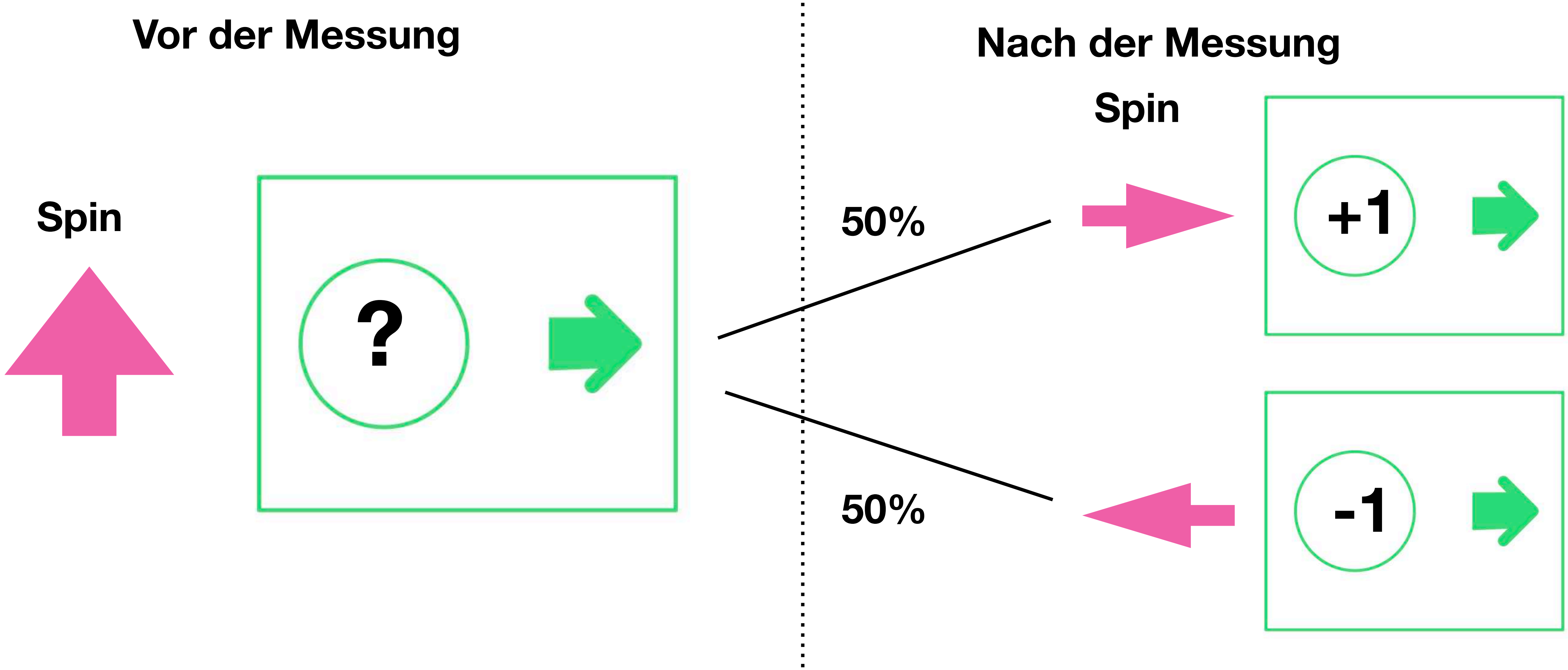
Die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen ist $|\alpha_l|^2 = |\langle A|l\rangle|^2$.

Wdh.: 1 Quanten Bit



Beispiele für Messergebnisse:

Messung =
Wechselwirkung
von $\mathscr{A}$ mit Spin



Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz
sondern eine experimentelle Tatsache,
die nun verstanden/interpretiert werden muss

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Vor der Messung ist das System im Zustand $|A\rangle = |u\rangle$

Nun messen wir den Spin in x Richtung σ_x,

d.h. die richtige Basis ist nun $|r\rangle$ und $|l\rangle$

Wir wissen $|u\rangle = \dfrac{|r\rangle + |l\rangle}{\sqrt{2}}$

D.h. der Zustand kann auch wie folgt dargestellt werden

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$$

Messen wir nun σ_x , so erhalten wir

mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ **= 50% den Wert $\sigma_x = +1$ und das System**

ist dann im Zustand $|A\rangle = |r\rangle$

oder

mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ **= 50% den Wert $\sigma_x = -1$ und das System**

ist dann im Zustand $|A\rangle = |l\rangle$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: **Observablen (= messbare Größen)** **werden in der Quantenmechanik durch** **lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$** **dargestellt.**

Wie sieht der zum Spin gehörige Operator aus?
Spinzustände müssen Eigenvektoren des Spin-Operators sein!

Prinzip 2: **Mögliche Messergebnisse** **sind** **Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$**. **Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.**

Prinzip 3: **Eindeutig unterscheidbare Zustände** **werden in der Quantenmechanik durch** **orthogonale Zustände $|A_i\rangle$** **dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).**

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die **Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$**.

