



Schrödinger's Katze am Emmy Noether Campus: sie lebt!

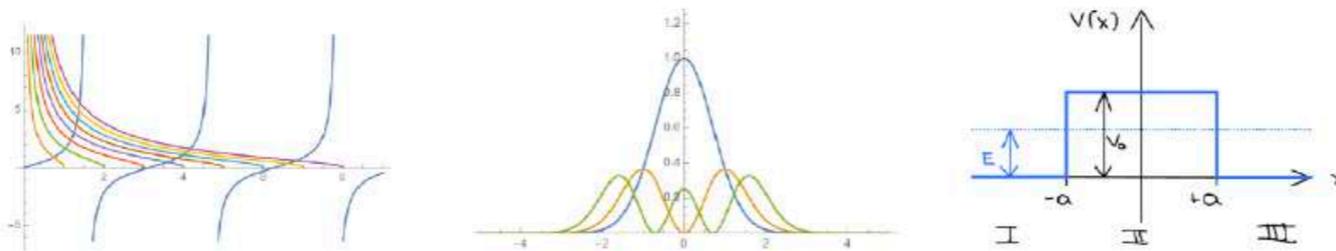
- 7.5:
- 14.5:
- 21.5:
- 28.5: - - -
- 4.6:
- 11.6:
- 18.6:
- 25.6: Prof. Tao Han
- 2.7:
- 9.7:
- + Oppenheimer
- 16.7:



Ankündigung für das Sommersemester 2025

Das theoretische Minimum II

Quantenmechanik - Prof. Dr. Alexander Lenz, 4PHY00011V



Diese Vorlesungsreihe gibt eine Einführung in die Grundprinzipien der theoretischen Physik.

2025 wird weltweit das 100 jährige Jubiläum der Entdeckung der Quantenmechanik gefeiert. Ursprünglich war dies über viele Jahrzehnte lang reinste Grundlagenforschung ohne jegliche Hinweise auf potentielle Anwendungen. 100 Jahre später finden wir, dass ein Großteil der technologischen Errungenschaften der Menschheit im letzten Jahrhundert auf der Quantenmechanik basiert - zuletzt gipfelte dies in den ersten Quantencomputern.

Im Sommersemester 2025 beschäftigen wir uns daher mit einer Einführung in die Grundprinzipien der Quantenmechanik:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Die Vorlesung richtet sich an Mittwochsakademiker, Oberstufenschülerinnen und -schüler, Lehrkräfte und Physikenthusiasten mit einem großen Interesse an aktuellen Themen der Physik. Es werden mathematische Konzepte (auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe) eingeführt und benutzt. Die Vorlesung ist an die erfolgreiche Vorlesungs- und Buchreihe "The theoretical Minimum" von Leonard Susskind angelehnt, welche auf dieselbe Zielgruppe ausgerichtet war. Vom Niveau her wird sich die Veranstaltung auf dem schmalen Grat zwischen einer rein populärwissenschaftlichen Bildershow und einer theoretischen Physikvorlesung im Bachelorstudium bewegen.

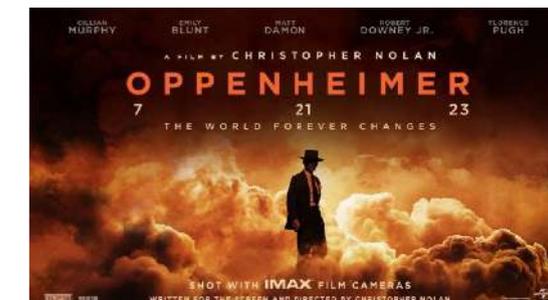
<https://www.quantum2025.de>



11 Termine im Sommersemester 25:
7.5., 14.5., 21.5., 28.5., 4.6., 11.6., 18.6., 25.6., 2.7., 9.7., 16.7.
Mittwochs 16-18
Emmy Noether Campus ENC-D-114
Infos unter: alexander.lenz@uni-siegen.de
<https://tp1.physik.uni-siegen.de/mittwochsakademie/>



Prof. Dr. Tao Han forscht mit Unterstützung der Humboldt-Stiftung an der Uni Siegen.

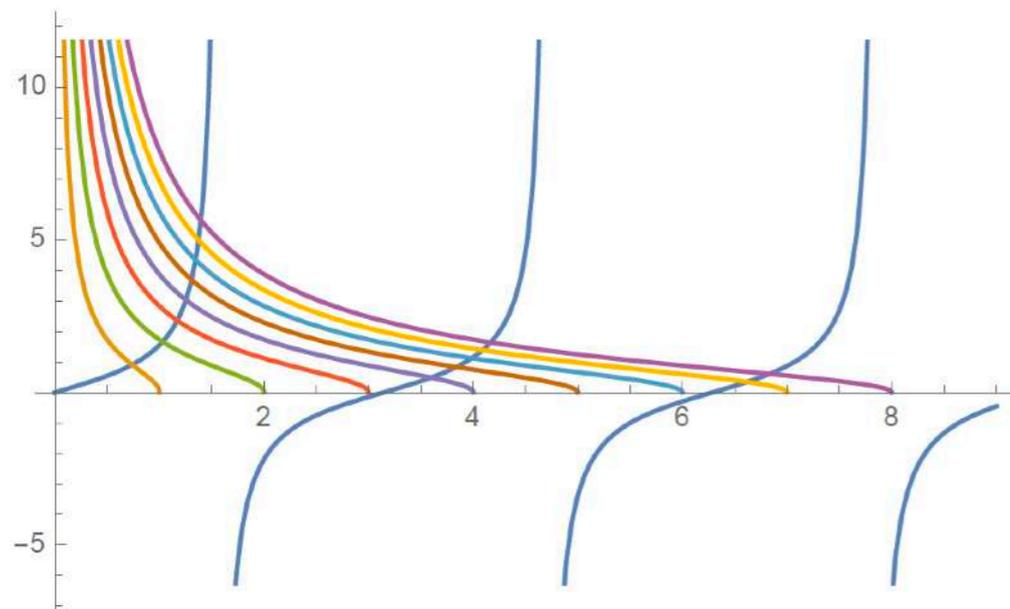


Vorlesung: Das theoretische Minimum

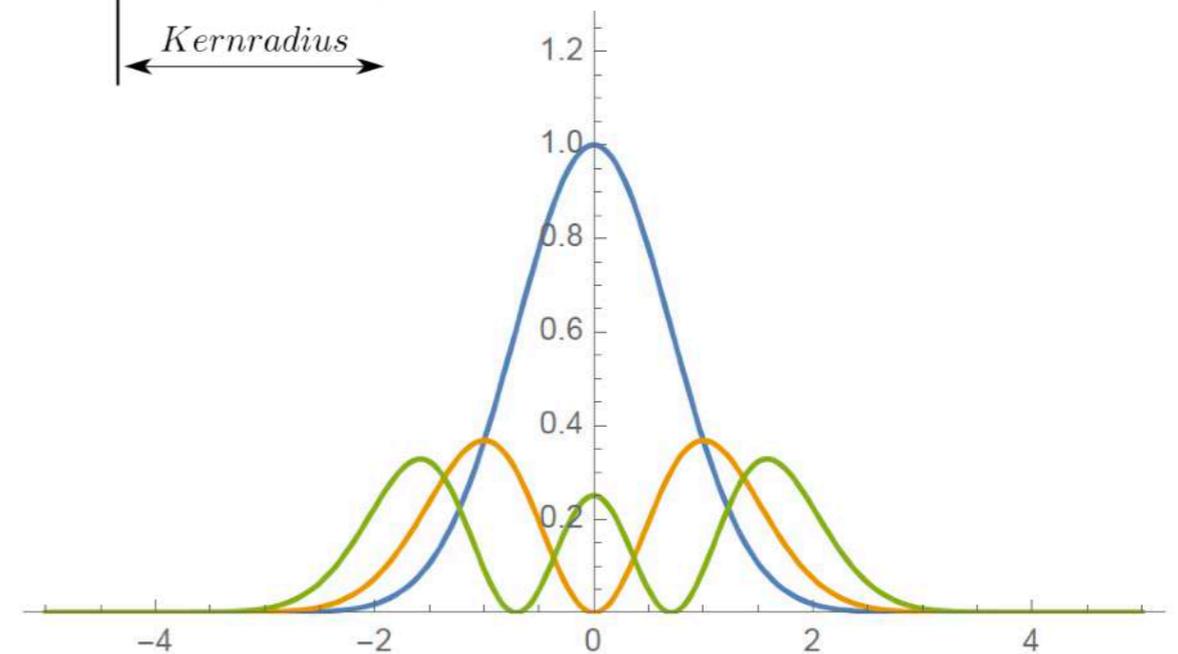
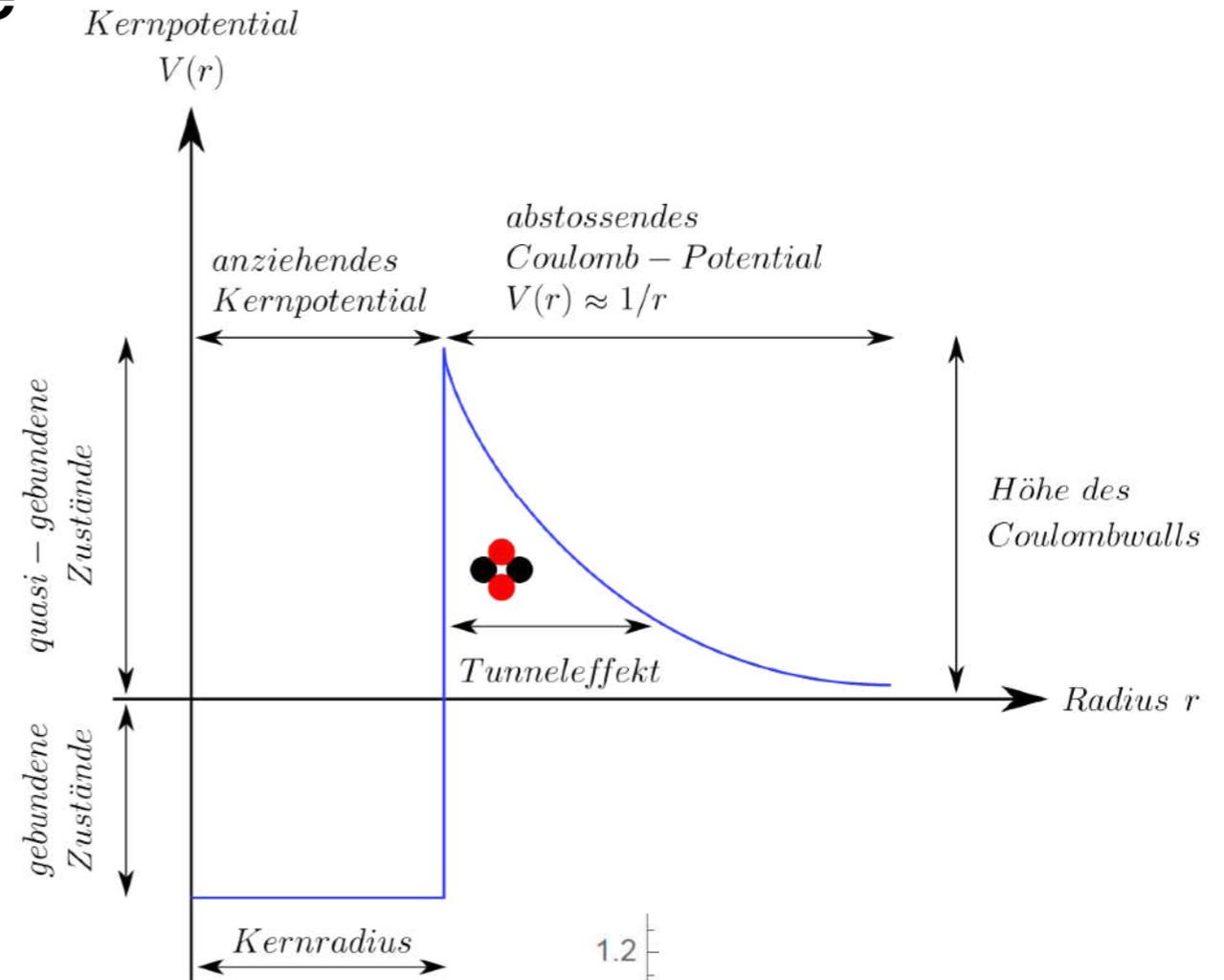
Mittwochsakademie

Ablauf

- 7.5.: Einführung
- 14.5.: Zustände, Vektorräume
- 21.5.: Grundprinzipien der QM
- 28.5.: -
- 4.6.: Zeitentwicklung
- 11.6.: Unschärferelation
- 18.6.: Verschränkung
- 25.6.: **Festkolloquium: Prof. Tao Han**
- 2.7.: Teilchen und Wellen
- 9.7.: Dynamik + **Film: Oppenheimer**
- 16.7.: Harmonischer Oszillator



Streuung an Kastenpotential



**Aufenthaltswahrscheinlichkeit
beim harmonischen Oszillator**

Wdh.: Vektorräume - Definition

Diese anschauliche Konzept vom 2 dimensionalen Raum, kann auf 3 oder n Dimensionen erweitert werden und auch vollkommen abstrahiert werden!

Ein K -Vektorraum V ist eine Menge von Elementen $\{\vec{v}\}$ oder $\{|\alpha\rangle\}$ für die gilt:

1. Es gibt eine **Addition** in V mit:

Abgeschlossenheit $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in V \Rightarrow |\alpha\rangle + |\beta\rangle \in V$

kommutativ $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$

Es gibt ein Nullelement $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\beta\rangle$

Es gibt ein Inverses $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |0\rangle$

Assoziativität $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$

2. Es gibt eine **skalare Multiplikation** mit Elementen aus $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$

Abgeschlossenheit $|\alpha\rangle \in V, \lambda \in K \Rightarrow \lambda |\alpha\rangle \in V$

Linearität in K : $(\lambda + \mu) |\alpha\rangle = \lambda |\alpha\rangle + \mu |\alpha\rangle$

Linearität in V : $\lambda (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = \lambda |\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle$

$\lambda(\mu |\alpha\rangle) = (\lambda\mu) |\alpha\rangle$ $1 |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$

Wdh.: Vektorräume - Beispiele

Beispiele für K -Vektorräume:

1. \mathbb{R}^2 : 2-dimensionaler Raum
2. \mathbb{R}^3 : 3-dimensionaler Raum
3. \mathbb{R}^n : n-dimensionaler Raum
4. \mathbb{L} : Raum aller Funktionen
5.

Alle Erkenntnisse aus den einfachen Vektorräumen, können übernommen werden!