Wdh.: Quanten-Spin—Zustände VIII

Darstellung als Spaltenvektoren

Wir können die Zustände $|u\rangle$ und $|d\rangle$ auch als Spalten Vektoren darstellen

$$|u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } |d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt sofort die Orthonormiertheit der Zustände

Damit erhalten wir für die Zustände $|r\rangle$ und $|l\rangle$

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle + |d\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle - |d\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diese sind ebenfalls wieder orthonormiert

Schliesslich finden wir für die Zustände $|i\rangle$ und $|o\rangle$

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle + i|d\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ und } |o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\rangle - i|d\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Diese sind ebenfalls wieder orthonormiert

Wdh.: Spin—Operatoren I

Es soll gelten $\sigma_z \,|\, u\rangle = + \,|\, u\rangle$ **und** $\sigma_z \,|\, d\rangle = - \,|\, d\rangle$

Im 2-dimensionalen Spalten Vektorraum lautet das

$$\sigma_z \,|\, u\rangle = \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} \\ \sigma_z^{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z \,|\, d\rangle = \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die 2x2 Darstellung von σ_z

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wdh.: Spin—Operatoren II

Für $|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ **und** $|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ **soll gelten**

$$\sigma_x|r\rangle = +|r\rangle \text{ und } \sigma_x|l\rangle = -|l\rangle$$

Im 2-dimensionalen Spalten Vektorraum lautet das

$$\sigma_x|r\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_x^{11} & \sigma_x^{12}\\ \sigma_x^{21} & \sigma_x^{22}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_x^{11}+\sigma_x^{12}\\ \sigma_x^{21}+\sigma_x^{22}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_x|l\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_x^{11} & \sigma_x^{12}\\ \sigma_x^{21} & \sigma_x^{22}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_x^{11}-\sigma_x^{12}\\ \sigma_x^{21}-\sigma_x^{22}\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Damit lautet die 2x2 Darstellung von σ_x

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Wdh.: Spin—Operatoren III

Für $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ **und** $|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$ **soll gelten**

$$\sigma_y|i\rangle = +|i\rangle \text{ und } \sigma_y|o\rangle = -|o\rangle$$

Im 2-dimensionalen Spalten Vektorraum lautet das

$$\sigma_y|r\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_y^{11} & \sigma_y^{12}\\ \sigma_y^{21} & \sigma_y^{22}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_y^{11} + i\sigma_y^{12}\\ \sigma_y^{21} + i\sigma_y^{22}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$\sigma_y|l\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_y^{11} & \sigma_y^{12}\\ \sigma_y^{21} & \sigma_y^{22}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_y^{11} - i\sigma_y^{12}\\ \sigma_y^{21} - i\sigma_y^{22}\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

Damit lautet die 2x2 Darstellung von σ_y

$$\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

Wdh.: Spin—Operatoren IV

Die Spinoperatoren für Messungen in x, y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dies sind die Pauli-Matrizen

....

Quaternionen $\{\mathbb{1}_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

Spin

SU(2) Algebra

Quantencomputing

SO(3) Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Drehimpuls Algebra

SL(1,3) Lorentz Algebra

WS 25/26
Mittwochs
Akademie

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$ dargestellt.

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$. Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch orthogonale Zustände $|A_i\rangle$ dargestellt ($\langle A_j|A_i\rangle = \delta_{ij}$).

Was sind eindeutig unterscheidbare Zustände?

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A|\lambda_i\rangle|^2$.

Wdh.: Eindeutig unterscheidbare Zustände

Eindeutig unterscheidbare Zustände: es gibt eine Messmöglichkeit, so dass man die Zustände eindeutig unterscheiden kann:

Beispiel:

$|u\rangle$ und $|d\rangle$ kann man eindeutig durch die Messung von σ_z unterscheiden.

Erhält man +1, dann kann das nur von $|u\rangle$ stammen,

erhält man -1, dann kann das nur von $|d\rangle$ stammen,

Ebenso

$|r\rangle$ und $|l\rangle$ kann man eindeutig durch die Messung von σ_x unterscheiden

Aber

$|u\rangle$ und $|r\rangle$ kann man nicht eindeutig durch eine Messung unterscheiden

Misst man σ_z und erhält +1, dann kann das von $|u\rangle$ oder $|r\rangle$ stammen!

Ebenso bei einer Messung von σ_x

Daher:

$\{|u\rangle, |d\rangle\}$ und $\{|r\rangle, |l\rangle\}$ sind eindeutig unterscheidbar: $\langle u|d\rangle = 0 = \langle r|l\rangle$

$\{|u\rangle, |r\rangle\}$ sind nicht eindeutig unterscheidbar $\langle u|r\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$ dargestellt.

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$. Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch orthogonale Zustände $|A_i\rangle$ dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Wdh.: Grundprinzip 4 der Quantenmechanik

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A|\lambda_i\rangle|^2$.