Es gibt eine **Basis**: $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n, \dots\}$ und jeder Vektor \vec{v} aus dem Vektorraum kann durch diese Basis dargestellt werden $\vec{v} = \sum_i c_i \vec{b}_i$

Skalarprodukt (inneres Produkt): $V \times V \rightarrow K, \quad |\alpha\rangle, |\beta\rangle \mapsto \langle \alpha | \beta \rangle$

$$\langle \alpha | \beta_1 + \beta_2 \rangle = \langle \alpha | \beta_1 \rangle + \langle \alpha | \beta_2 \rangle \quad \text{Linearität (Teil 1)}$$

$$\langle \alpha | \lambda \beta \rangle = \lambda \langle \alpha | \beta \rangle \quad \text{Linearität (Teil 2)}$$

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^* \quad \text{Symmetrie}$$

Wdh.: Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} :

1. **Sichtweise:** $V \times V \rightarrow K$,

$$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle \equiv \vec{v} \circ \vec{w} := v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \dots$$

Zum Vektorraum V gibt es einen **Dualraum** V^*

$$\forall \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \end{pmatrix} \in V \text{ gibt es einen dualen Vektor } (\vec{v}^T)^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*, \dots) \in V^*$$

Oft wird \vec{v} mit $|v\rangle$ bezeichnet und $(\vec{v}^T)^*$ mit $\langle v|$

2. **Sichtweise:** $V^* \times V \rightarrow K$,

$$((\vec{v}^T)^*, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle \equiv (\vec{v}^T)^* \cdot \vec{w} = v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3 + \dots$$

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen I

Ein **linearer Operator** \hat{M} bildet ein Element $|A\rangle$ des Vektorraums V , auf ein anderes Element $|B\rangle$ des Vektorraums V ab: $|B\rangle = \hat{M}|A\rangle$

$$\hat{M} : V \rightarrow V; |A\rangle \mapsto |B\rangle = \hat{M}|A\rangle$$

So dass gilt

- i) $\hat{M}(|A_1\rangle + |A_2\rangle) = \hat{M}|A_1\rangle + \hat{M}|A_2\rangle \quad \forall |A_1\rangle, |A_2\rangle \in V$
- ii) $\hat{M}(\lambda|A\rangle) = \lambda\hat{M}|A\rangle \quad \forall |A\rangle \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

Die Gleichung $\vec{\beta} = \hat{M}\vec{\alpha} \Leftrightarrow \beta_k = \sum_i \alpha_i m_{ki}$ lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen Va

Wir haben nun hergeleitet:

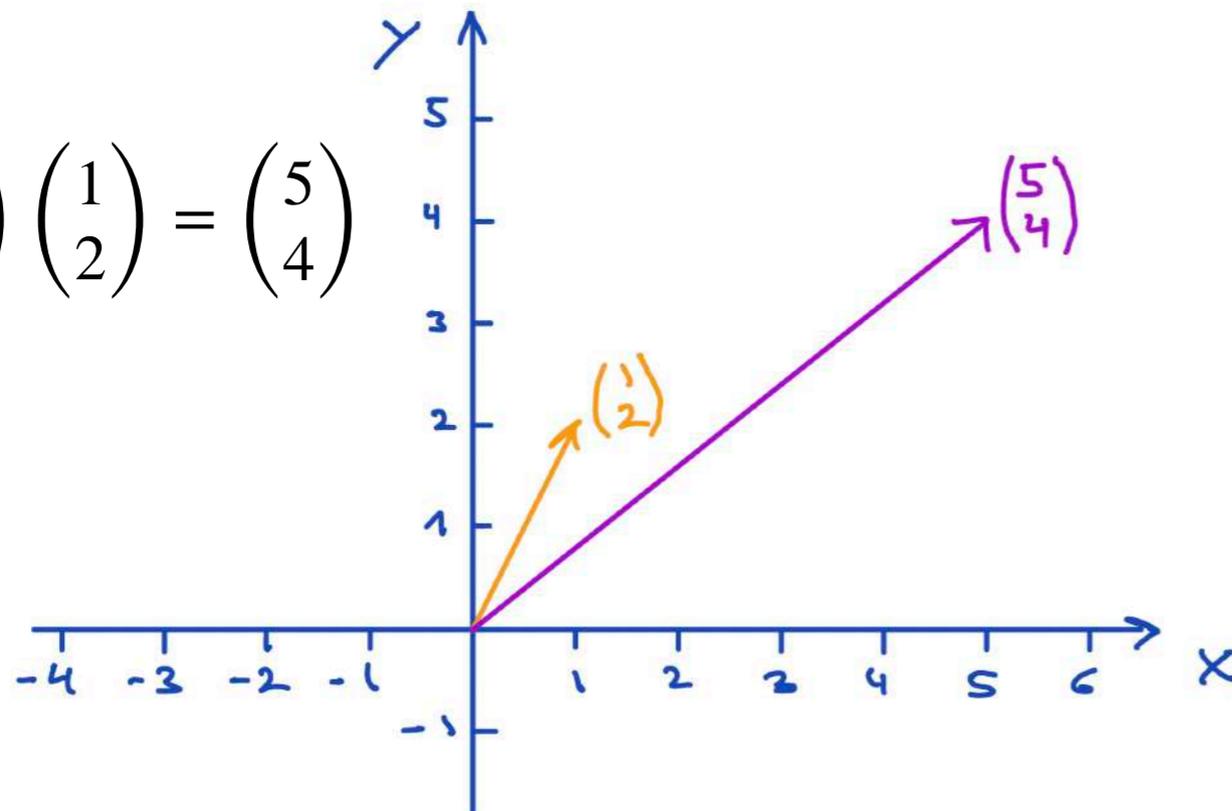
Lineare Abbildungen in Vektorräumen können als Matrizen dargestellt werden

Die gilt für beliebige abstrakte Vektorräume, aber auch für die vertrauten \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

In \mathbb{R}^2 kann man sich die Wirkung von Matrizen anschaulich vorstellen

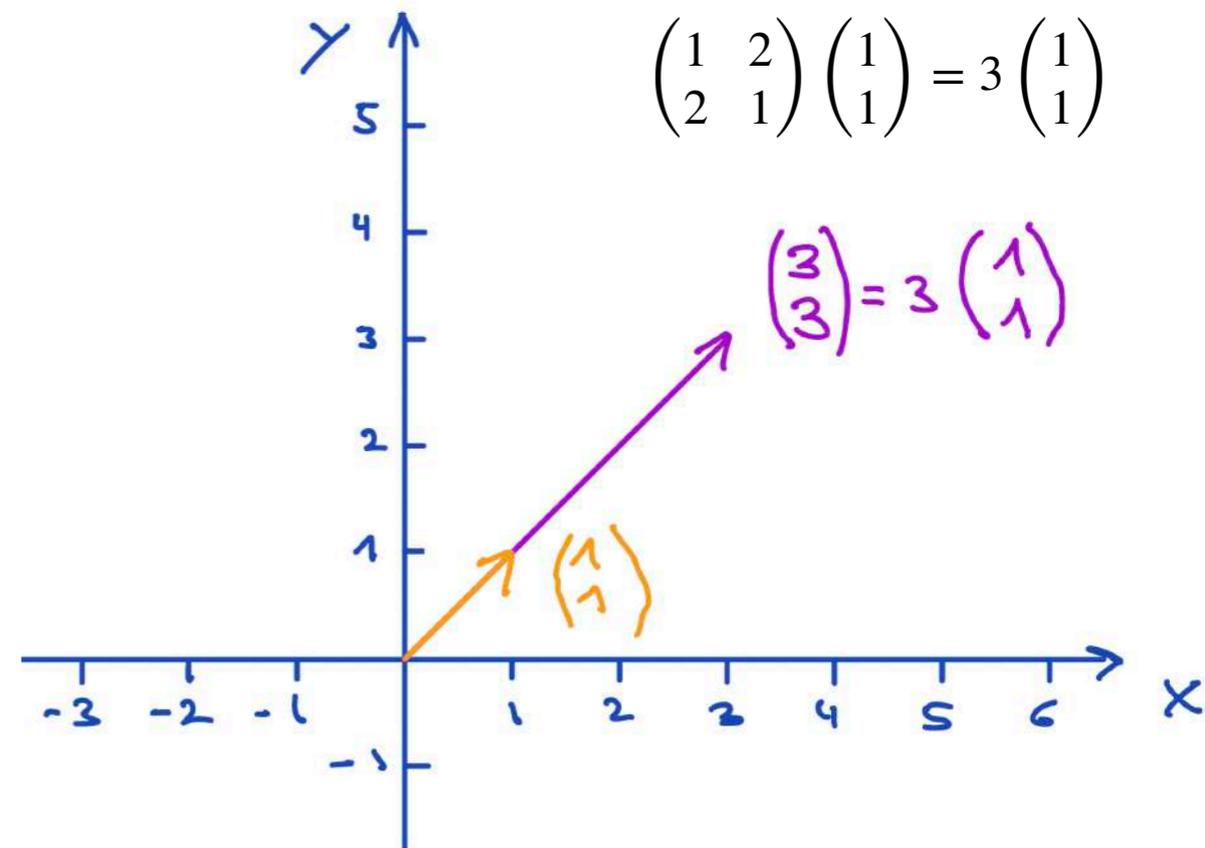
Im Allgemeinen ändert eine Matrizenmultiplikation sowohl die Richtung als auch den Betrag des Vektors

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Hier wird nur die Länge geändert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Wdh.: Mathematik: Lineare Abbildungen VI

Ändert die Matrixmultiplikation die Richtung des Vektors nicht, dann gilt

$$\hat{M}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

$|\lambda\rangle$ heisst **Eigenvektor** der Matrix \hat{M}
 λ heisst **Eigenwert** der Matrix \hat{M}

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}}_{\equiv|B\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}}_{=\hat{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}}_{\equiv|A\rangle} \iff \underbrace{(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*)}_{\equiv\langle B|} = \underbrace{(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)}_{\equiv\langle A|} \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11}^* & m_{21}^* & m_{31}^* \\ m_{12}^* & m_{22}^* & m_{32}^* \\ m_{13}^* & m_{23}^* & m_{33}^* \end{pmatrix}}_{=(\hat{M}^T)^* = \hat{M}^\dagger}$$

Eine Matrix für die gilt $\hat{M}^\dagger = \hat{M}$ heisst **hermitesch**
 Eigenwerte von hermiteschen Matrizen sind reell

Wdh.: Mathematik: Hermitesche Operatoren II

Man kann zeigen:

- 1) **Eigenvektoren** $|\lambda_i\rangle$ von **hermiteschen Operatoren** bilden eine **vollständige Basis** des Vektorraumes V , d.h. jeder Vektor $|v\rangle$ kann als eine **Linearkombination** von diesen Eigenvektoren dargestellt werden

$$|v\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle$$

- 2) Sind zwei **Eigenwerte verschieden** $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann sind die zugehörigen **Eigenvektoren orthogonal** $\langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle = 0$

- 3) Sind zwei **Eigenwerte zu verschiedenen Eigenvektoren** (d.h. nicht linear abhängig) gleich $\lambda_1 = \lambda_2$, dann können die zugehörigen **Eigenvektoren orthogonal gewählt werden** $\langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle = 0$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: **Observablen (= messbare Größen)** werden in der Quantenmechanik durch **lineare, hermitesche Operatoren \hat{O}** dargestellt.

Prinzip 2: **Mögliche Messergebnisse** sind **Eigenwerte λ_i des Operators \hat{O}** . Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: **Eindeutig unterscheidbare Zustände** werden in der Quantenmechanik durch **orthogonale Zustände $|A_i\rangle$** dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen \hat{O} , so ist die **Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$** .

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Beispiel: allgemeiner Spin-Zustand $|A\rangle$

Messen wir den Spin in z -Richtung

**dann lauten die Eigenzustände $|\lambda_1\rangle = |u\rangle$ und $|\lambda_2\rangle = |d\rangle$,
die möglichen Messwerte sind $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$**

und der allgemeine Spin-Zustand lautet dann $|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$.

Die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen ist $|\alpha_u|^2 = |\langle A | u \rangle|^2$.

Die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen ist $|\alpha_d|^2 = |\langle A | d \rangle|^2$.

Nach der Messung von z.B. $\lambda_1 = +1$, wird bei weiteren σ_z -Messungen immer nur $\lambda_1 = +1$ gefunden,

d.h. der allgemeine Zustand $|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$ ist nach der Messung zum Zustand $|A\rangle = 1 |u\rangle$ kollabiert.

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

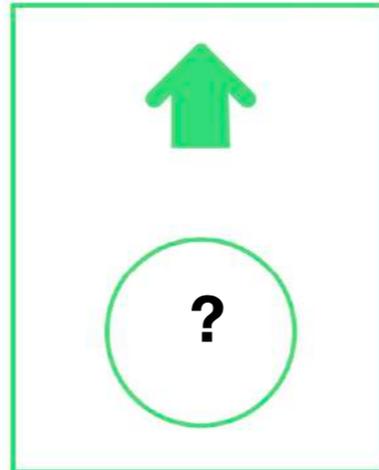
$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Messung:



Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Messung:



Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Start:

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

Messung:



Ende:

$$|A\rangle = 1 |u\rangle$$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Messen wir den Spin in x -Richtung

**dann lauten die Eigenzustände $|\lambda_1\rangle = |r\rangle$ und $|\lambda_2\rangle = |l\rangle$,
die möglichen Messwerte sind $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$**

Wir haben früher gezeigt: $|u\rangle = \frac{|r\rangle + |l\rangle}{\sqrt{2}}$ und $|d\rangle = \frac{|r\rangle - |l\rangle}{\sqrt{2}}$

Damit lautet der allgemeine Spinzustand

$$|A\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle = \alpha_u \frac{|r\rangle + |l\rangle}{\sqrt{2}} + \alpha_d \frac{|r\rangle - |l\rangle}{\sqrt{2}} = \underbrace{\frac{\alpha_u + \alpha_d}{\sqrt{2}}}_{=\alpha_r} |r\rangle + \underbrace{\frac{\alpha_u - \alpha_d}{\sqrt{2}}}_{=\alpha_l} |l\rangle$$

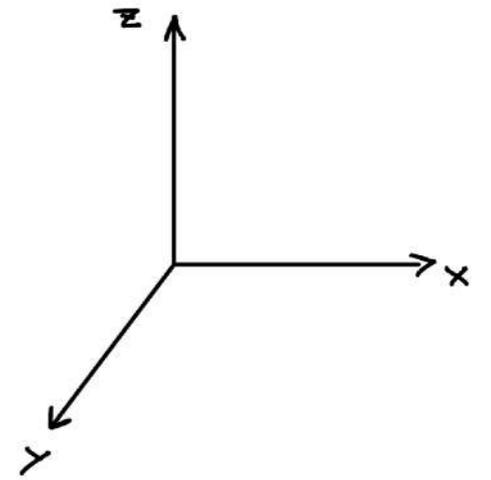
Beachte:

Die Wahrscheinlichkeit +1 zu messen ist $|\alpha_r|^2 = |\langle A | r \rangle|^2$.