Man kann den Zustand $|A\rangle$ in der Basis der Eigenzustände $|\lambda_i\rangle$ darstellen

$$|A\rangle = \sum_i c_i|\lambda_i\rangle = c_1|\lambda_i\rangle + c_2|\lambda_2\rangle + c_3|\lambda_3\rangle + \dots$$

Mit der Wahrscheinlichkeit $|c_i|^2 = |\langle A|\lambda_i\rangle|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden und das System befindet sich nach der Messung im Zustand

$$|A\rangle = |\lambda_i\rangle$$

Wdh.: Grundprinzip 4 der Quantenmechanik II

Beachte: Die Messung der Observablen $\hat{O}$ ist nicht gleichbedeutend mit der Anwendung von $\hat{O}$ auf den Zustand $|A\rangle$!

Darstellung des Zustandes $|A\rangle$ in der Basis der Eigenzustände $|\lambda_i\rangle$ von $\hat{O}$:

$$|A\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle = c_1 |\lambda_i\rangle + c_2 |\lambda_2\rangle + c_3 |\lambda_3\rangle + \ldots$$

i) Messung von $\hat{O}$:
Mit der Wahrscheinlichkeit $|c_i|^2 = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden und das System befindet sich nach der Messung im Zustand $|A\rangle = |\lambda_i\rangle$

ii) Anwendung von $\hat{O}$ auf $|A\rangle$

$$\hat{O}|A\rangle = \hat{O} \sum_i c_i |\lambda_i\rangle = \sum_i c_i \hat{O} |\lambda_i\rangle = \sum_i c_i \lambda_i |\lambda_i\rangle$$

Wdh.: Zeitentwicklung I

In klassischer Mechanik dauert die Erklärung des Zustandes eines Systems ein paar Sekunden/Minuten: Zustand = {x, p}

In der Quanten-Mechanik haben wir mit der Erklärung des Zustandes eines Systems bereits einige Vorlesungen verbracht:
Zustand = Vektor in einem abstrakten Vektor-Raum

Neben dem Zustand, wollen wir aber wissen, welcher Zeitentwicklung dieser Zustand unterliegt!

In der klassischen Mechanik waren dies z.B. die Newtonschen Gleichungen

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{\vec{F}}{m}$$

Noch grundlegender

WS 24/25: Dynamische Systeme

System:= Menge von Objekten, z.B. Teilchen, Felder, Wellen…

Geschlossenes System:= völlig abgeschlossen von der Umwelt, keine Wechselwirkung

Zustand:= Objekte können in verschiedenen Zuständen sein, z.B. Objekt Münze kann in den Zuständen "Kopf" oder "Zahl" sein; Objekt Teilchen kann im Zustand x= 3.45m, v = 12.4 m/s sein

Zustandsraum:= Menge aller möglichen Zustände eine Objektes, z.B. Münze {Kopf, Zahl}; Teilchen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Dynamisches System:= System das sich mit der Zeit ändert, besteht aus Zustandsraum und dem Bewegungsgesetz oder dynamischen Gesetz. Zeit kann **kontinuierlich** ablaufen (Parameter $t \in \mathbb{R}$), oder in **diskreten** Schritten (Parameter $n \in \mathbb{N}$) .

Deterministisches dynamisches System:= ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen **zukünftigen** Zeitpunkt bestimmt werden.

Klassische Mechanik ist deterministisch und reversibel

Reversibles dynamisches System:= ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen vergangenen Zeitpunkt bestimmt werden.

WS 24/25: Dynamische Systeme

Beispiel 2: System mit zwei Zuständen

Z. B. Münze: Kopf K oder Zahl Z zeigt nach oben

$\boxed{K}$ $\boxed{Z}$

Freiheitsgrad: Variable, die das System beschreibt, hier σ:

Kopf: $\sigma = +1$

Zahl: $\sigma = -1$

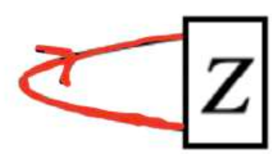
Dynamische Gesetze

Mathematische Formel: System zur Zeit n: $\sigma(n)$

A) Mache nichts:

$KKKKKKKKKKKKKK.......$

$ZZZZZZZZZZZZZZZZZ.....$

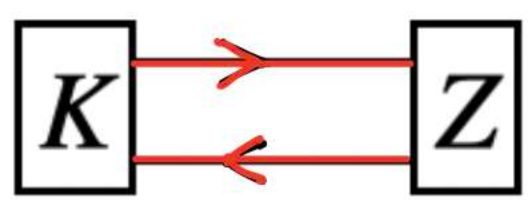


$$\sigma(n+1) = \sigma(n)$$

B) Ändere immer den Zustand:

$ZKZKZKZKZKZKZKZK\ldots$

$KZKZKZKZKZKZKZKZ\ldots$

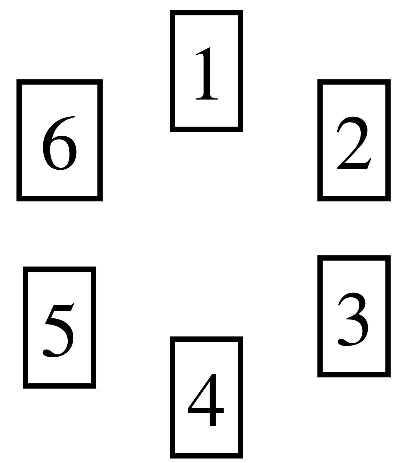


$$\sigma(n+1) = -\sigma(n)$$

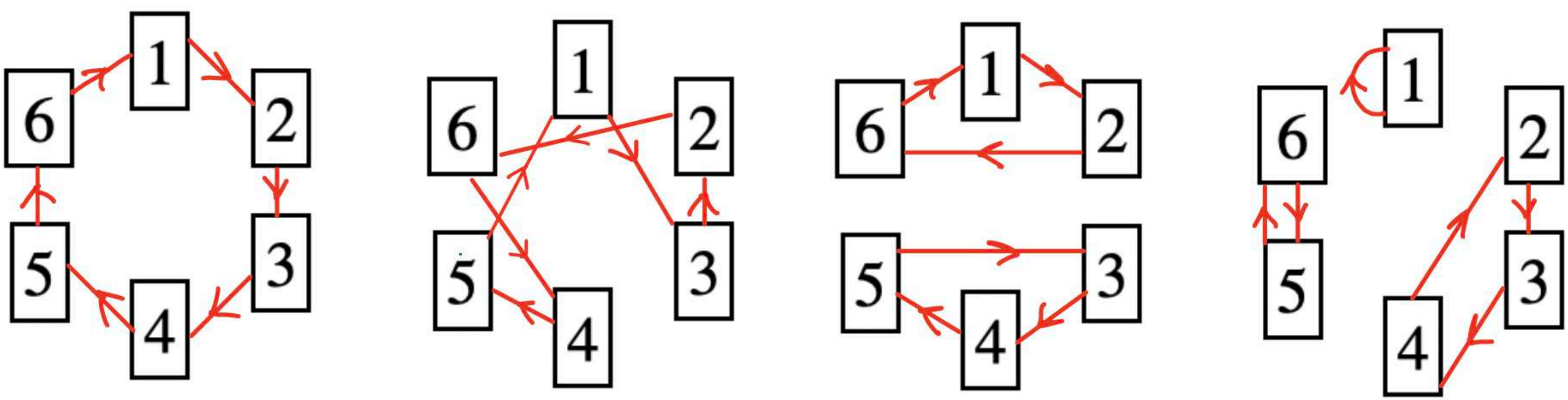
WS 24/25: Dynamische Systeme

Beispiel 3: System mit sechs Zuständen

Z. B.Würfel:



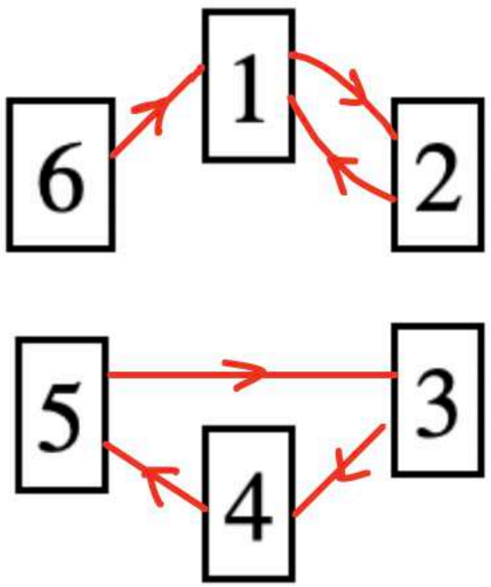
Dynamische Gesetze



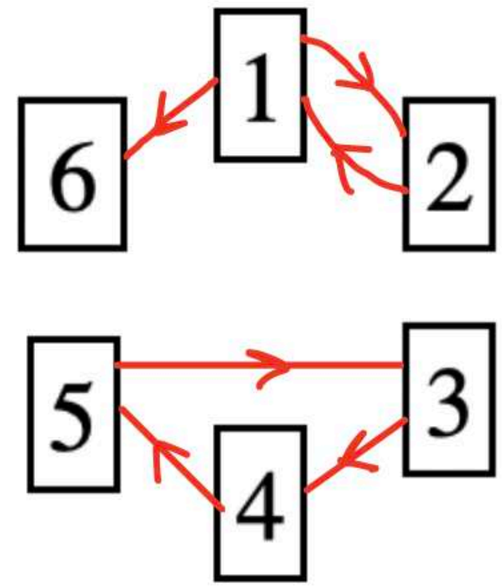
Deterministisch und Reversibel

WS 24/25: Dynamische Systeme

Klassische Physik ist deterministisch und reversible: welche Gesetze sind nicht erlaubt?



oberer Zyklus.
Deterministisch?
~~Reversibel~~?



oberer Zyklus.
~~Deterministisch~~?
Reversibel?