Die Wahrscheinlichkeit -1 zu messen ist $|\alpha_l|^2 = |\langle A | l \rangle|^2$.

Wdh.: 1 Quanten Bit

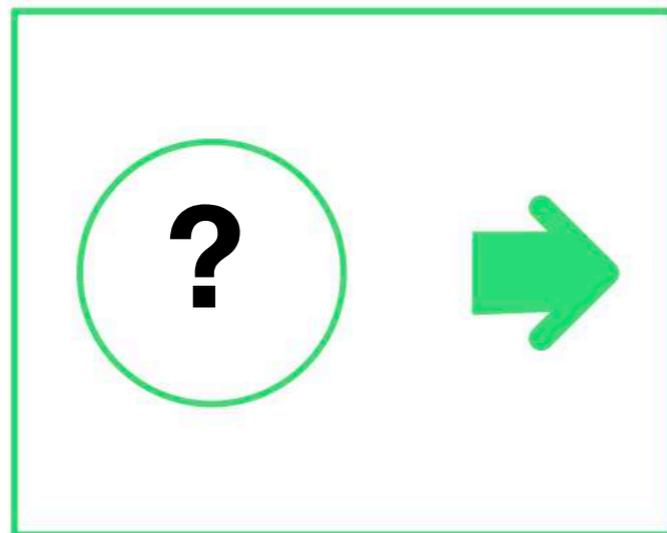
Beispiele für Messergebnisse:



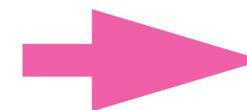
Messung =
Wechselwirkung
von \mathcal{A} mit Spin

Vor der Messung

Nach der Messung



50%



50%



Dieses Ergebnis ist keine logische/offensichtliche Konsequenz
sondern eine experimentelle Tatsache,
die nun verstanden/interpretiert werden muss

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Vor der Messung ist das System im Zustand $|A\rangle = |u\rangle$

Nun messen wir den Spin in x Richtung σ_x , d.h. die richtige Basis ist nun $|r\rangle$ und $|l\rangle$

Stelle den Zustand wie folgt dar $|A\rangle = |u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|r\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|l\rangle$

Messen wir nun σ_x , so erhalten wir

mit der Wahrscheinlichkeit $\left(1/\sqrt{2}\right)^2 = 50\%$ den Wert $\sigma_x = +1$ und das System ist dann im Zustand $|A\rangle = |r\rangle$

oder
mit der Wahrscheinlichkeit $\left(1/\sqrt{2}\right)^2 = 50\%$ den Wert $\sigma_x = -1$ und das System ist dann im Zustand $|A\rangle = |l\rangle$

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch **lineare, hermitesche Operatoren \hat{O}** dargestellt.

Wie sieht der zum Spin gehörige Operator aus?
Spinzustände müssen Eigenvektoren des Spin-Operators sein!

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind **Eigenwerte λ_i des Operators \hat{O}** . Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch **orthogonale Zustände $|A_i\rangle$** dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen \hat{O} , so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Wdh.: Quanten-Spin – Zustände VIII

Darstellung als Spaltenvektoren

Darstellung der Spinzustände als Spalten Vektoren darstellen

$$|u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } |d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle + |d\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle - |d\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle + i|d\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ und } |o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle - i|d\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Suche die Operatoren die den Spin beschreiben

d.h. lineare Abbildungen (hier 2x2 Matrizen) deren Eigenfunktionen obige Spaltenvektoren sind und deren Eigenfunktionen +1 und - 1 lauten

Wdh.: Spin – Operatoren I

Spin in z -Richtung: es soll gelten $\sigma_z |u\rangle = + |u\rangle$ und $\sigma_z |d\rangle = - |d\rangle$

Im 2-dimensionalen Spalten Vektorraum lautet das

$$\sigma_z |u\rangle = \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} \\ \sigma_z^{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z |d\rangle = \begin{pmatrix} \sigma_z^{11} & \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{21} & \sigma_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z^{12} \\ \sigma_z^{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die 2x2 Darstellung von σ_z

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wdh.: Spin – Operatoren II

Analog

Spin in x -Richtung: $\sigma_x |r\rangle = + |r\rangle$ und $\sigma_x |l\rangle = - |l\rangle$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spin in y -Richtung: $\sigma_y |i\rangle = + |i\rangle$ und $\sigma_y |o\rangle = - |o\rangle$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Wdh.: Spin – Operatoren IV

Die Spinoperatoren für Messungen in x , y und z Richtung lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

....

Quaternionen
 $\{\mathbb{1}_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

Dies sind die Pauli-Matrizen

Spin

SU(2)
Algebra

Quantencomputing

SO(3)
Drehungen
im \mathbb{R}^3

Drehimpuls
Algebra

SL(1,3)
Lorentz
Algebra

WS 25/26
Mittwochs
Akademie

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: **Observablen (= messbare Größen)** werden in der Quantenmechanik durch **lineare, hermitesche Operatoren \hat{O}** dargestellt.

Prinzip 2: **Mögliche Messergebnisse** sind **Eigenwerte λ_i des Operators \hat{O}** . Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: **Eindeutig unterscheidbare Zustände** werden in der Quantenmechanik durch **orthogonale Zustände $|A_i\rangle$** dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Was sind eindeutig unterscheidbare Zustände? Orthonormale

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen \hat{O} , so ist die **Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$** .

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: Observablen (= messbare Größen) werden in der Quantenmechanik durch **lineare, hermitesche Operatoren \hat{O}** dargestellt.

Prinzip 2: Mögliche Messergebnisse sind **Eigenwerte λ_i des Operators \hat{O}** . Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: Eindeutig unterscheidbare Zustände werden in der Quantenmechanik durch **orthogonale Zustände $|A_i\rangle$** dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen \hat{O} , so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Wdh.: Grundprinzip 4 der Quantenmechanik

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen \hat{O} , so ist die **Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.**

Man kann jeden Zustand $|A\rangle$ in der Basis der Eigenzustände $|\lambda_i\rangle$ darstellen

$$|A\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle = c_1 |\lambda_1\rangle + c_2 |\lambda_2\rangle + c_3 |\lambda_3\rangle + \dots$$

Mit der Wahrscheinlichkeit $|c_i|^2 = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden und das System befindet sich nach der Messung im Zustand

$$|A\rangle = |\lambda_i\rangle$$

Wdh.: Grundprinzip 4 der Quantenmechanik II

Beachte: Die Messung der Observablen \hat{O} ist nicht gleichbedeutend mit der Anwendung von \hat{O} auf den Zustand $|A\rangle$!

Darstellung des Zustandes $|A\rangle$ in der Basis der Eigenzustände $|\lambda_i\rangle$ von \hat{O} :

$$|A\rangle = \sum_i c_i |\lambda_i\rangle = c_1 |\lambda_1\rangle + c_2 |\lambda_2\rangle + c_3 |\lambda_3\rangle + \dots$$

i) Messung von \hat{O} :

Mit der Wahrscheinlichkeit $|c_i|^2 = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden und das System befindet sich nach der Messung im Zustand $|A\rangle = |\lambda_i\rangle$

ii) **Messung bedeutet nicht: Anwendung von \hat{O} auf $|A\rangle$**

$$\hat{O}|A\rangle = \hat{O} \sum_i c_i |\lambda_i\rangle = \sum_i c_i \hat{O} |\lambda_i\rangle = \sum_i c_i \lambda_i |\lambda_i\rangle$$

Wdh.: Zeitentwicklung I

In klassischer Mechanik dauert die Erklärung des Zustandes eines Systems ein paar Sekunden/Minuten: Zustand = $\{x, p\}$

In der Quanten-Mechanik haben wir mit der Erklärung des Zustandes eines Systems bereits einige Vorlesungen verbracht:
Zustand = Vektor in einem abstrakten Vektor-Raum

Neben dem Zustand, wollen wir aber wissen, welcher Zeitentwicklung dieser Zustand unterliegt!

In der klassischen Mechanik waren dies z.B. die Newtonschen Gleichungen

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{\vec{F}}{m}$$

WS 24/25: Dynamische Systeme

Deterministisches dynamisches System: ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen **zukünftigen** Zeitpunkt bestimmt werden.

Reversibles dynamisches System: ist der Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, dann kann daraus der Zustand für jeden beliebigen vergangenen Zeitpunkt bestimmt werden.

Klassische Mechanik ist deterministisch und reversibel

Wdh.: Zeitentwicklung II

Man weiss,
wohin man geht

Man weiss,
woher man kommt

Determinismus und Reversibilität kann äquivalent ausgedrückt werden:

(-1). Gesetz or (-1). Hauptsatz:

Information ist erhalten und kann nie verloren werden

Die Quantenversion des -1. Hauptsatzes ist

Unitarität

Kurze Zusammenfassung der Hauptsätze [[Bearbeiten](#) | [Quelltext bearbeiten](#)]

- Nullter Hauptsatz der Thermodynamik: Einführung der Temperatur als physikalische Grundgröße: Stehen zwei Systeme jeweils mit einem dritten im [thermodynamischen Gleichgewicht](#), so stehen sie auch untereinander im Gleichgewicht. Diejenige Zustandsgröße, die bei diesen Systemen übereinstimmt, ist die Temperatur.^[30]
- [Erster Hauptsatz der Thermodynamik](#): Die Energie eines abgeschlossenen Systems ist konstant.
- [Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik](#): Thermische Energie ist nicht in beliebigem Maße in andere Energiearten umwandelbar.
- [Dritter Hauptsatz der Thermodynamik](#): (Nernst-Theorem): Der [absolute Nullpunkt](#) der Temperatur ist unerreichbar.

Wdh.: Unitarität I

Betrachte ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ zum Zeitpunkt t : $|\Psi(t)\rangle$
 $\{|\Psi(t)\rangle\}$ beschreibt die Geschichte, Gegenwart und Zukunft dieses Zustandes.

Grundannahme: kennt man $|\Psi(0)\rangle$, so ergeben die quantenmechanischen
Zeitentwicklungsgleichungen $|\Psi(t)\rangle$

$$\text{Wir schreiben: } |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle$$

$\hat{U}(t)$ heisst Zeitentwicklungsoperator

Wir gehen davon aus:

Die Zeitentwicklung $\hat{U}(t)$ ist deterministisch!
Unbestimmtheit der Quantenmechanik liegt im Zustand!

Wdh.: Unitarität II

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \rightarrow V, |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

- 1. Deterministisch; d.h. $|\Psi(t)\rangle$ ist eindeutig aus $|\Psi(0)\rangle$ bestimmt**
- 2. $\hat{U}(t)$ ist eine lineare Abbildung**
- 3. Reversibilität: Unterschiede müssen erhalten bleiben.**

Wenn $|\Psi(0)\rangle$ und $|\Phi(0)\rangle$ unterscheidbar sind, dann gilt: $\langle \Phi(0) | \Psi(0) \rangle = 0$

Diese Unterscheidbarkeit soll erhalten bleiben, d.h. $\langle \Phi(t) | \Psi(t) \rangle = 0$

$$|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Phi(0)\rangle \Leftrightarrow \langle \Phi(t) | = \langle \Phi(0) | \hat{U}^\dagger(t)$$

Es soll gelten: $\langle \Phi(t) | \Psi(t) \rangle = \langle \Phi(0) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{U}(t) | \Psi(0) \rangle = \langle \Phi(0) | \Psi(0) \rangle$

Die ist erfüllt, wenn $\hat{U}^\dagger(t) \hat{U}(t) = 1$. Eine solche Matrix heisst **unitär**

Wdh.: Grundprinzipien der Quantenmechanik

Prinzip 1: **Observablen (= messbare Größen)** werden in der Quantenmechanik durch **lineare, hermitesche Operatoren \hat{O}** dargestellt.

Prinzip 2: **Mögliche Messergebnisse** sind **Eigenwerte λ_i des Operators \hat{O}** . Ist das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$, dann wird immer der Messwert λ_i gefunden.

Prinzip 3: **Eindeutig unterscheidbare Zustände** werden in der Quantenmechanik durch **orthogonale Zustände $|A_i\rangle$** dargestellt ($\langle A_j | A_i \rangle = \delta_{ij}$).

Prinzip 4: Ist das System im Zustand $|A\rangle$ und man misst die Observablen \hat{O} , so ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert λ_i zu finden gleich $P(\lambda_i) = |\langle A | \lambda_i \rangle|^2$.

Prinzip 5: Die Zeitentwicklung von Zuständen ist **unitär**.

Wdh.: Unitarität III

Welche Eigenschaften soll

$$\hat{U}(t) : V \rightarrow V, |\Psi(0)\rangle \mapsto |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle$$

besitzen?

1. $\hat{U}(t = 0) = 1$,
2. Für sehr kleine Zeiten ϵ , soll gelten $\hat{U}(\epsilon) = 1 - i\epsilon\hat{H}$
3. Aus $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$ folgt dann $\left(1 + i\epsilon\hat{H}^\dagger\right) \left(1 - i\epsilon\hat{H}\right) = 1$, was zur Ordnung ϵ genau dann gilt wenn $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$,
 \hat{H} ist hermitesch und beschreibt somit eine Observable
4. \hat{H} heisst **Hamilton Operator**

Damit gilt nun: $|\Psi(\epsilon)\rangle = \hat{U}(\epsilon) |\Psi(0)\rangle = (1 - i\epsilon\hat{H}) |\Psi(0)\rangle$

Welches umgeschrieben werden kann in

$$\frac{|\Psi(\epsilon)\rangle - |\Psi(0)\rangle}{\epsilon} = -i\hat{H} |\Psi(0)\rangle \Leftrightarrow \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H} |\Psi\rangle$$

Dies ist die **Schrödinger-Gleichung**

Quantenmechanik

1. **Zustände** werden durch **Vektoren** in einem abstrakten Vektorraum beschrieben $|\Psi(t)\rangle$. In diesem Vektorraum gibt es ein **Skalarprodukt**.
2. Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die **Schrödinger-Gleichung**
$$\frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = -i\hat{H}|\Psi\rangle$$
 beschrieben.
3. **Observablen** werden durch **hermetische Operatoren** \hat{O} beschrieben. Die **reellen Eigenwerte** λ_i dieser Operatoren sind die möglichen Messwerte. Die **Eigenvektoren** $|v_i\rangle$, mit $\hat{O}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$ bilden eine **vollständige orthonormale Basis**, d.h. der allgemeine Zustand kann in dieser Basis entwickelt werden $|\Psi(t)\rangle = \sum_i c_i |v_i\rangle = \sum_i \langle v_i | \Psi(t) \rangle |v_i\rangle$.
4. Der Ausgang einer **Messung** ist unbestimmt, d.h. mit der **Wahrscheinlichkeit** $|c_i|^2$ wird der Messwert λ_i gefunden.
5. Nach einer **Messung** geht der allgemeine Zustand $|\Psi(t)\rangle$ in den zum Messwert λ_i gehörigen Eigenvektor $|v_i\rangle$ über: $|\Psi(t)\rangle \rightarrow |v_i\rangle$
(**Kollaps der Wellenfunktion**)

Wdh.: Plancksche Konstante

Der Hamilton-Operator wird sich als Energie-Operator rausstellen.