Gesetze sind deterministisch und reversibel

⇔ Information ist erhalten

Wdh.: Zeitentwicklung II

Man weiss, wohin man geht	Man weiss, woher man kommt

Determinismus und Reversibilität kann äquivalent ausgedrückt werden:

(-1). Gesetz or (-1). Haupsatz:

Information ist erhalten und kann nie verloren werden

Die Quantenversion des -1. Hauptsatzes ist

Unitarität

Kurze Zusammenfassung der Hauptsätze [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

- Nullter Hauptsatz der Thermodynamik: Einführung der Temperatur als physikalische Grundgröße: Stehen zwei Systeme jeweils mit einem dritten im thermodynamischen Gleichgewicht, so stehen sie auch untereinander im Gleichgewicht. Diejenige Zustandsgröße, die bei diesen Systemen übereinstimmt, ist die Temperatur.[30]
- Erster Hauptsatz der Thermodynamik: Die Energie eines abgeschlossenen Systems ist konstant.
- Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik: Thermische Energie ist nicht in beliebigem Maße in andere Energiearten umwandelbar.
- Dritter Hauptsatz der Thermodynamik: (Nernst-Theorem): Der absolute Nullpunkt der Temperatur ist unerreichbar.

Wdh.: Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t: $|\Psi(t)\rangle$

Die Menge aller $|\Psi(t)\rangle$ beschreibt die Geschichte, Gegenwart und Zukunft dieses Zustandes.

Grundannahme: kennt man den Zustand zu einer bestimmten Zeit, z.B. $|\Psi(0)\rangle$, so ergeben die quantenmechanischen Zeitentwicklungsgleichungen daraus den Zustand zu einer beliebigen Zeit t: $|\Psi(t)\rangle$

Wir schreiben

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\Psi(0)\rangle$$

D.h. die Operation $\hat{U}(t)$ macht aus dem Zustand $|\Psi(0)\rangle$ den Zustand $|\Psi(t)\rangle$
$\hat{U}(t)$ heisst Zeitentwicklungsoperator

Wir gehen davon aus:
Die Zeitentwicklung $\hat{U}(t)$ ist determinstisch!
Unbestimmtheit der Quantenmechanik liegt im Zustand!

Wdh.: Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$\hat{U}(t) : V \to V$, $|\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$

besitzen?

1. **Deterministisch; d.h.** $|\Psi(t)\rangle$ **ist eindeutig aus** $|\Psi(0)\rangle$ **bestimmt**
2. $\hat{U}(t)$ **ist eine lineare Abbildung - die Eigenschaften von Vektoren beruhen oft auf Linearität**
3. **Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ **und** $|\Phi(0)\rangle$ **unterscheidbar sind, dann gilt:** $\langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle = 0$

Diese Unterscheidbarkeit soll erhalten bleiben, d.h. es soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$$

Beachte: $|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Phi(0)\rangle$ **ist gleichbedeutend mit** $\langle\Phi(t)| = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)$

Somit soll gelten

$$\langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\Phi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = \langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle$$

Die ist erfüllt, wenn $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$**. Eine solche Matrix heisst unitär**

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch lineare, hermitesche Operatoren $\hat{O}$ dargestellt.

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind Eigenwerte λ_i des Operators $\hat{O}$. Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch orthogonale Zustände $|A_i\rangle$ dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen $\hat{O}$, so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Prinzip 5: Die Zeitentwicklung von Zuständen ist unitär.

Wdh.: Unitarität III

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \to V,\ |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. $\hat{U}(t=0) = 1$,
2. Für sehr kleine Zeiten ϵ, soll gelten $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. Aus $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ folgt dann $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right)\left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$, was zur Ordnung ϵ genau dann gilt wenn $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$,
   $\hat{H}$ ist hermitesch und beschreibt somit eine Observable
4. $\hat{H}$ heisst **Hamilton Operator**

Damit gilt nun: $|\Psi(\epsilon)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = (1 - i\epsilon\hat{H})|\Psi(0)\rangle$

Welches umgeschrieben werden kann in

$$\frac{|\Psi(\epsilon)\rangle - |\Psi(0)\rangle}{\epsilon} = -i\hat{H}|\Psi(0)\rangle \Leftrightarrow \frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung

Quantenmechanik

1. **Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$.**

Quantenmechanik

1. **Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.**

Quantenmechanik

1. Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.

2. Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben.

Quantenmechanik

1. **Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.**

2. **Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung** $$\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$ **beschrieben.**

Quantenmechanik

1. Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.

2. Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -\,i\hat{H}|\Psi\rangle$$ beschrieben.

3. Observablen werden durch hermetische Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben.

Quantenmechanik

1. Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.

2. Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung $$\frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$ beschrieben.

3. Observablen werden durch hermetische Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben. Die reellen Eigenwerte λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte.

Quantenmechanik

1. **Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.**

2. **Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung** $$\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$ **beschrieben.**

3. **Observablen werden durch hermetische Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben. Die reellen Eigenwerte λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte. Die Eigenvektoren $|v_i\rangle$, mit $\hat{\mathcal{O}}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$ bilden eine vollständige orthonormale Basis.**

Quantenmechanik

1. Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.

2. Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung $$\frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$ beschrieben.

3. Observablen werden durch hermetische Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben. Die reellen Eigenwerte λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte. Die Eigenvektoren $|v_i\rangle$, mit $\hat{\mathcal{O}}|v_i\rangle = \lambda_i |v_i\rangle$ bilden eine vollständige orthonormale Basis, d.h. der allgemeine Zustand kann in dieser Basis entwickelt werden $|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i |v_i\rangle$.

Quantenmechanik

1. **Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.**

2. **Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung**
$$\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$
beschrieben.