Stellt man die Schrödinger-Gleichung in üblichen Einheiten (m, kg, s) dar, so muss sie leicht modifiziert werden

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi\rangle$$

mit der Planckschen Konstante

$$\hbar = 1.054571726\dots \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

Wdh.: Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726\dots \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

Diese Größe gibt den Unterschied zwischen mikroskopischer Welt und makroskopischer Welt an:

- **mikroskopische Welt:** Prozesse haben Werte für die Wirkung $S = \int L dt$ die im Bereich von \hbar liegen. Beispiel: Elektron im Grundzustand von H-Atom $\approx 10\hbar$

- **makroskopische Welt:** Prozesse haben Werte für die Wirkung $S = \int L dt$ die viel, viel größer als \hbar sind. Beispiel: 1kg Masse fällt 1 s lang $\approx 3.2 \cdot 10^{35}\hbar$

Wdh.: Plancksche Konstante

$$\hbar = 1.054571726\dots \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

Warum ist \hbar so klein?

Oder besser: Warum sind wir so groß?

Die Einheiten kg, m, s beziehen sich auf unsere Größe

Weil es sehr viele Atome braucht um komplexe Strukturen hervorzubringen, die denken können....

Wdh.: Erwartungswerte I

Experiment misst Observable \hat{L}

Messergebnis kann nur ein Eigenwert λ_i von \hat{L} sein

Die Wahrscheinlichkeits-Funktion $P(\lambda_i)$ gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit man den Wert λ_i bei der Messung der Observable \hat{L} findet

Wir bezeichnen den Erwartungs-/Mittelwert von \hat{L} als

$$\langle \hat{L} \rangle = \sum_i \lambda_i P(\lambda_i) \text{ (gewichtete Summe)}$$

Wdh.: Erwartungswerte II

Betrachte einen allgemeinen Zustand $|A\rangle$

Dieser Zustand kann in der Ortonormalbasis der Eigenvektoren $|\lambda_i\rangle$ von \hat{L} ,

$\hat{L}|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle$, dargestellt werden

$$|A\rangle = \sum_i \alpha_i |\lambda_i\rangle$$

Wir bestimmen nun $\langle A | \hat{L} | A \rangle$

$$\hat{L}|A\rangle = \hat{L} \sum_i \alpha_i |\lambda_i\rangle = \sum_i \alpha_i \hat{L} |\lambda_i\rangle = \sum_i \alpha_i \lambda_i |\lambda_i\rangle$$

$$\langle A | \hat{L} | A \rangle = \sum_j \alpha_j^* \langle \lambda_j | \sum_i \alpha_i \lambda_i |\lambda_i\rangle = \sum_{i,j} \alpha_j^* \alpha_i \lambda_i \langle \lambda_j | \lambda_i \rangle = \sum_i |\alpha_i|^2 \lambda_i$$

Identifizieren wir $|\alpha_i|^2$ mit $P(\lambda_i)$ so erhalten wir für den Erwartungswert

$$\langle \hat{L} \rangle = \langle A | \hat{L} | A \rangle$$

Wdh.: Erwartungswerte III

Phasenverschiebung des Zustandes: $|A\rangle$

$$|B\rangle = e^{i\theta} |A\rangle \Rightarrow \langle B| = e^{-i\theta} \langle A|$$

Daraus folgt $\langle B|B\rangle = \langle A|A\rangle$ und $\langle B|\hat{L}|B\rangle = \langle A|\hat{L}|A\rangle$

Das bedeutet, dass eine globale Phasentransformation eines Zustandes keinen physikalischen Effekt hat

Wdh.: Übergang zur klassischen Physik II

Wie ändern sich Erwartungswerte $\langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle$ mit der Zeit?

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle = \langle \dot{\Psi}(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | \hat{L} | \dot{\Psi}(t) \rangle$$

Es gilt: $i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = i\hbar |\dot{\Psi}\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$
 $-i\hbar \langle \dot{\Psi} | = \langle \Psi | \hat{H}^\dagger = \langle \Psi | \hat{H}$

Und somit

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \left(\langle \Psi(t) | \hat{H} \hat{L} | \Psi(t) \rangle - \langle \Psi(t) | \hat{L} \hat{H} | \Psi(t) \rangle \right)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle \Psi(t) | \left(\hat{H} \hat{L} - \hat{L} \hat{H} \right) | \Psi(t) \rangle$$

Definiere: Kommutator von 2 Operatoren

$$\left[\hat{H}, \hat{L} \right] = \hat{H} \hat{L} - \hat{L} \hat{H}$$

Wdh.: Übergang zur klassischen Physik III

Verschwindet der Kommutator einer Observablen \hat{L} mit dem Hamiltonoperator \hat{H} ,

$$[\hat{H}, \hat{L}] = \hat{H}\hat{L} - \hat{L}\hat{H} = 0,$$

dann sind die Erwartungswerte dieser Observablen für beliebige Zustände zeitlich konstant

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle \Psi(t) | [\hat{H}, \hat{L}] | \Psi(t) \rangle = 0$$

Klassische Physik

Teilchen der Masse m in Potential $V(x)$

Klassische Physik

Teilchen der Masse m in Potential $V(x)$

4 Betrachtungsweisen:

Klassische Physik

Teilchen der Masse m in Potential $V(x)$

4 Betrachtungsweisen:

i) $F = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ Newtonsche Bewegungsgleichungen

Klassische Physik

Teilchen der Masse m in Potential $V(x)$

4 Betrachtungsweisen:

i) $F = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ Newtonsche Bewegungsgleichungen

ii) $L = T - V = \frac{p^2}{2m} - V(x)$ Euler-Lagrange Gleichungen

Klassische Physik

Teilchen der Masse m in Potential $V(x)$

4 Betrachtungsweisen:

- i) $F = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ Newtonsche Bewegungsgleichungen
- ii) $L = T - V = \frac{p^2}{2m} - V(x)$ Euler-Lagrange Gleichungen
- iii) $H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ Hamilton-Funktion

Klassische Physik

Teilchen der Masse m in Potential $V(x)$

4 Betrachtungsweisen:

i) $F = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ Newtonsche Bewegungsgleichungen

ii) $L = T - V = \frac{p^2}{2m} - V(x)$ Euler-Lagrange Gleichungen

iii) $H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ Hamilton-Funktion

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ und } \dot{x} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

Klassische Physik

Teilchen der Masse m in Potential $V(x)$

4 Betrachtungsweisen:

i) $F = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ Newtonsche Bewegungsgleichungen

ii) $L = T - V = \frac{p^2}{2m} - V(x)$ Euler-Lagrange Gleichungen

iii) $H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ Hamilton-Funktion

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ und } \dot{x} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

iv) Poisson-Klammern: für eine beliebige Observable $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x, p, t)$ gilt

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = \{\mathcal{O}, H\} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t}$$

Klassische Physik

Teilchen der Masse m in Potential $V(x)$

4 Betrachtungsweisen:

i) $F = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ Newtonsche Bewegungsgleichungen

ii) $L = T - V = \frac{p^2}{2m} - V(x)$ Euler-Lagrange Gleichungen

iii) $H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ Hamilton-Funktion

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ und } \dot{x} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

iv) Poisson-Klammern: für eine beliebige Observable $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x, p, t)$ gilt

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = \{\mathcal{O}, H\} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} \text{ mit } \{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Klassische Physik

Teilchen der Masse m in Potential $V(x)$

4 Betrachtungsweisen:

i) $F = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ Newtonsche Bewegungsgleichungen

ii) $L = T - V = \frac{p^2}{2m} - V(x)$ Euler-Lagrange Gleichungen

iii) $H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ Hamilton-Funktion

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ und } \dot{x} = +\frac{\partial H}{\partial p}$$

iv) Poisson-Klammern: für eine beliebige Observable $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x, p, t)$ gilt

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = \{\mathcal{O}, H\} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} \text{ mit } \{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Vgl. QM $\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | \hat{L} | \Psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi(t) | [\hat{L}, \hat{H}] | \Psi(t) \rangle = 0$

Schrödinger Bild

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t)$ = Wellenfunktion

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t) =$ Wellenfunktion

Physikalische Interpretation:

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t)$ = Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t)$ = Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t) =$ Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

x

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t)$ = Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

$$x \rightarrow \hat{x}_x := x$$

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t)$ = Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

$$x \rightarrow \hat{x}_x := x$$

$$p_x$$

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t)$ = Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

$$x \rightarrow \hat{x}_x := x$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t) =$ Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

$$x \rightarrow \hat{x}_x := x$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t) =$ Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

$$x \rightarrow \hat{x}_x := x$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \rightarrow \hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t) =$ Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

$$x \rightarrow \hat{x}_x := x$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \rightarrow \hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t) =$ Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

$$x \rightarrow \hat{x}_x := x$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \rightarrow \hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

3) Die Wellengleichung erfüllt die Schrödinger-Gleichung

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t)$ = Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

$$x \rightarrow \hat{x}_x := x$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \rightarrow \hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

3) Die Wellengleichung erfüllt die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

Schrödinger Bild

1) Als Vektorraum betrachten wir den Raum der quadratintegralen Funktionen,

d.h. Funktionen $f(x) \in \mathbb{C}$ für die gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

Zustand = Funktion $\Psi(\vec{x}, t)$ = Wellenfunktion

Physikalische Interpretation: Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort \vec{x} innerhalb des Volumens d^3x zum Zeitpunkt t zu finden = $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$

2) Operatoren können mittels Korrespondenz Prinzip bestimmt werden

$$x \rightarrow \hat{x}_x := x$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Dies sind lineare
Abbildungen im
Vektorraum der
Funktionen

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \rightarrow \hat{H} := \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

3) Die Wellengleichung erfüllt die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

Schrödinger Bild II

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Schrödinger Bild II

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Diese Gleichung muss nun für explizite Potential mathematisch gelöst werden.

Beispiele:

- 1) freies Teilchen
- 2) Potential Schwelle
- 3) Potential Topf
- 4) Harmonischer Oszillator
- 5) Wasserstoffatom

Freies Teilchen

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = 0$

Freies Teilchen

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = 0$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Freies Teilchen

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = 0$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Lösungen: ebene Wellen

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\omega t}$$

Freies Teilchen

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = 0$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Lösungen: ebene Wellen

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\omega t}$$

Einsetzen in Schrödinger-Gleichung

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right)$$

Potentialschwelle

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \text{const}$.

Potentialschwelle

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \text{const.}$

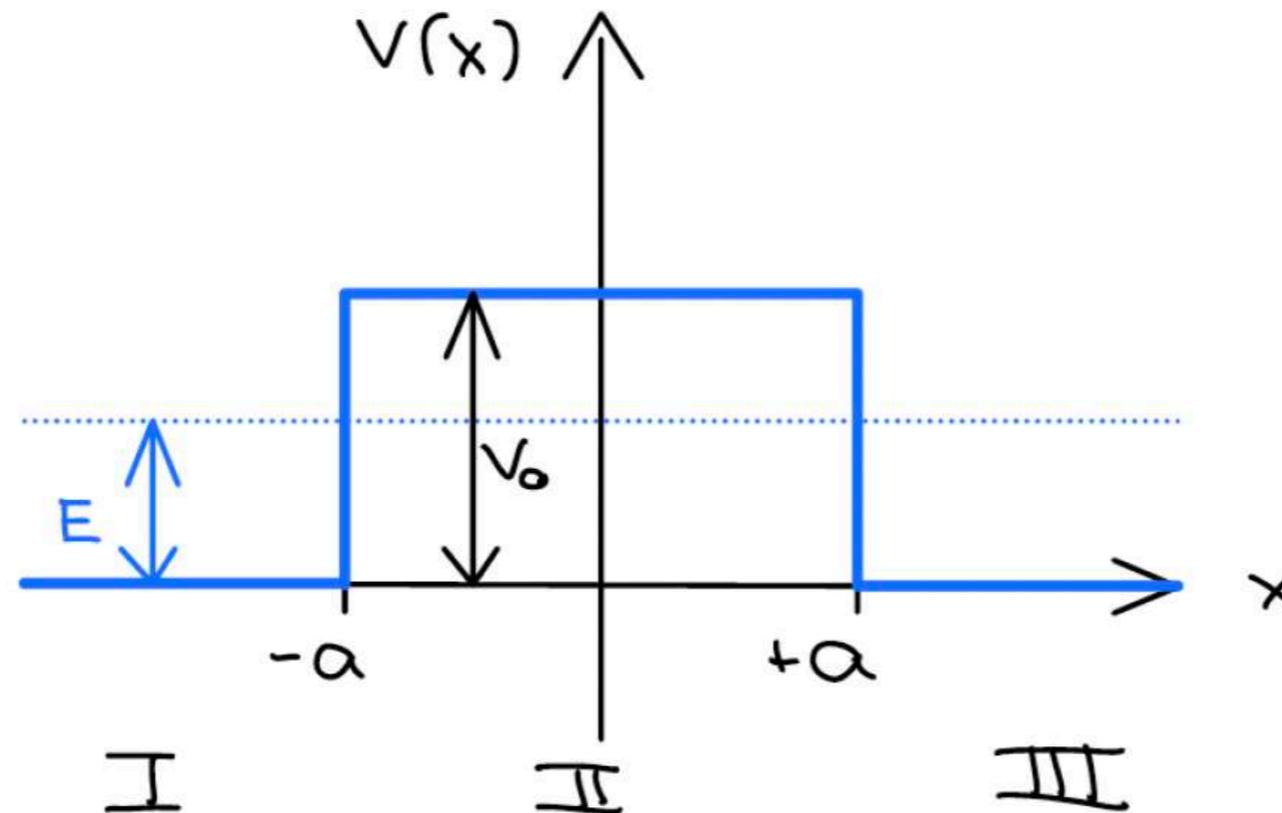
$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V_0 \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Potentialschwelle