3. **Observablen werden durch hermetische Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben. Die reellen Eigenwerte λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte. Die Eigenvektoren $|v_i\rangle$, mit $\hat{\mathcal{O}}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$ bilden eine vollständige orthonormale Basis, d.h. der allgemeine Zustand kann in dieser Basis entwickelt werden $|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i|v_i\rangle = \sum_i \langle v_i|\Psi(t)\rangle|v_i\rangle$.**

Quantenmechanik

1. **Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.**

2. **Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung** $$\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$ **beschrieben.**

3. **Observablen werden durch hermetische Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben. Die reellen Eigenwerte λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte. Die Eigenvektoren $|v_i\rangle$, mit $\hat{\mathcal{O}}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$ bilden eine vollständige orthonormale Basis, d.h. der allgemeine Zustand kann in dieser Basis entwickelt werden** $|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i|v_i\rangle = \sum_i \langle v_i|\Psi(t)\rangle\,|v_i\rangle$.

4. **Der Ausgang einer Messung ist unbestimmt**

Quantenmechanik

1. **Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.**

2. **Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung**
$$\frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$ **beschrieben.**

3. **Observablen werden durch hermetische Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben. Die reellen Eigenwerte λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte. Die Eigenvektoren $|v_i\rangle$, mit $\hat{\mathcal{O}}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$ bilden eine vollständige orthonormale Basis, d.h. der allgemeine Zustand kann in dieser Basis entwickelt werden $|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i|v_i\rangle = \sum_i \langle v_i|\Psi(t)\rangle|v_i\rangle$.**

4. **Der Ausgang einer Messung ist unbestimmt, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $|c_i|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden.**

Quantenmechanik

1. Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.

2. Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung $$\frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$ beschrieben.

3. Observablen werden durch hermetische Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben. Die reellen Eigenwerte λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte. Die Eigenvektoren $|v_i\rangle$, mit $\hat{\mathcal{O}}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$ bilden eine vollständige orthonormale Basis, d.h. der allgemeine Zustand kann in dieser Basis entwickelt werden $|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i|v_i\rangle = \sum_i \langle v_i|\Psi(t)\rangle|v_i\rangle$.

4. Der Ausgang einer Messung ist unbestimmt, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $|c_i|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden.

5. Nach einer Messung geht der allgemeine Zustand $|\Psi(t)\rangle$ in den zum Messwert λ_i gehörigen Eigenvektor $|v_i\rangle$ über

Quantenmechanik

1. Zustände werden durch Vektoren in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein Skalarpodukt.

2. Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die Schrödinger-Gleichung $$\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$ beschrieben.

3. Observablen werden durch hermetische Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben. Die reellen Eigenwerte λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte. Die Eigenvektoren $|v_i\rangle$, mit $\hat{\mathcal{O}}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$ bilden eine vollständige orthonormale Basis, d.h. der allgemeine Zustand kann in dieser Basis entwickelt werden $|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i|v_i\rangle = \sum_i \langle v_i|\Psi(t)\rangle|v_i\rangle$.

4. Der Ausgang einer Messung ist unbestimmt, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $|c_i|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden.

5. Nach einer Messung geht der allgemeine Zustand $|\Psi(t)\rangle$ in den zum Messwert λ_i gehörigen Eigenvektor $|v_i\rangle$ über: $|\Psi(t)\rangle \rightarrow |v_i\rangle$

Quantenmechanik

1. **Zustände** werden durch **Vektoren** in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein **Skalarpodukt**.

2. Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die **Schrödinger-Gleichung**
$$\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$ beschrieben.

3. **Observablen** werden durch **hermetische Operatoren** $\hat{\mathcal{O}}$ beschrieben.
Die **reellen Eigenwerte** λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte.
Die **Eigenvektoren** $|v_i\rangle$, mit $\hat{\mathcal{O}}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$ bilden eine **vollständige orthonormale Basis**, d.h. der allgemeine Zustand kann in dieser Basis entwickelt werden $|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i|v_i\rangle = \sum_i \langle v_i|\Psi(t)\rangle|v_i\rangle$.

4. Der Ausgang einer **Messung** ist unbestimmt, d.h. mit der **Wahrscheinlichkeit** $|c_i|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden.

5. Nach einer **Messung** geht der allgemeine Zustand $|\Psi(t)\rangle$ in den zum Messwert λ_i gehörigen Eigenvektor $|v_i\rangle$ über: $|\Psi(t)\rangle \rightarrow |v_i\rangle$
(**Kollaps der Wellenfunktion**)

Plancksche Konstante

Der Hamilton-Operator wird sich als Energie-Operator rausstellen.

Plancksche Konstante

Der Hamilton-Operator wird sich als Energie-Operator rausstellen.

Stellt man die Schrödinger-Gleichung in üblichen Einheiten (m, kg, s) dar,

Plancksche Konstante

Der Hamilton-Operator wird sich als Energie-Operator rausstellen.