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \text{const.}$

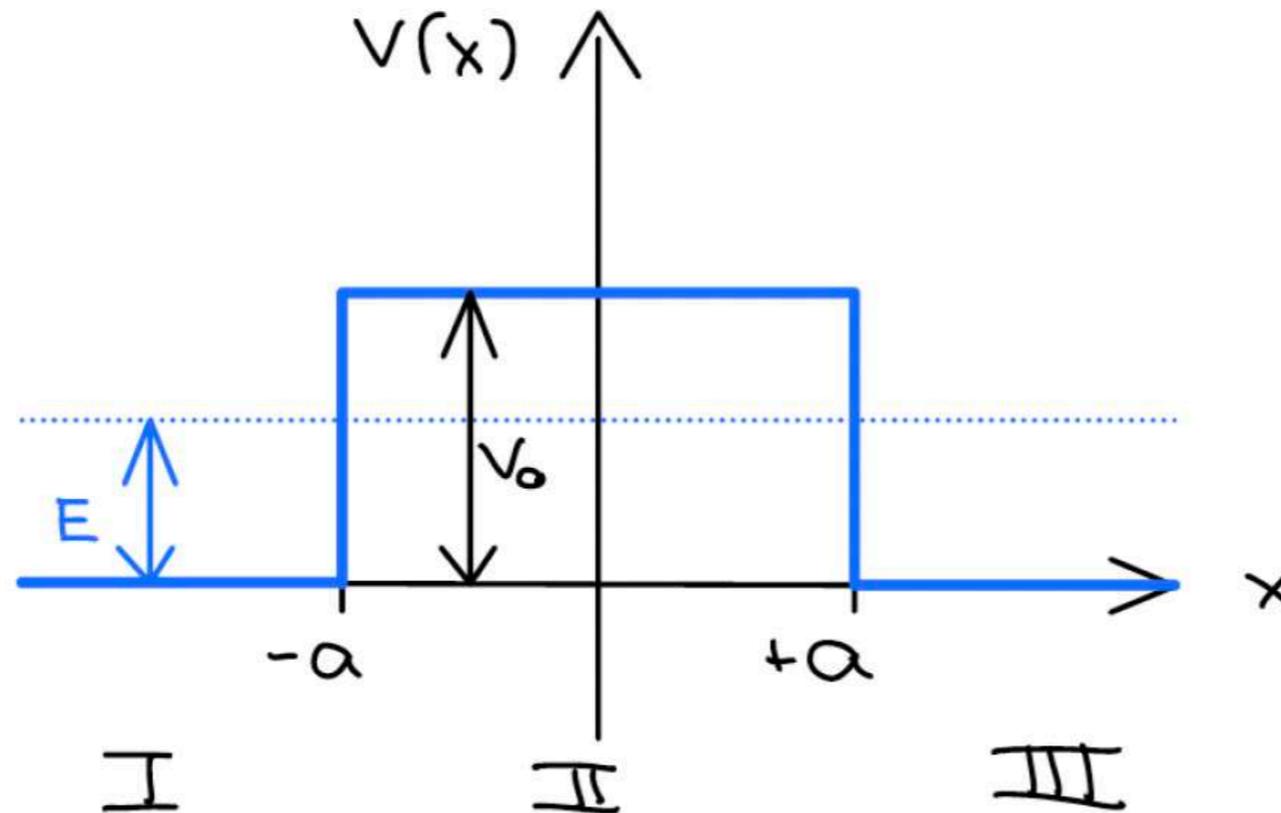
$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V_0 \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

$$V(x) = V_0 \theta(a - |x|).$$



Potentialschwelle

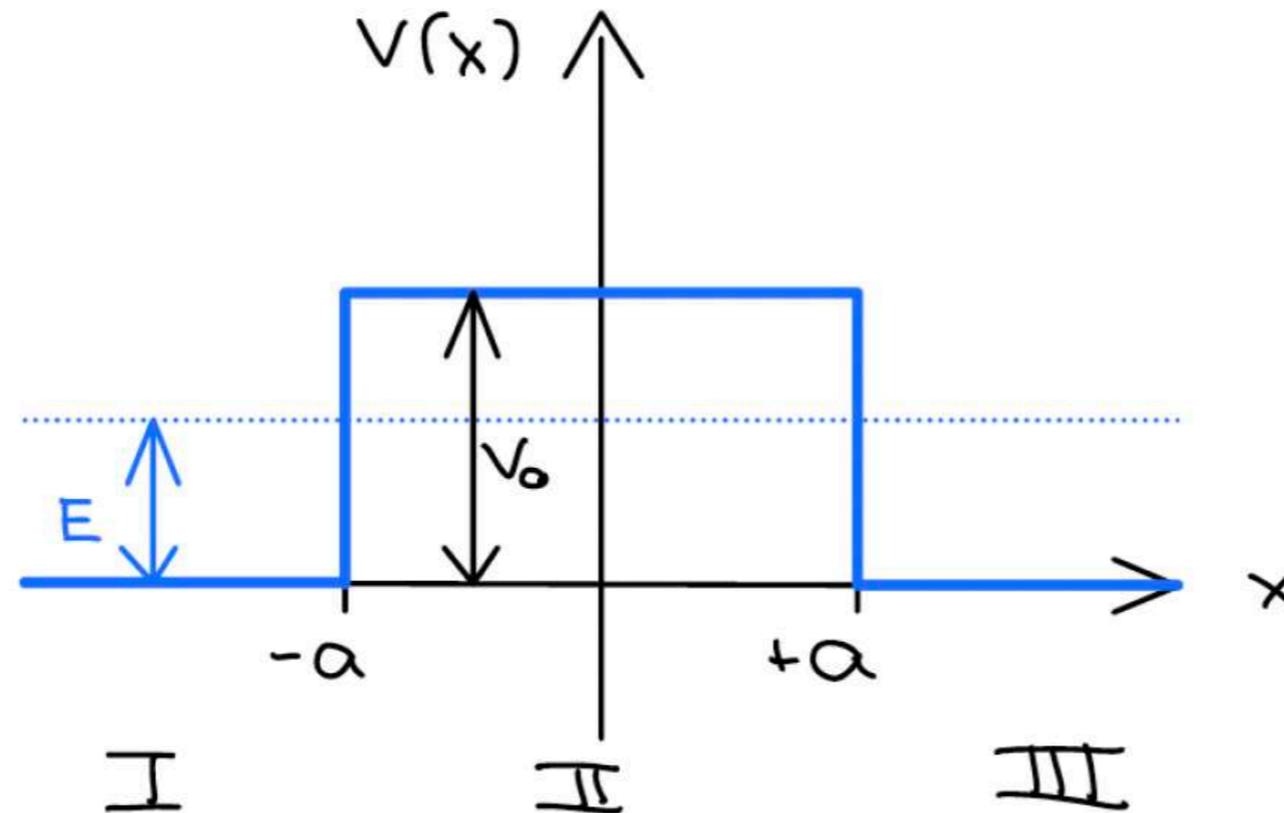
$$V(x) = V_0 \theta(a - |x|).$$



$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < -a, \\ Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x} & -a < x < a, \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & x > a, \end{cases}$$

Potentialschwelle

$$V(x) = V_0 \theta(a - |x|).$$



$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < -a, \\ Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x} & -a < x < a, \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & x > a, \end{cases}$$

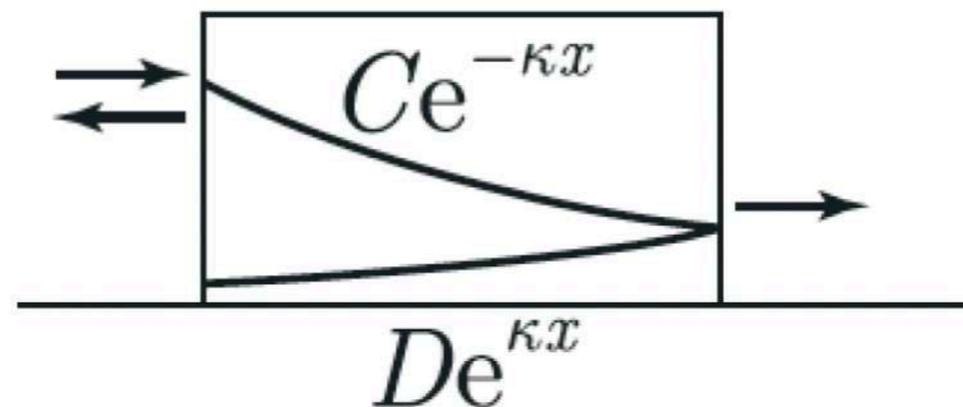
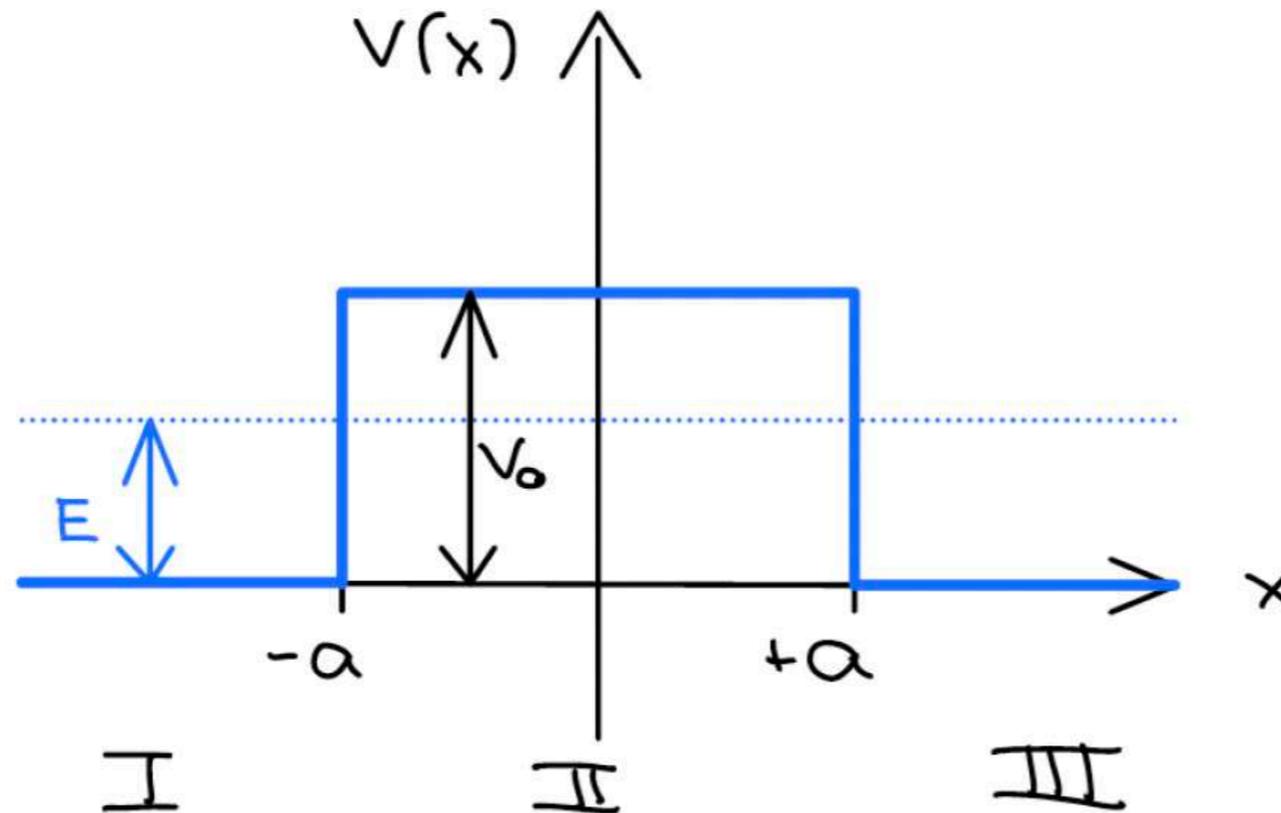
$$A = \left(\cosh 2\kappa a + \frac{i\epsilon}{2} \sinh 2\kappa a \right) e^{2ika} F,$$

$$B = -\frac{i\eta}{2} \sinh 2\kappa a F.$$

$$\epsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}, \quad \eta = \frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa}.$$

Potentialschwelle

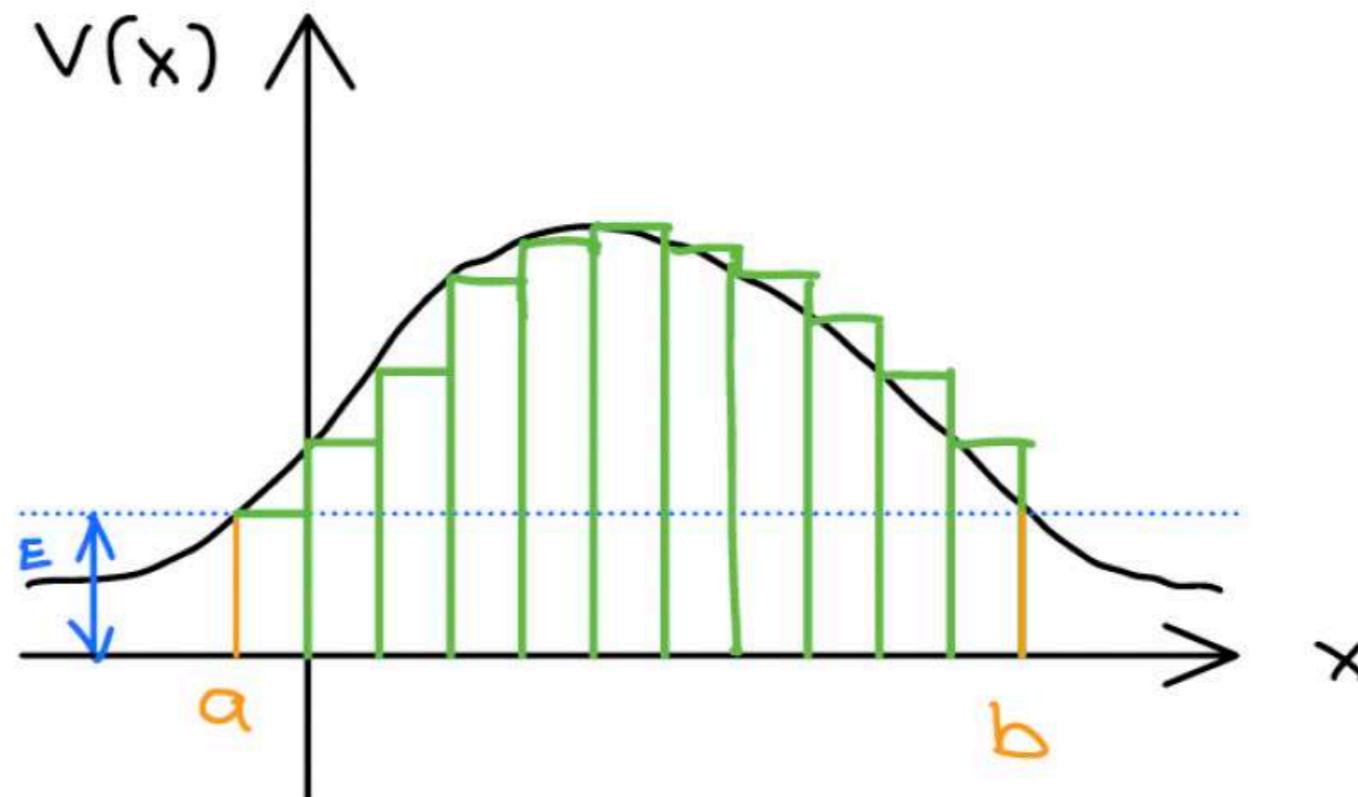
$$V(x) = V_0 \theta(a - |x|).$$



Tunneleffekt:
Wahrscheinlichkeit
rechts von der Schwelle
ist größer als Null

Potentialschwelle

Näherungsweise Bestimmung von beliebigen Potentialen



Potentialtopf

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \text{const.}$

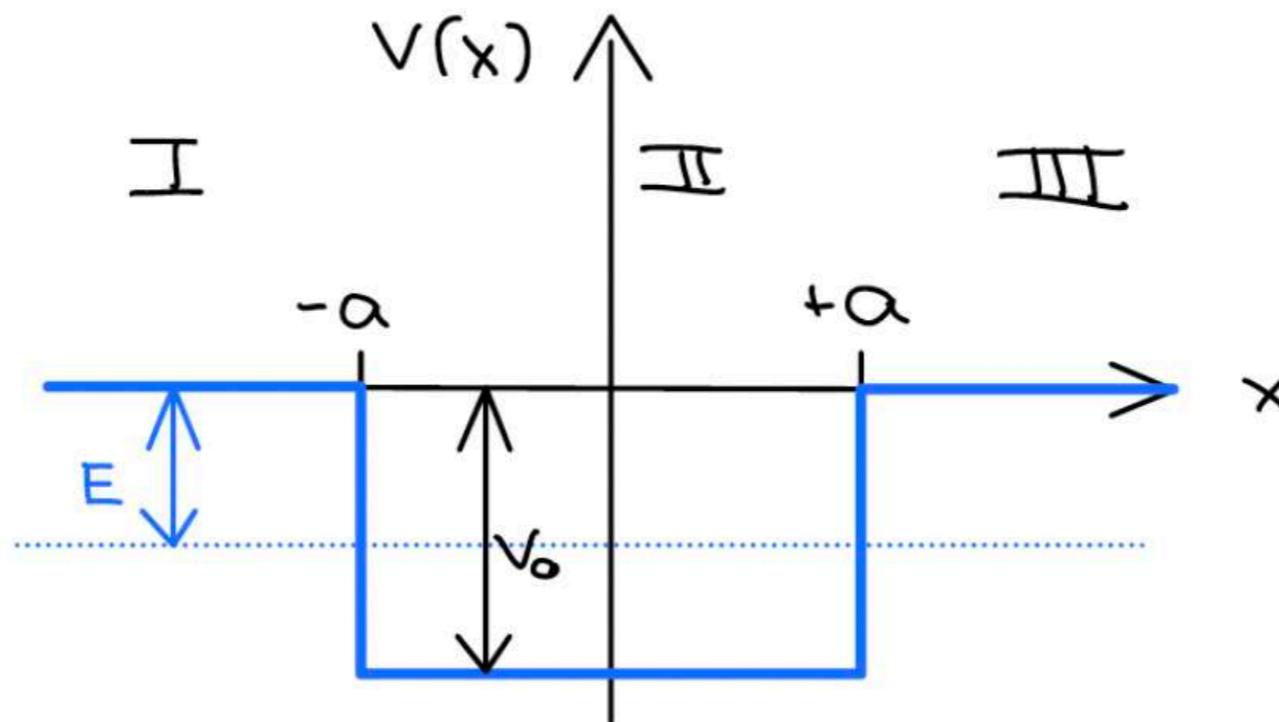
$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - V_0 \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Potentialtopf

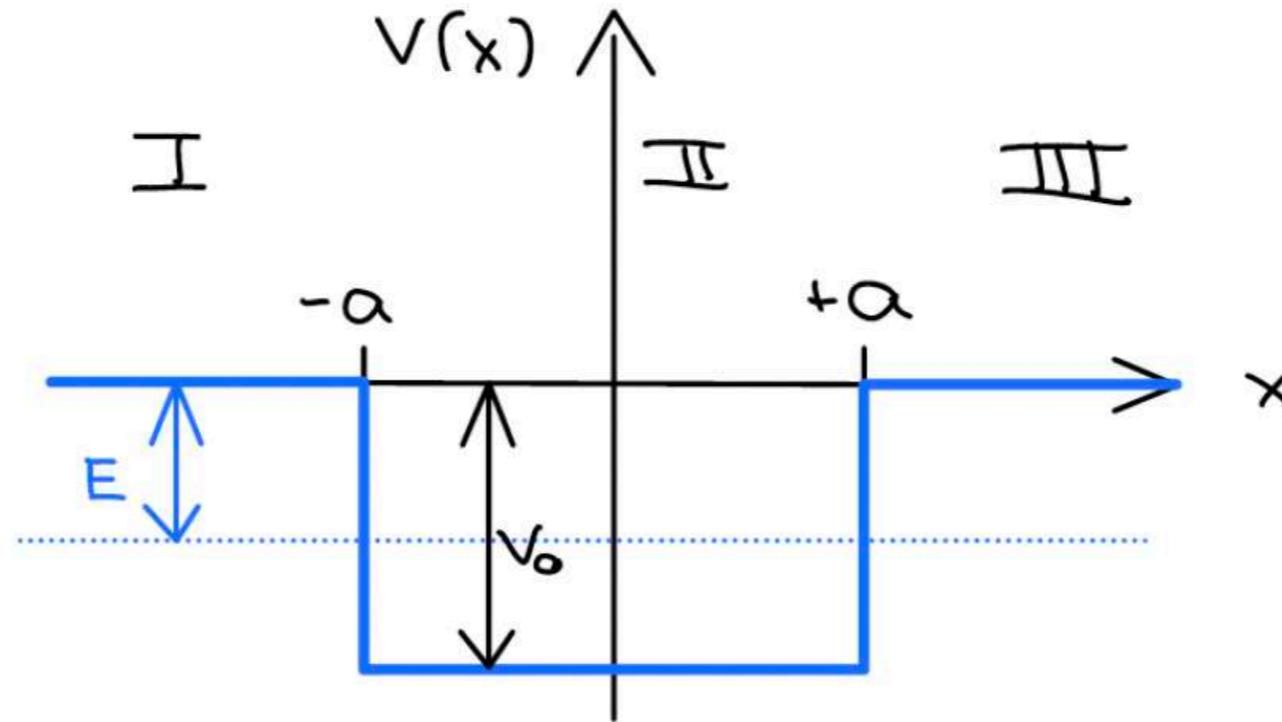
Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \text{const.}$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - V_0 \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

$$V(x) = -V_0 \theta(a - |x|)$$



Potentialtopf



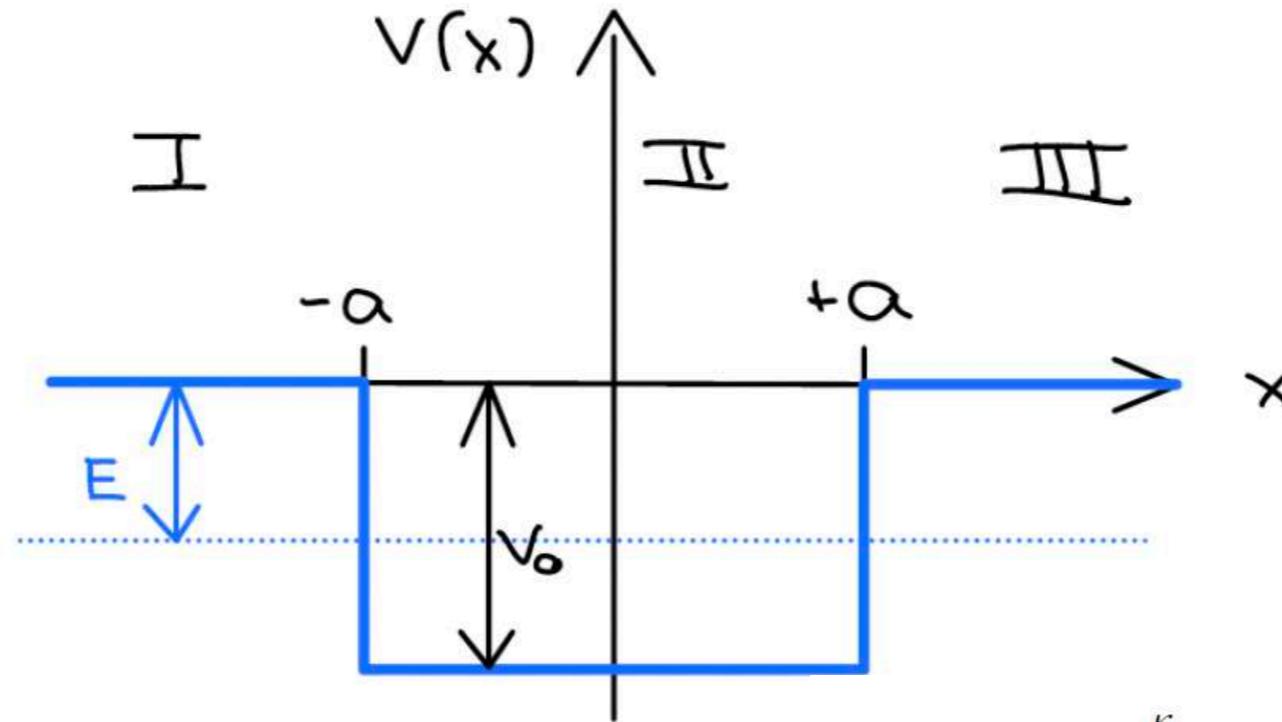
Gerade: $\psi(x) = \psi(-x)$

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \cos qx & |x| < a, \\ e^{\mp \kappa x} & x \gtrless \pm a. \end{cases}$$

Ungerade: $\psi(x) = -\psi(-x)$

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \sin qx & |x| < a, \\ \pm e^{\mp \kappa x} & x \gtrless \pm a. \end{cases}$$

Potentialtopf



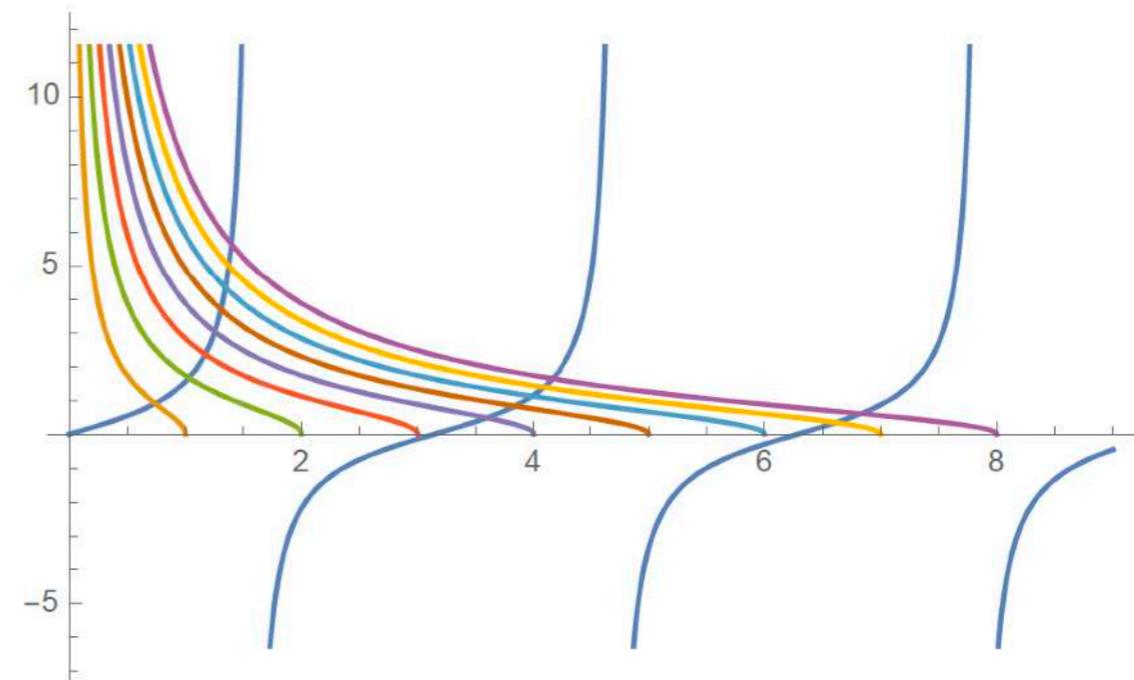
$$\tan qa = \frac{\kappa}{q} = \dots = \frac{\sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} - q^2a^2}}{qa} =: \frac{\sqrt{\zeta^2 - q^2a^2}}{qa},$$

Gerade: $\psi(x) = \psi(-x)$

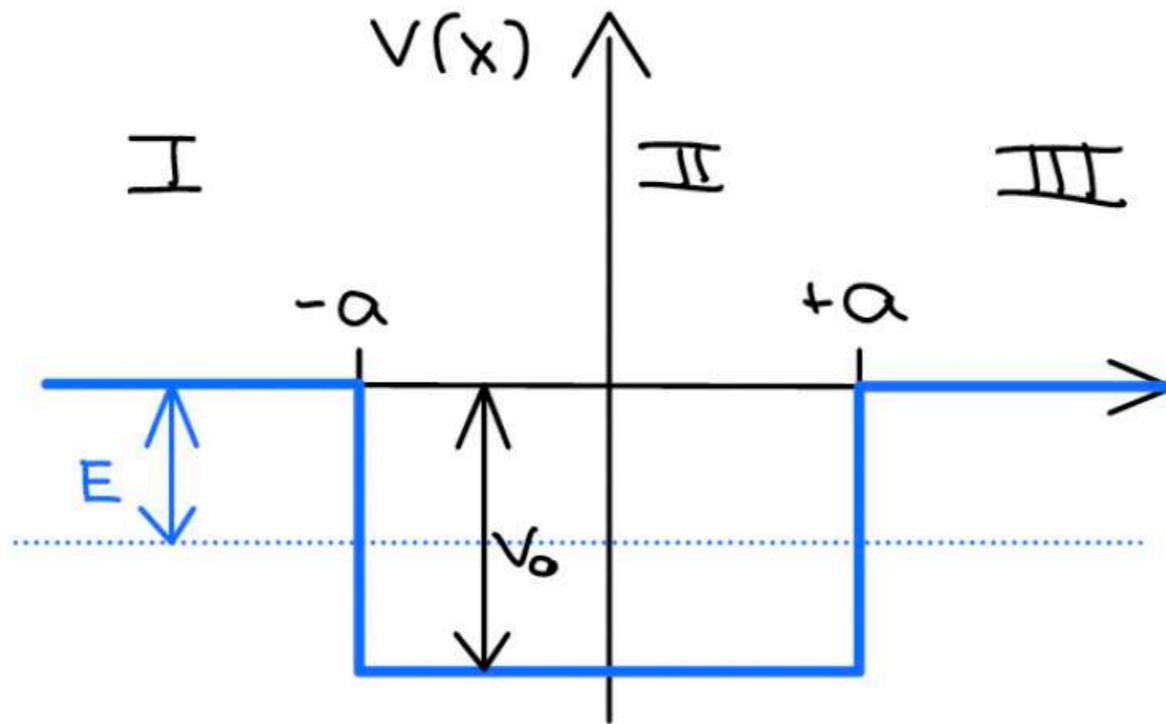
$$\Psi(x) = \begin{cases} A \cos qx & |x| < a, \\ e^{\mp \kappa x} & x \gtrless \pm a. \end{cases}$$