Stellt man die Schrödinger-Gleichung in üblichen Einheiten (m, kg, s) dar, so muss sie leicht modifiziert werden

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi\rangle$$

mit der Planckschen Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$$

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$$

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}}$$

Diese Größe gibt den Unterschied zwischen mikroskopischer Welt und mikroskopischer Welt an:

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$$

Diese Größe gibt den Unterschied zwischen mikroskopischer Welt und mikroskopischer Welt an:

- mikroskopische Welt: Prozesse haben Werte für die Wirkung $S = \int L dt$ die im Bereich von $\hbar$ liegen.

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$$

Diese Größe gibt den Unterschied zwischen mikroskopischer Welt und mikroskopischer Welt an:

- mikroskopische Welt: Prozesse haben Werte für die Wirkung $S = \int L dt$ **die im Bereich von** $\hbar$ **liegen. Beispiel: Elektron im Grundzustand von H-Atom** $\approx 10\hbar$

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}}$$

Diese Größe gibt den Unterschied zwischen mikroskopischer Welt und mikroskopischer Welt an:

- mikroskopische Welt: Prozesse haben Werte für die Wirkung $S = \int L dt$ **die im Bereich von** $\hbar$ **liegen. Beispiel: Elektron im Grundzustand von H-Atom** $\approx 10\hbar$

- makroskopische Welt: Prozesse haben Werte für die Wirkung $S = \int L dt$ **die viel, viel größer als** $\hbar$ **sind.**

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}}$$

Diese Größe gibt den Unterschied zwischen mikroskopischer Welt und mikroskopischer Welt an:

- mikroskopische Welt: Prozesse haben Werte für die Wirkung $S = \int L dt$ **die im Bereich von** $\hbar$ **liegen. Beispiel: Elektron im Grundzustand von H-Atom** $\approx 10\hbar$

- makroskopische Welt: Prozesse haben Werte für die Wirkung $S = \int L dt$ **die viel, viel größer als** $\hbar$ **sind. Beispiel: 1kg Masse fällt 1 s lang** $\approx 3.2 \cdot 10^{35}\hbar$

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$$

Warum ist $\hbar$ so klein?

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}}$$

Warum ist $\hbar$ so klein?

Oder besser: Warum sind wir so groß?
Die Einheiten kg, m, s beziehen sich auf unsere Größe

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}}$$

Warum ist $\hbar$ so klein?

Oder besser: Warum sind wir so groß?
Die Einheiten kg, m, s beziehen sich auf unsere Größe

Weil es sehr viele Atome braucht um komplexe Strukturen hervorzubringen, die denken können….

Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726.... \cdot 10^{-34} \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$$

Warum ist $\hbar$ so klein?

Oder besser: Warum sind wir so groß?
Die Einheiten kg, m, s beziehen sich auf unsere Größe

Weil es sehr viele Atome braucht um komplexe Strukturen hervorzubringen, die denken können….

Erwartungswerte I

Experiment misst Observable $\hat{L}$

Erwartungswerte I

Experiment misst Observable $\hat{L}$

Messergebnis kann nur ein Eigenwert λ_i **von** $\hat{L}$ **sein**

Erwartungswerte I

Experiment misst Observable $\hat{L}$

Messergebnis kann nur ein Eigenwert λ_i **von** $\hat{L}$ **sein**

Die Wahrscheinlichkeits-Funktion $P(\lambda_i)$

Erwartungswerte I

Experiment misst Observable $\hat{L}$

Messergebnis kann nur ein Eigenwert λ_i von $\hat{L}$ sein

Die Wahrscheinlichkeits-Funktion $P(\lambda_i)$ gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit man den Wert λ_i bei der Messung der Observable $\hat{L}$ findet

Erwartungswerte I

Experiment misst Observable $\hat{L}$

Messergebnis kann nur ein Eigenwert λ_i von $\hat{L}$ sein

Die Wahrscheinlichkeits-Funktion $P(\lambda_i)$ gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit man den Wert λ_i bei der Messung der Observable $\hat{L}$ findet

Wir bezeichnen den Erwartungs-/Mittelwert von $\hat{L}$

Erwartungswerte I

Experiment misst Observable $\hat{L}$

Messergebnis kann nur ein Eigenwert λ_i von $\hat{L}$ sein

Die Wahrscheinlichkeits-Funktion $P(\lambda_i)$ gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit man den Wert λ_i bei der Messung der Observable $\hat{L}$ findet

Wir bezeichnen den Erwartungs-/Mittelwert von $\hat{L}$ als

$$\langle \hat{L} \rangle = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i)$$

Erwartungswerte I

Experiment misst Observable $\hat{L}$

Messergebnis kann nur ein Eigenwert λ_i **von** $\hat{L}$ **sein**

Die Wahrscheinlichkeits-Funktion $P(\lambda_i)$ **gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit man den Wert** λ_i **bei der Messung der Observable** $\hat{L}$ **findet**

Wir bezeichnen den Erwartungs-/Mittelwert von $\hat{L}$ **als**
$\langle \hat{L} \rangle = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i)$ **(gewichtete Summe)**

Erwartungswerte II

Betrachte einen allgemeinen Zustand $|A\rangle$

Dieser Zustand kann in der Ortonormalbasis der Eigenvektoren $|\lambda_i\rangle$ von $\hat{L}$,