Ungerade: $\psi(x) = -\psi(-x)$

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \sin qx & |x| < a, \\ \pm e^{\mp \kappa x} & x \gtrless \pm a. \end{cases}$$



Potentialtopf

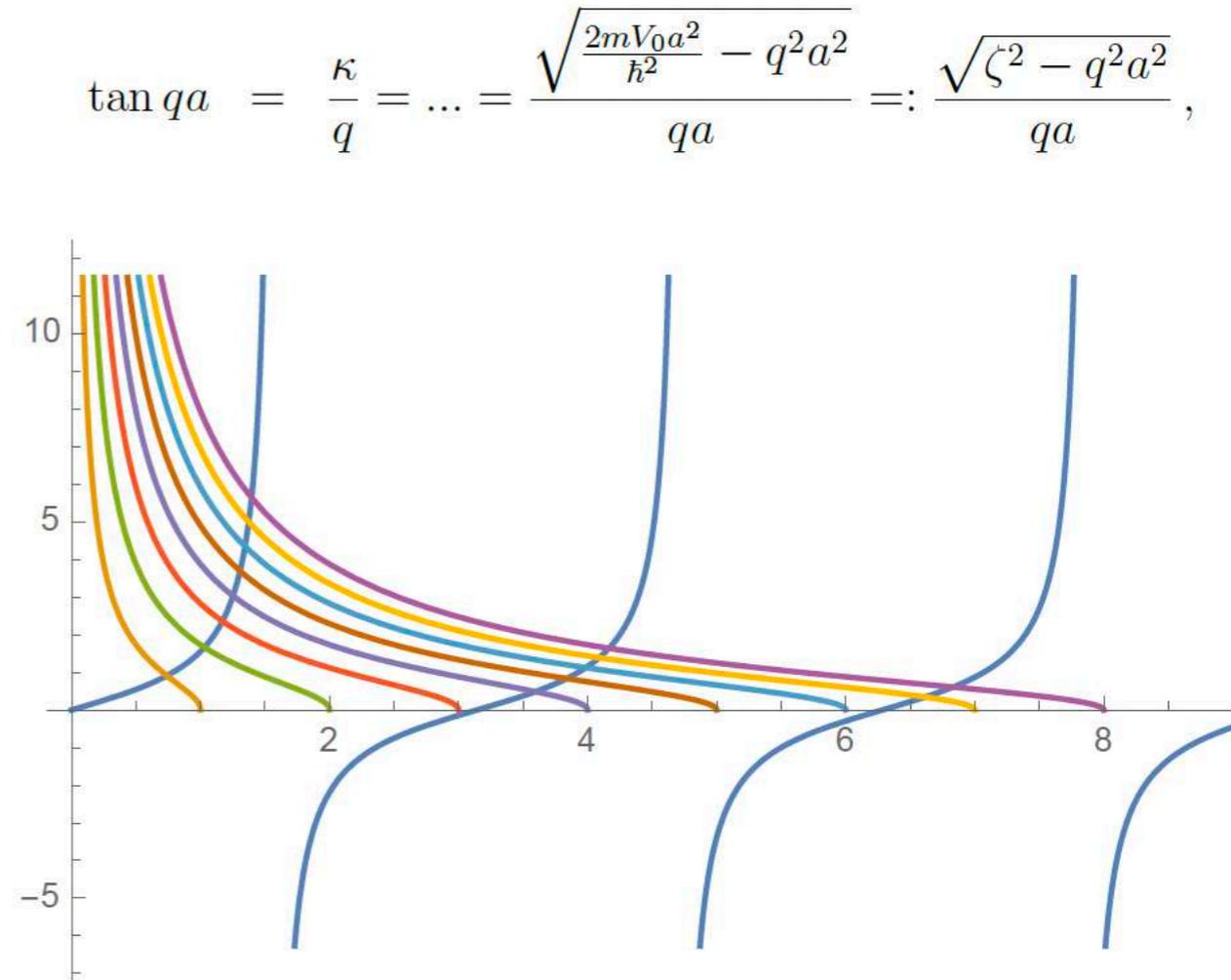


Gerade: $\psi(x) = \psi(-x)$

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \cos qx & |x| < a, \\ e^{\mp \kappa x} & x \gtrless \pm a. \end{cases}$$

Ungerade: $\psi(x) = -\psi(-x)$

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \sin qx & |x| < a, \\ \pm e^{\mp \kappa x} & x \gtrless \pm a. \end{cases}$$



Es gibt nur eine begrenzte Menge von diskreten Zustände

Bis $\zeta = 3$ gibt es nur einen.... mit der Energie

$$E = -V_0 + \frac{(q\hbar)^2}{2m} = -V_0 \left(1 - \left(\frac{aq}{\zeta} \right)^2 \right).$$

Potentialtopf

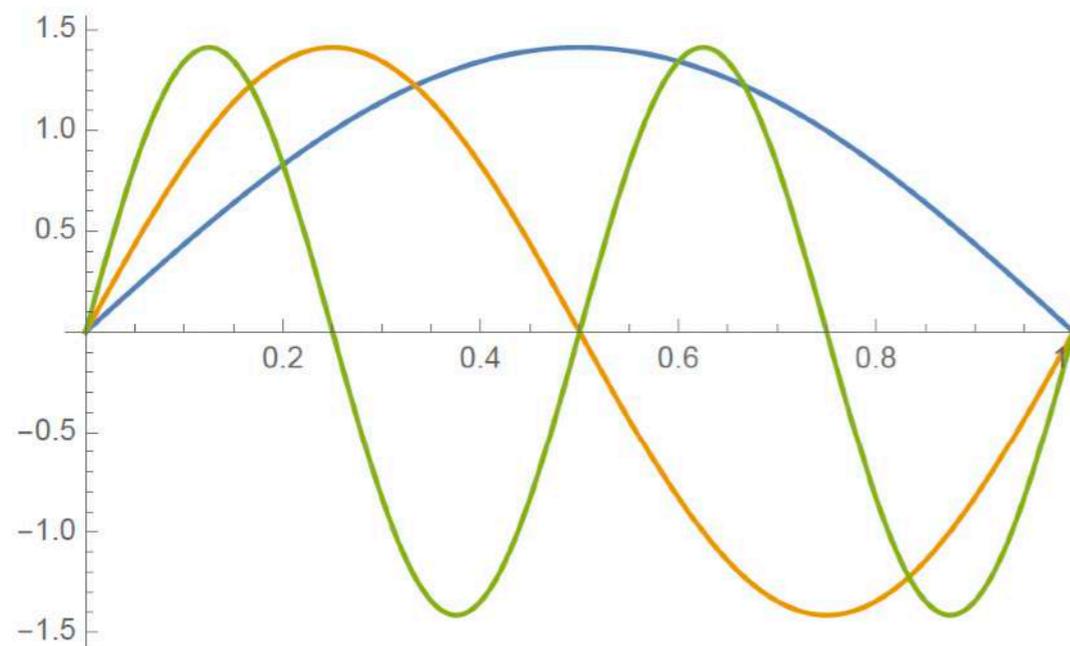


Abbildung 1: Die Wellenfunktion für ein Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf lautet: $\Psi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Mathematica: `Plot[{Sqrt[2] Sin[Pi x], Sqrt[2] Sin[2 Pi x], Sqrt[2] Sin[4 Pi x]}, {x, 0, 1}]`

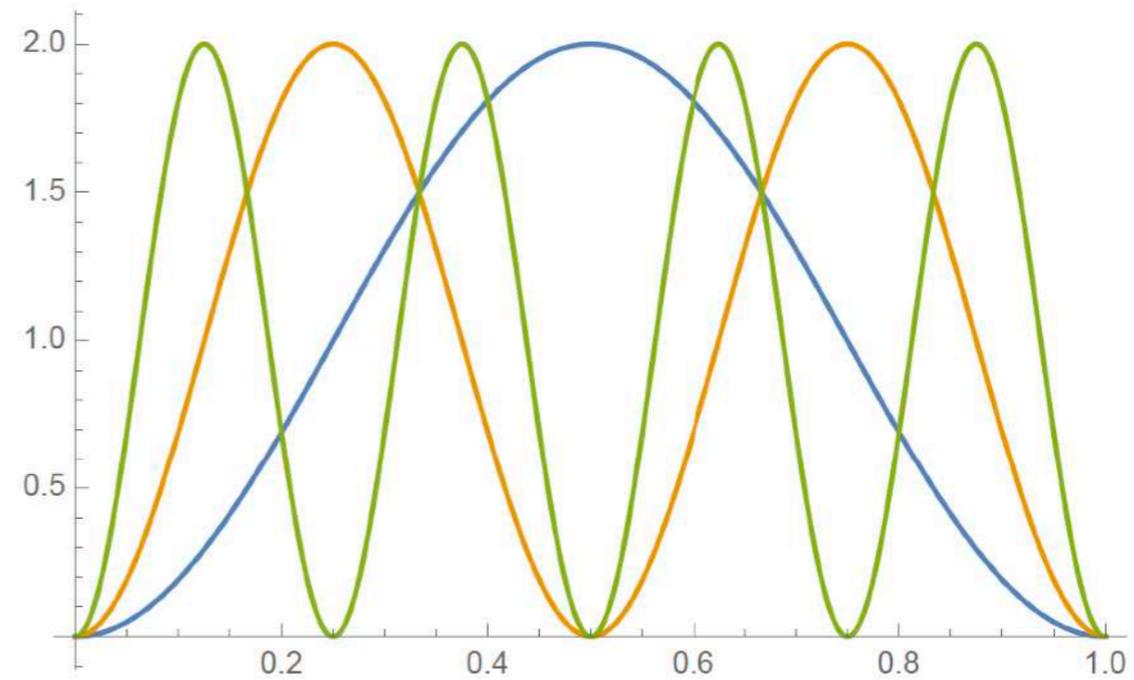


Abbildung 2: Wahrscheinlichkeitsdichte für ein Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf: $|\Psi_n(x)|^2 = 2 \sin^2(n\pi x)$. Mathematica: `Plot[{2 Sin[Pi x]^2, 2 Sin[2 Pi x]^2, 2 Sin[4 Pi x]^2}, {x, 0, 1}]`

Harmonischer Oszillator

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

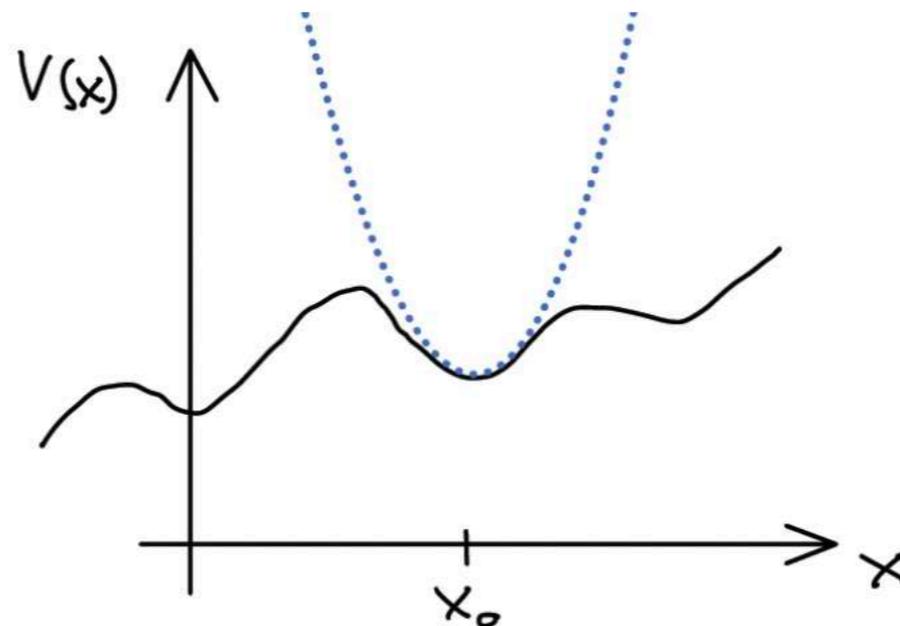
Harmonischer Oszillator

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

In der Natur tritt ein reiner harmonischer Oszillator selten auf, aber wenn wir ein beliebiges Potential um ein Minimum bei $x = x_0$ entwickeln, so erhalten wir

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ &\approx V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2. \end{aligned} \quad (92)$$



Harmonischer Oszillator

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Hermite-Polynome

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}},$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Harmonischer Oszillator

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

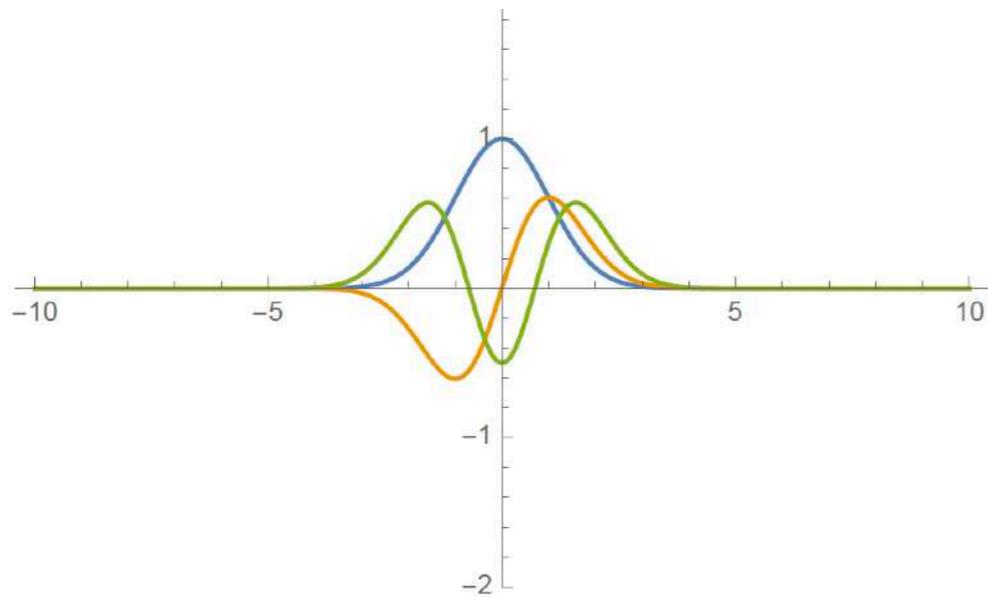


Abbildung 3: Die Wellenfunktionen für den harmonischen Oszillator: $\Psi_n(x) = h_n(x)e^{-x^2/2}$: Mathematica: `Plot[{Exp[-x^2/2], x Exp[-x^2/2], (x^2 - 1/2) Exp[-x^2/2]}, {x, -10, 10}, PlotRange -> {-2, 2}]`

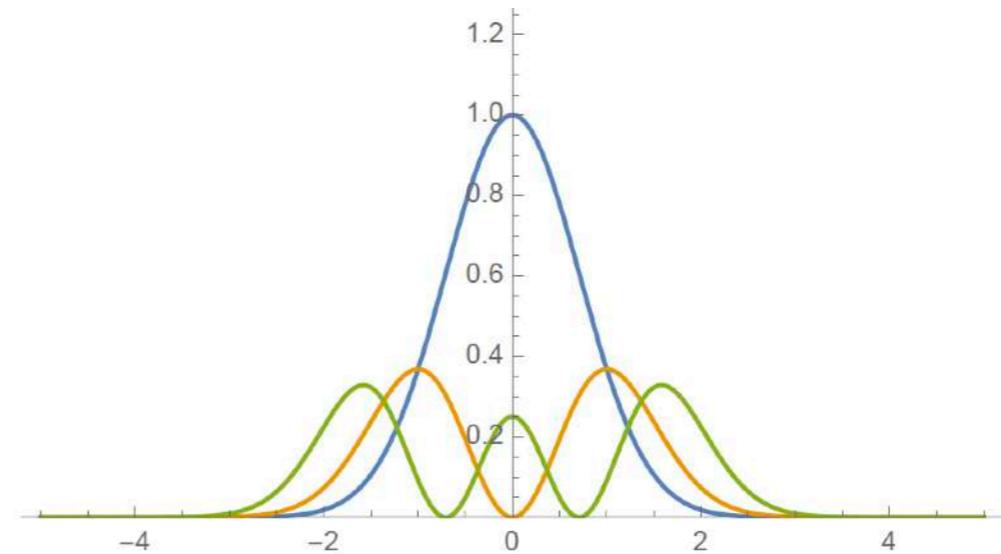


Abbildung 4: Wahrscheinlichkeitsverteilung für den harmonischen Oszillator: $\Psi_n(x) = (h_n(x)e^{-x^2/2})^2$: Mathematica: `Plot[{(Exp[-x^2/2])^2, (x Exp[-x^2/2])^2, ((x^2 - 1/2) Exp[-x^2/2])^2}, {x, -5, 5}, PlotRange -> {0, 1.5}]`

H-Atom

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

H-Atom

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \phi) &= R(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{\tilde{u}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{u(\rho) \kappa}{\rho} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \kappa \rho^l e^{-\rho} \omega(\rho) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \sqrt{\frac{(n-l-1)!(2\kappa)^3}{2n((n+l)!)^3}} (2\kappa r)^l e^{-\kappa r} L_{n+l}^{2l+1}(2\kappa r) Y_{lm}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Energieniveaus

$$E_n = - \underbrace{\frac{mc^2}{2}}_{511 \text{ keV}} \alpha^2 \frac{Z^2}{n^2}$$

H-Atom

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \phi) &= R(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{\tilde{u}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{u(\rho) \kappa}{\rho} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \kappa \rho^l e^{-\rho} \omega(\rho) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}} \end{aligned}$$

Energieniveaus

$$E_n = -$$

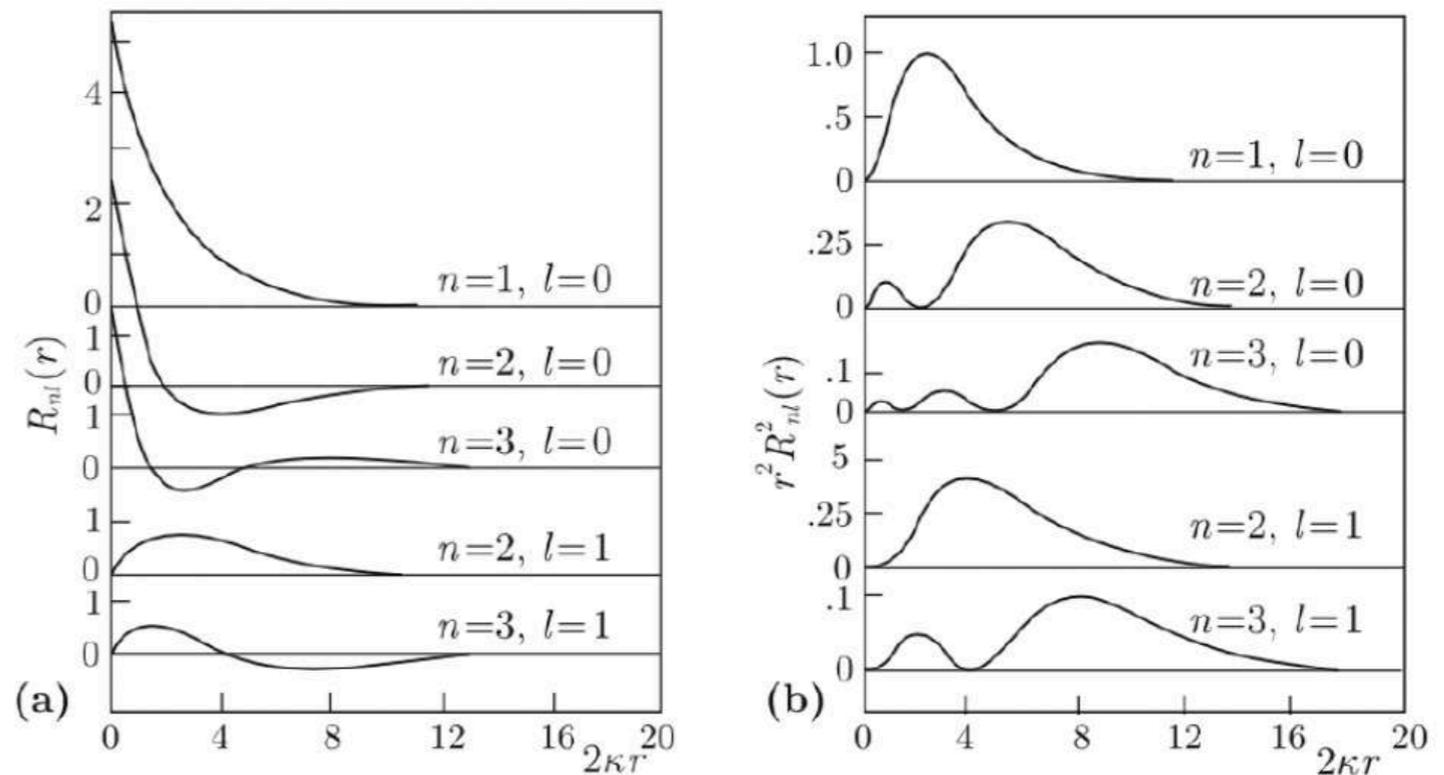


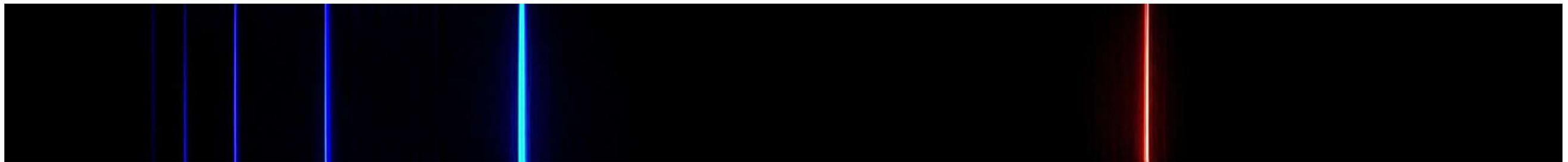
Fig. 6.3a,b. The radial wave function $R_{nl}(r)$ for the attractive Coulomb potential ($Z = 1$). (a) The radial wave function R_{nl} . (b) The radial probability density $r^2 R_{nl}^2$.

H-Atom

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Die Erklärung des diskreten Spektrums des Wasserstoffatoms war eine Hauptmotivation um 1925 nach einer Erweiterung der klassischen Physik zu suchen

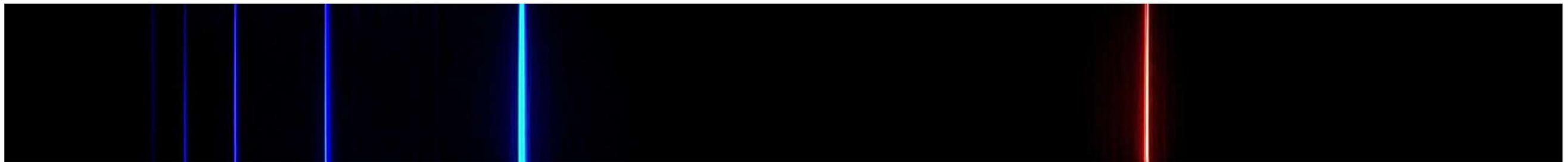


H-Atom

Schrödinger-Gleichung in 3 Raumdimensionen $V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

Die Erklärung des diskreten Spektrums des Wasserstoffatoms war eine Hauptmotivation um 1925 nach einer Erweiterung der klassischen Physik zu suchen



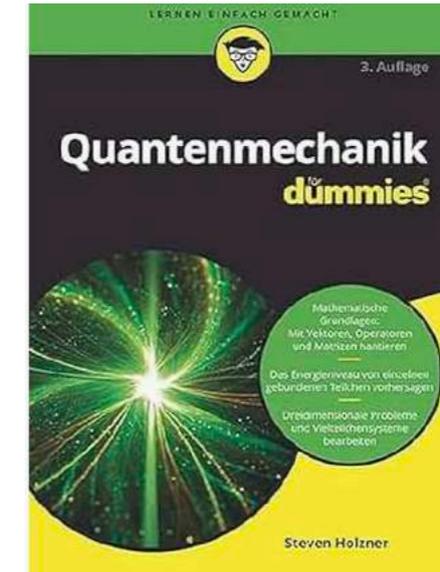
Here it is!

$$E_n - E_m = \frac{mc^2}{2} \alpha^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Balmer Serie: m = 2

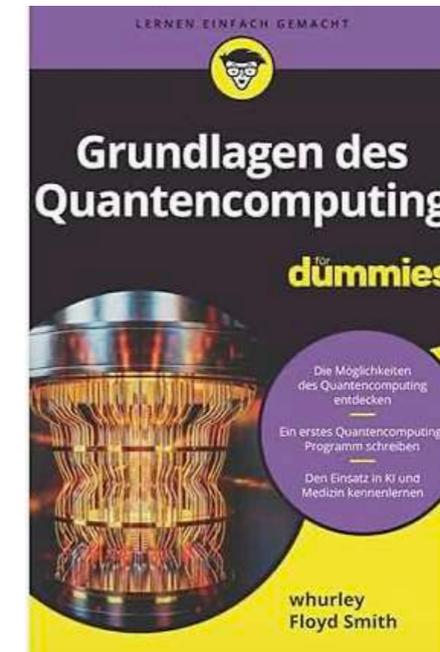
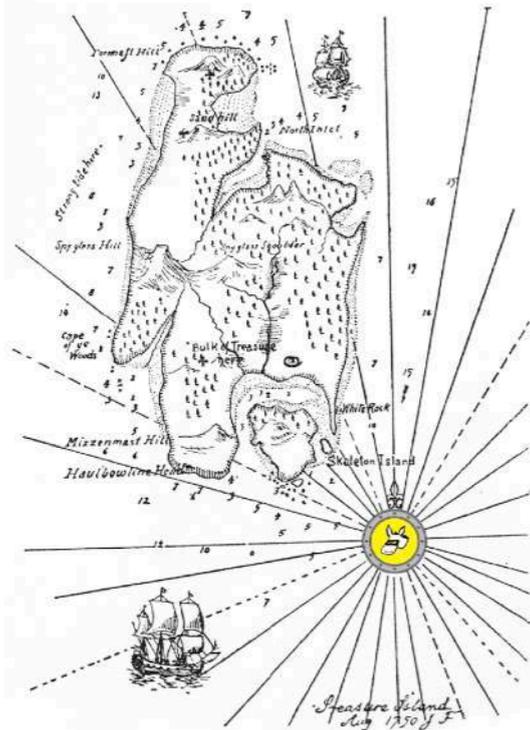
Literatur:

Quantenmechanik:



Quanten Computing:

The Quantum Quest

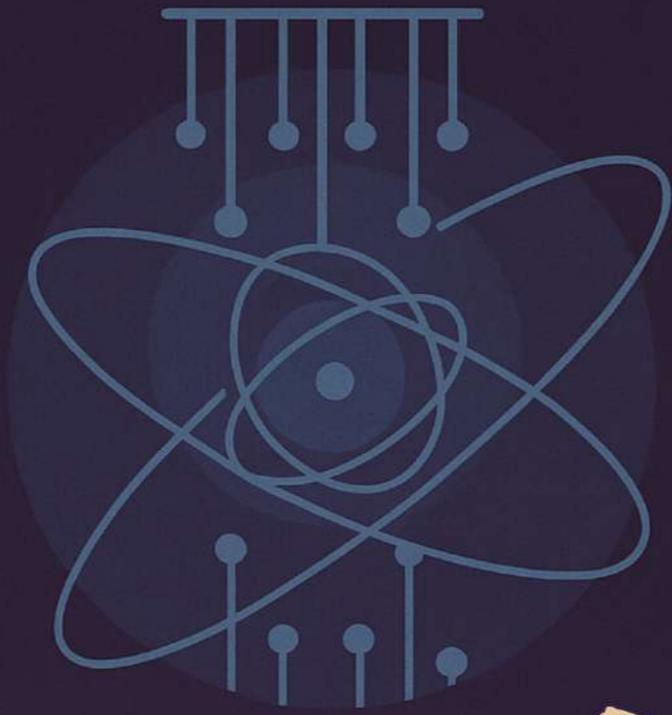


<https://qi-rub.github.io/quantum-quest/2023/de/quantumquest-de.pdf>

PHYSIK IM APOLLO

Universität
Siegen

QUANTENCOMPUTING
TRIFFT AKROBATIK



23.11.25 18:00
24.11.25 10:00
25.11.25 19:30

**Karten ab Ende
August
via
Apollo
Webseite**