$\hat{L}|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle$, dargestellt werden

$$|A\rangle = \sum_i \alpha_i |\lambda_i\rangle$$

Wir bestimmen nun $\langle A|\hat{L}|A\rangle$

$$\hat{L}|A\rangle = \hat{L}\sum_i \alpha_i|\lambda_i\rangle = \sum_i \alpha_i \hat{L}|\lambda_i\rangle = \sum_i \alpha_i\lambda_i|\lambda_i\rangle$$

$$\langle A|\hat{L}|A\rangle = \sum_j \alpha_j^*\langle\lambda_j|\sum_i \alpha_i\lambda_i|\lambda_i\rangle = \sum_{i,j}\alpha_j^*\alpha_i\lambda_i\langle\lambda_j|\lambda_i\rangle = \sum_i |\alpha_i|^2\lambda_i$$

Identifizieren wir $|\alpha_i|^2$ mit $P(\lambda_i)$ so erhalten wir für den Erwartungswert

$$\langle\hat{L}\rangle = \langle A|\hat{L}|A\rangle$$

Erwartungswerte III

Phasenverschiebung des Zustandes: $|A\rangle$

$$|B\rangle = e^{i\theta}|A\rangle \Rightarrow \langle B| = e^{-i\theta}\langle A|$$

Daraus folgt $\langle B|B\rangle = \langle A|A\rangle$ **und** $\langle B|\hat{L}|B\rangle = \langle A|\hat{L}|A\rangle$

Das bedeutet, dass eine globale Phasentransformation eines Zustandes keinen physikalischen Effekt hat

Übergang zur klassischen Physik I

Erwartungswert einer Messung erscheint schon relativ klassisch….

Übergang zur klassischen Physik II

Wie ändern sich Erwartungswerte $\langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle$ mit der Zeit?

$$\frac{d}{dt}\langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle = \langle \dot{\Psi}(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | \hat{L} | \dot{\Psi}(t) \rangle$$

Es gilt: $i\hbar \frac{\partial | \Psi \rangle}{\partial t} = i\hbar | \dot{\Psi} \rangle = \hat{H} | \Psi \rangle$

$$-i\hbar \langle \dot{\Psi} | = \langle \Psi | \hat{H}^\dagger = \langle \Psi | \hat{H}$$

Und somit

$$\frac{d}{dt}\langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar}\left(\langle \Psi(t) | \hat{H}\hat{L} | \Psi(t) \rangle - \langle \Psi(t) | \hat{L}\hat{H} | \Psi(t) \rangle \right)$$

$$\frac{d}{dt}\langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle \Psi(t) | \left(\hat{H}\hat{L} - \hat{L}\hat{H} \right) | \Psi(t) \rangle$$

Definiere: Kommutator von 2 Operatoren

$$\left[\hat{H}, \hat{L} \right] = \hat{H}\hat{L} - \hat{L}\hat{H}$$

Übergang zur klassischen Physik III

Verschwindet der Kommentator einer Observablen $\hat{L}$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$,

$$\left[\hat{H}, \hat{L}\right] = \hat{H}\hat{L} - \hat{L}\hat{H} = 0,$$

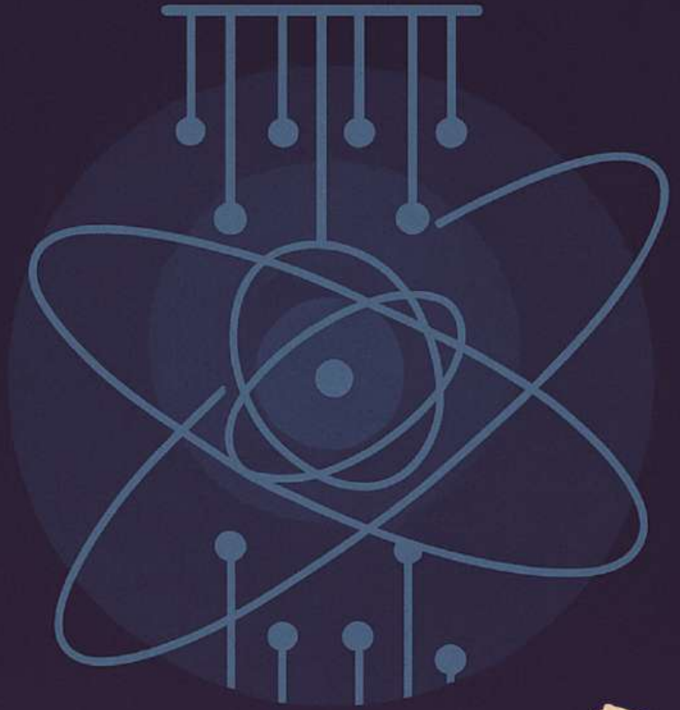
Dann sind die Erwartungswerte dieser Observablen für beliebige Zustände zeitlich konstant

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)\,|\,\hat{L}\,|\,\Psi(t)\rangle = 0$$

PHYSIK IM APOLLO

Universität Siegen

QUANTENCOMPUTING TRIFFT AKROBATIK



23.11.25 18:00

24.11.25 10:00

25.11.25 19:30